

Дванаесетти тест

28.05.2017 година

1. Докажи го или негирај го тврдењето: За секој природен број $n \geq 2$ остатокот при делењето на 2^{2^n} со $2^n - 1$ е степен на бројот 4.
2. Црвени, сини и зелени деца се наредени на кружница. Кога учителот замолил црвените деца кои имаат зелен сосед да кренат рака, се подигнале 20 раце. Потоа учителот замолил сините деца кои имаат зелен сосед да кренат рака и се подигнале 25 раце. Докажи, дека некое од децата кои подигнале рака има два зелени соседи.
3. На колку начини од квадрат со димензии 2011×2011 може да се отсече квадрат со димензии 11×11 така што делот кој останува да може да се покрие со домина (правоаголници со димензии 1×2)?
4. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I . Кружница со центар во I и радиус $\overline{CI}$ ја сече страната AB во внатрешни точки M и N . Докажи, дека $\angle MCN < 60^\circ$.
5. Во рамнината се дадени $n \geq 3$ точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ такви што никои три не лежат на една права. Точките $M_1, M_2, \dots, M_n$ лежат на отсечките $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$ соодветно, а точките $B_1, B_2, \dots, B_n$ во $\triangle M_nA_1M_1, \triangle M_1A_2M_3, \dots, \triangle M_{n-1}A_nM_n$. Докажи дека
$$\overline{B_1B_2} + \overline{B_2B_3} + \dots + \overline{B_nB_1} \leq \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_nA_1}.$$