Прв тест

15.03.2016 година

1. Точката M од страната AB на $\triangle ABC$ е таква што радиусите на вписаните кружници во $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$ се еднакви. Центрите на кружниците се означени со O_1 и O_2, а нивните допирни точки до страната AB се P и Q, соодветно. Познато е дека $\frac{P_{ABC}}{P_{PQO_1O_2}} = 6$.

   а) Докажи, дека $10\overline{CM} + 5\overline{AB} = 7(\overline{AC} + \overline{BC})$.

   б) Определи го односот $\frac{\overline{AC}+\overline{BC}}{\overline{AB}}$.

2. Нека m е природен број. Определи ги сите природни броеви a за кои низата дефинирана со $a_0 = a$ и

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{ако } a_n \text{ е парен,} \\ a_n + m, & \text{ако } a_n \text{ е непарен,} \end{cases}$$

   за $n = 1, 2, 3, ..$ е периодична, со циклус (сегмент кој периодично се повторува) од видот $a_0, a_1, ..., a_k$, за некој k.

3. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y.$$

4. Определи ги сите природни броеви n за кои постои пермутација σ на броевите $1, 2, ..., n$ таква што $\sqrt{\sigma(1) + \sqrt{\sigma(2) + \sqrt{... + \sqrt{\sigma(n)}}}}$ е рационален број.