РУБРИКА ЗАДАЧИ
ЗА СИГМА 104_формулации_СИГМА_105_решенија

1366. Природниот број n е полн квадрат. Кој е најмалиот природен број кој е поголем од n и е полн квадрат?

Решение. Ако n е полн квадрат, тогаш постои природен број k таков што $n=k^2$. Најмалиот природен број кој е полн квадрат и е поголем од k^2 е $(k+1)^2$, т.е. $(\sqrt{n}+1)^2$.

1367. Ако a,b,c се попарно различни рационални броеви, тогаш

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$$

е полн квадрат на рационален број. Докажи!

Решение. Бидејќи a,b и c се попарно различни рационални броеви, добиваме дека $a-b,b-c,c-a,\frac{1}{c-a},\frac{1}{a-b},\frac{1}{b-c},\frac{1}{(c-a)^2},\frac{1}{(a-b)^2},\frac{1}{(b-c)^2}$ се исто така рационални броеви. Со елементарни трансформации дадениот израз можеме да го запишеме во облик:

$$\frac{1}{(c-a)^2}+\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}=\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)^2-2\left(\frac{1}{(c-a)(a-b)}+\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)^2-2\frac{a-b+b-c+c-a}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\left(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\right)^2$$

Бидејќи $\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}$ е рационален број, тврдењето од задачата е докажано.

1368. Определи ги вредностите на збирот $x+y+u+v$ каде x,y,u,v се попарно различни броеви, такви што

$$\frac{x+u}{x+v}=\frac{y+v}{y+u}.$$

Решение. Од условот на задачата имаме $x\neq y\neq u\neq x$, $x\neq u\neq v\neq x$ и $y\neq v$. Дадениот израз можеме да го запишеме во облик

$$(x+u)(y+u)=(x+v)(y+v)$$
$$xy+xu+yu+u^2=xy+xv+yv+v^2$$
$$xu-xv+yu-yv+u^2-v^2=0$$
$$x(u-v)+y(u-v)+(u-v)(u+v)=0$$
$$(u-v)(x+y+u+v)=0\ .$$

Од условот на задачата $u-v\neq 0$, па според тоа $x+y+u+v=0$, што требаше да се определи.

1369. Нека a,b,c,d се ненегативни броеви. Докажи дека следниве искази се еквивалентни:

$p_1(x)$: $a^2-b^2+c^2-d^2=0$ и $a-b+c-d=0$, и $p_2(x)$: $a^k-b^k+c^k-d^k=0$

за секој $k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Импликацијата $p_2(x)\Rightarrow p_1(x)$ е очигледна. Ако $p_2(x)$ е исполнет за произволен $k\in Z$, тогаш за $k=2$ и $k=1$ се добива $p_1(x)$.

Ќе ја покажеме импликацијата $p_1(x)\Rightarrow p_2(x)$. Имаме

$$p_1(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=d-c \\ a^2-b^2=d^2-c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-d=b-c \\ (a-b)(a+b)=(d-c)(d+c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-d=b-c \\ (a-b)(a+b-d-c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \vee \begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^k=b^k \\ c^k=d^k \end{cases} \vee \begin{cases} a^k=d^k \\ b^k=c^k \end{cases} \Rightarrow a^k-b^k+c^k-d^k=0 \Leftrightarrow p_2(x) .$$

што требаше да се докаже.

1370. Во множеството реални броеви да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^2 - y = z^2 \\ y^2 - z = x^2 \\ z^2 - x = y^2 \end{cases} .$$

Решение. Ако трите равенки ги собереме, непосредно добиваме дека

$$x+y+z=0 .$$

Ако од добиената равенка го изразиме z и го замениме во првата равенка од системот, добиваме

$$x^2-y=x^2+2xy+y^2 ,$$

$$y(y+2x+1)=0 .$$

Сега се можни два случаи.

Случај 1. $y=0$.

Тогаш $z=-x$, па од втората равенка на системот добиваме дека $x(x-1)=0$. Нејзини решенија се $x=0$ и $x=1$. Ако $x=0$, тогаш $z=0$, па решение на почетниот систем е $x=y=z=0$. Ако $x=1$, тогаш $z=-1$, па решение на системот е $x=1, y=0, z=-1$.

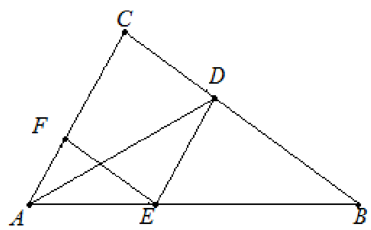
Случај 2. $y=-2x-1$.

Тогаш $z=x+1$. Ако замениме во третата равенка на почетниот систем, добиваме $x(x+1)=0$. Решенија на последната равенка се $x=0$ и $x=-1$. За $x=0$, добиваме $y=-1, z=1$ и решение на системот е $(x,y,z)=(0,-1,1)$. За $x=-1$, добиваме $y=1$ и $z=0$, па решение во овој случај е $(x,y,z)=(-1,1,0)$.

Конечно, множество на решенија на системот е

$$\{(0,0,0),(1,0,-1),(-1,1,0),(0,-1,1)\} .$$

1371. Во триаголникот ABC, симетралата на аголот BAC ја сече страната BC во точка D, правата низ D која што е паралелна со AC ја сече AB во точка E и правата низ E која што е паралелна со BC ја сече AC во точка F. Докажи дека $\overline{AE}=\overline{FC}$.



Решение. Од паралелноста на DE и AC следува дека $\angle DAC=\angle EDA$. Од тоа што AD е симетрала на аголот BAC, следува дека $\angle DAC=\angle DAE$ па затоа $\angle EDA=\angle DAE$. Оттука, триаголникот AED е рамнокрак и затоа $\overline{AE}=\overline{DE}$, а од паралелограмот $EDCF$ следува дека $\overline{DE}=\overline{FC}$. Затоа, $\overline{AE}=\overline{FC}$.

1372. Низ точката A се повлечени две прави кои ја допираат кружницата k со радиус R во точките B и C, така што триаголникот ABC е рамностран. Да се пресмета плоштината на триаголникот ABC.

Решение. Нека O е центар на кружницата k. Тогаш триаголникот BOC е рамнокрак со основа BC и крак со должина R. Нека S е подножје на висината спуштена од O кон страната BC во триаголникот BOC.

Да забележиме дека $\angle OBA = \angle OCA = 90^\circ$ (како агли меѓу тетива и тангента во кружница). Според тоа $\angle BOC = 120^\circ$. Сега е јасно дека $\angle COS = \angle BOS = 60^\circ$ од каде добиваме дека $\overline{OS} = \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{OC} = \frac{R}{2}$. Сега од Питагорина теорема јасно е дека $\overline{BS} = \overline{CS} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, па според тоа

$$a = \overline{BC} = 2\overline{BS} = 2\frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Значи, страната на рамностраниот триаголник ABC е $a = R\sqrt{3}$, па неговата плоштина е

$$P_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 3\sqrt{3}}{4}.$$

1373. Зададени се 15 квадратни триноми $x^2 - p_i x + q_i$, $i \in \{1,2,3,...,15\}$, чии коефицинти се различни и припаѓаат на множеството $\{1,2,3,...,30\}$ (еден број не е коефициент во два триноми). Корен на квадратен трином го нарекуваме “добар” ако тој е поголем од 20.

Колку најмногу “добри” корени може да имаат зададените 15 квадратни триноми?

Решение. Нека $x^2 + px + q$ е еден од зададените квадратни триноми. Тој може да има најмногу еден добар корен. Навистина, ако претпоставиме дека и x_1 и x_2 се добри корени, тогаш $p = x_1 + x_2 > 20 + 20 > 30$, што е спротивно на условите од задачата ($p \in \{1,2,3,...,30\}$).

Согласно изборот на p една равенка, т.е. квадратен трином има добар корен, ако $p > 20$. Навистина, ако претпоставиме дека $p \le 20$ и триномот има добар корен, тогаш од корените $x_{1/2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ е коренот $x_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, т.е. $\frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} > 20$. Последната неравенка можеме да ја запишеме во облик

$$\sqrt{p^2 - 4q} > 40 - p$$

$$p^2 - 4q > 160 - 80p + p^2$$

$$4q < 80p - 1600$$

$$q < 20p - 400 < 20 \cdot 20 - 400 = 0,$$

што е спротивно на изборот на q.

Во множеството $\{1,2,3,...,30\}$ има 10 броеви поголеми од 20 кои може да бидат вредности за p а тие се 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29 и 30.

Треба да покажеме дека за секој од овие броеви постои трином кој има добар корен. Ќе направиме избор $p_k = 20 + k$, $q_k = k$, $k = 1, 2, 3, ..., 10$. Тогаш

$$D_k = p_k^2 - 4q_k = (20+k)^2 - 4k = 400 + 40k + k^2 - 4k > 400 - 40k + k^2 = (20-k)^2$$

при што имаме

$$x_k^{\max} = \frac{p_k + \sqrt{D_k}}{2} > \frac{20 + k + \sqrt{(20-k)^2}}{2} = \frac{20 + k + 20 - k}{2} = 20.$$

1374. Нека ABC е впишан триаголник во параболата $y=x^2$. Броевите a,b,c се апсциси на средните точки на неговите страни.

Определи го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот .

Решение. Нека $A(l,l^2)$, $B(m,m^2)$ и $N(n,n^2)$ се темиња на триаголникот ABC. Тогаш од условот на задачата имаме

$$c=\frac{1}{2}(m+l)\ ,\ b=\frac{1}{2}(l+n)\ ,\ a=\frac{1}{2}(n+m)\ ,$$

а според формулата за пресметување на плоштина на триаголник зададен во координати имаме

$$P_{ABC}=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} m-l & m^2-l^2 \\ n-l & n^2-l^2 \end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|(m-n)(n-l)(l-m)|\ .$$

Од друга страна, според формулата за растојание меѓу точки, имаме

$$\overline{AB}=\sqrt{(m-l)^2+(m^2-l^2)^2}=|m-l|\sqrt{1+(m+l)^2}=|m-l|\sqrt{1+4c^2}$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(n-m)^2+(n^2-m^2)^2}=|n-m|\sqrt{1+(n+m)^2}=|n-m|\sqrt{1+4a^2}$$

$$\overline{CA}=\sqrt{(l-n)^2+(l^2-n^2)^2}=|l-n|\sqrt{1+(l+n)^2}=|l-n|\sqrt{1+4b^2}$$

Сега радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ќе го пресметаме по формулата

$$R=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{4P_{ABC}}=\frac{1}{2}\sqrt{(1+4a^2)(1+4b^2)(1+4c^2)}\ .$$

1375. Да се пресмета вредноста на изразот

$$\operatorname{tg}5^\circ\cdot\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}65^\circ+\operatorname{tg}65^\circ\cdot\operatorname{tg}5^\circ\ .$$

Решение. Со помош на тригонометриски идентитети добиваме

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}65^\circ+\operatorname{tg}65^\circ\operatorname{tg}5^\circ=\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}(90^\circ-25^\circ)+\operatorname{tg}(90^\circ-25^\circ)\operatorname{tg}5^\circ=\\
&=\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{ctg}25^\circ(\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}5^\circ)=\\
&=\frac{\sin5^\circ\sin20^\circ}{\cos5^\circ\cos20^\circ}+\frac{\cos25^\circ}{\sin25^\circ}\left(\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}+\frac{\sin5^\circ}{\cos5^\circ}\right)=\\
&=\frac{\sin5^\circ\sin20^\circ}{\cos5^\circ\cos20^\circ}+\frac{\cos25^\circ}{\sin25^\circ}\frac{\sin20^\circ\cos5^\circ+\sin5^\circ\cos20^\circ}{\cos20^\circ\cos5^\circ}=\\
&=\frac{\sin5^\circ\sin20^\circ}{\cos5^\circ\cos20^\circ}+\frac{\cos25^\circ}{\sin25^\circ}\frac{\sin25^\circ}{\cos20^\circ\cos5^\circ}=\\
&=\frac{\sin5^\circ\sin20^\circ}{\cos5^\circ\cos20^\circ}+\frac{\cos25^\circ}{\cos20^\circ\cos5^\circ}=\frac{\sin5^\circ\sin20^\circ+\cos25^\circ}{\cos5^\circ\cos20^\circ}=\\
&=\frac{\frac{1}{2}(\cos15^\circ-\cos25^\circ)+\cos25^\circ}{\frac{1}{2}(\cos15^\circ+\cos25^\circ)}=\frac{\frac{1}{2}(\cos15^\circ+\cos25^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos15^\circ+\cos25^\circ)}=1
\end{aligned}$$

1376. Нека a,b,c и d се цели броеви. Докажи дека производот

$$P=(a-b)(c-a)(d-a)(d-c)(d-b)(c-b)$$

е делив со 12.

Решение. Од четири природни т.е. цели броеви, два броја можеме да избереме на $\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=6$ начини, и тие се $a\,b, a\,c, a\,d, b\,c, b\,d, c\,d$.

Сега е јасно дека од разликите на броевите во секој пар одвоено е формиран производот P. Од друга страна, бројот 12 можеме да го запишеме во облик $12=2^2\cdot3$. Според тоа, доволно е да докажеме дека $4\,|\,P$ и $3\,|\,P$.

Да забележиме дека два од броевите a,b,c и d при делење со 3 имаат ист остаток(тврдењето следува од Принципот на Дирихле). Според тоа, нивната разлика е делива со 3, и истата е делител на P , т.е. $3\,|\,P$. Навистина, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a=3k+r$ и $b=3p+r$, па тогаш од $b-a\,|\,P$, добиваме дека $3(p-k)\,|\,P$, т.е. $3\,|\,P$.

Од друга страна при делење со 4 на дадените четири броја, се добиваат четири остатоци r_1, r_2, r_3, r_4, т.е. можни се четири остатоци. Тие припаѓаат на множеството $\{0,1,2,3\}$. Сега, можни се два случаи.

Случај 1. Постојат два остатоци кои се еднакви меѓу себе.

Нека два од броевите a,b,c,d се од облик $4k_1+r$ и $4k_2+r$. Тогаш нивната разлика $(4k_1+r)-(4k_2+r)=4(k_1-k_2)$ е делива со 4, т.е. $4\,|\,P$.

Случај 2. Сите четири остатоци се различни меѓу себе.

Со други зборови $r_i \neq r_j$ ако $i \neq j$, $i,j \in \{0,1,2,3\}$. Тогаш еден од броевите е од облик $4k_i+1$ а друг е од облик $4k_j+3$. Нивната разлика е делива со 2. Преостанатите два броја се од облик $4k_l+2$ и $4k_m$ и нивната разлика е исто така делива со 2, а не е делива со 4. Значи, два од множителите на P се деливи со 2 (не се деливи со 4), па нивниот производ е делив со 4.

Од целата претходна дискусија $4\,|\,\mathrm{P}$, па според тоа $12\,|\,P$ што требаше да се докаже.

1377. Квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ има корени во интервалот $[0,1]$. Определи го максимумот на изразот

$$\frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}. \qquad (*)$$

Решение. Нека u и v се корени на равенката $ax^2+bx+c=0$, при што без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $0 \le u \le v \le 1$. Од Виетовите врски имаме

$$u+v=-\frac{b}{a} \text{ и } uv=\frac{c}{a}\text{, т.е. } b=-a(u+v)\text{, } c=auv.$$

Ако замениме во изразот $(*)$, добиваме

$$\frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}=\frac{[a+a(u+v)][2a+a(u+v)]}{a[a+a(u+v)+auv]}=\frac{a(1+u+v)a(2+u+v)}{a^2(1+u+v+uv)}=$$
$$=\frac{(1+u+v)(2+u+v)}{(1+u)(1+v)}=2+\frac{u}{1+v}+\frac{v}{1+u}\le 2+\frac{u}{1+u}+\frac{1}{1+u}=3.$$

Јасно е дека равенство се достигнува кога $u=v=1$ (во тој случај равенката има двоен корен 1, при што таа е од облик $a(x-1)^2=0$).

1378. Да се реши равенката

$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+\ldots+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}=3,$$

во множеството цели броеви.

Решение. Бидејќи $x \neq 0$ (дефинициона област на равенката), ако ја помножиме со x таа го добива обликот

$$(x-1)+(x-2)+(x-3)+\ldots.+3+2+1=3x.$$

Левата страна на равенката е аритметичка прогресија, која е опаѓачка, со прв член $a_1=x-1$, со разлика $d=-1$ и $a_n=1$. Бидејќи $n=\frac{a_n-a_1}{d}+1=\frac{1-x+1}{-1}+1=x-1$, добиваме

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{x-1+1}{2}(x-1)=3x$$

т.е.

$$x^2=7x.$$

Бидејќи $x \neq 0$, решение на равенката е $x = 7$.

1379. Нека a, b, c се произволни реални броеви. Докажи дека барем еден од броевите $(a+b+c)^2 - 9ab,\ (a+b+c)^2 - 9bc,\ (a+b+c)^2 - 9ca$ е ненегативен.

решение: Да претпоставиме спротивно, т.е. дека сите три броја се негативни. Тогаш имаме

$$(a+b+c)^2 - 9ab < 0,\ (a+b+c)^2 - 9bc < 0,\ (a+b+c)^2 - 9ca < 0.$$

Собирајќи ги овие неравенства и со средување добиваме

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca < 0,$$

т.е.

$$\frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] < 0.$$

Но, сума на квадрати на три реални броеви не може да биде негативна, па заклучуваме дека барем еден од разгледуваните три броја е ненегативен, што требаше да се докаже.

1380. Нека a, b, c се цели броеви така да a е парен, b непарен. Докажи дека за секој природен број n, постои природен број x, така да

$$2^n \mid ax^2 + bx + c.$$

Решение. Тврдењето ќе го покажеме со помош на принципот на математичка индукција. За $n = 0$, $x_0 \in \mathbb{N}$, јасно е дека $2^0 \mid ax_0^2 + bx_0 + c$. За $k \geq 0$, нека $x_k \in \mathbb{N}$ е таков да $2^k \mid ax_k^2 + bx_k + c = P(x_k)$. Ќе го избереме $x_{k+1} \in \mathbb{N}$ така да $2^{k+1} \mid P(x_{k+1})$. Ако $2^{k+1} \mid P(x_k)$ тогаш $x_{k+1} = x_k$.

Во спротивно $P(x_k) = 2^k \cdot d$, $d \in \mathbb{Z}$, каде d е непарен број.

Па, $P(x) - P(x_k) = (x - x_k)(a(x + x_k) + b)$, каде $a(x + x_k) + b$ е непарен, за $x \in \mathbb{N}$.

Нека $x_{k+1} = x_k + 2^k \cdot h$, $h \in \mathbb{N}$ е непарен. Оттука

$P(x_{k+1}) = P(x_k) + 2^k h(a(x_{k+1} + x_k) + b) = 2^k(d + h(a(x_{k+1} + x_k) + b))$. Бидејќи $d + h(a(x_{k+1} + x_k) + b)$ е парен, $2^{k+1} \mid P(x_{k+1})$, па согласно принципот на математичка индукција тврдењето важи.