ПОДГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ_ОЛИМПИСКИ ТЕМИ

Тема:Функционални равенки, полиноми, низи
Подготвил: Алекса Малчески

1. Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ги задоволува условите:

- $|f(a)-f(b)|\le|a-b|$
- $f(f(f(0)))=0$

Докажи дека $f(0)=0$.

Решение. Заради поедноставување на означувањето, ќе ја користиме ознаката

$$f^k(x)=\underbrace{f(f(\ldots f}_{k-\text{пати}}(x)\ldots)).$$

Со вака воведената ознака, со користење на условите од задачата добиваме

$$|f(0)|=|f(0)-0|\ge|f^2(0)-f(0)|\ge|f^3(0)-f^2(0)|=|f^2(0)|$$

и

$$|f^2(0)|=|f^2(0)-0|\ge|f^3(0)-f(0)|=|f(0)|.$$

Од последните две неравенства добиваме $|f(0)|=|f^2(0)|$.

Сега имаме два случаи.

Случај 1. $f(0)=f^2(0)$.

Тогаш

$$0=f(0)-f^2(0)\ge|f^2(0)-f^3(0)|=|f^2(0)|,$$

па според тоа $f(0)=f^2(0)=0$.

Случај 2. $f(0)=-f^2(0)$.

Тогаш, од условите на задачата имаме

$$|f(0)|=|f(0)-0|\ge|f^2(0)-f(0)|=2|f(0)|.$$

Од последното неравенство едноставно се гледа дека $|f(0)|\le 0$, т.е. $f(0)=0$.

Од случаите 1 и 2 добиваме дека $f(0)=0$.

2. Определи ги сите реални функции $f(x)$ такви што

$$\frac{1}{2}f(xy)+\frac{1}{2}f(xz)-f(x)\cdot f(yz)\ge\frac{1}{4},$$

за секои реални броеви x,y,z.

Решение. Ако во неравенството замениме $x=y=z=0$, со алгебарски трансформации добиваме

$$\left(f(0)\right)^2-f(0)+\frac{1}{4}\le 0$$

$$\left(f(0)-\frac{1}{2}\right)^2\le 0.$$

Од особините на реални броеви добиваме дека $f(0)-\frac{1}{2}=0$, т.е $f(0)=\frac{1}{2}$.

Сега, ако во почетната неравенка избереме $y=z=0$ го добивме неравенството

$$4f(0)-4f(x)f(0)\geq 1.$$

Со алгебарски трансформации и ако го искористиме равенството $f(0)=\frac{1}{2}$, добиваме $f(x)\leq\frac{1}{2}$.

Ако во почетното неравенство замениме $x=y=z=1$, добиваме дека

$$f(1)-f^2(1)\geq\frac{1}{4}$$

$$\left(f(1)-\frac{1}{2}\right)^2\leq 0.$$

Повторно од особините на реални броеви, добиваме дека $f(1)-\frac{1}{2}=0$, т.е $f(1)=\frac{1}{2}$.

Со замена $y=z=1$ во почетната равенка, добиваме дека $f(x)-f(x)f(1)\geq\frac{1}{4}$, и ако го искористиме равенството $f(1)=\frac{1}{2}$, добиваме дека $f(x)\geq\frac{1}{2}$.

Од целата претходна дискусија јасно е дека единствена функција која го задоволува неравенството е $f(x)=\frac{1}{2}$.

3. Определи ги сите реални функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви x и y важи

$$f(xf(y)+x)=xy+f(x).$$

Решение. За $x=1$ имаме $f(f(y)+1)=y+f(1)$. За било кој реален број a, и за реалниот број $y=a-f(1)$ имаме

$$f(f(y)+1)=y+f(1)=a-f(1)+f(1)=a,$$

па според тоа функцијата е **сурјективна**.

Специјално, постои $b\in\mathbb{R}$ таков што $f(b)=-1$.

Нека $c,d\in\mathbb{R}$ се такви што $f(c)=f(d)$. Но тогаш

$$c+f(1)=f(f(c)+1)=f(f(d)+1)=d+f(1),$$

односно $c=d$. Според тоа, f е **инјективна** функција.

За $x=1$ и $y=0$ добиваме

$$f(f(0)+1)=f(1).$$

Бидејќи f е инјективна функција добиваме дека $f(0)+1=1$, т.е. $f(0)=0$.

За $x\neq 0$ определуваме $y=-\frac{f(x)}{x}$. Тогаш

$$f\left(xf(y)+x\right)=x\left(-\frac{f(x)}{x}\right)+f(x)=-f(x)+f(x)=0=f(0),$$

па повторно од инјективноста на f имаме $xf(y)+x=0$, т.е.

$$f(y)=-1$$

$$f\left(-\frac{f(x)}{x}\right)=f(b),$$

$$-\frac{f(x)}{x}=b$$

$$f(x)=-bx,$$

за сите реални броеви $x \neq 0$.

Сега, со замена во почетната равенка, добиваме дека $b^2 = 1$, т.е. $b = \pm 1$, со што ги добиваме функциите $f(x) = -x$ и $f(x) = x$.

Не е тешко да се провери дека истите ја задоволуваат почетната равенка.

4. Определи ги сите функци f, определени на множеството реални броеви, за кои се исполнети неравенствата $f(x) \leq x$ и $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, за секои реални броеви x и y.

Решение. Од неравенството $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, за $x = y = 0$ добиваме

$$f(0) = f(0+0) \leq f(0) + f(0),$$

т.е. $0 \leq f(0)$. Ако пак во $f(x) \leq x$ замениме $x = 0$ добиваме $f(0) \leq 0$. Според тоа, $f(0) = 0$.

Понатаму, за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$0 = f(x + (-x)) \leq f(x) + f(-x) \leq x + (-x) = 0$$
$$f(x) + f(-x) = 0$$
$$f(-x) = -f(x).$$

Од произволноста на реалниот број x добиваме дека $f(x)$ е непарна функција.

Бидејќи за произволен $x \in \mathbb{R}$ е исполнето $f(-x) \leq -x$, т.е. $x \leq -f(-x)$, ако ја искористиме непарноста на функцијата, добиваме

$$x \leq -f(-x) = f(x) \leq x,$$

па според тоа

$$f(x) = x, \text{ за секој } x \in \mathbb{R}.$$

Не е тешко да се докаже дека $f(x) = x$, го задоволува даденото неравенство. Од претходната дискусија непосредна последица е единственоста.

5. За полиномот P кој има степен n, се исполнети равенствата $P(k) = 2^k$ за $k = 0,1,2,...,n$. Определи го $P(n+1)$.

Решение. За било кој природен број r, $0 \leq r \leq n$ полиномот

$$\binom{x}{r} = \frac{x(x-1)(x-2)...(x-r+1)}{r!}$$

е полином од r-ти степен. Ќе го разгледаме полиномот

$$Q(x) = \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + ... + \binom{x}{n},$$

кој според претходната забелешка е полином од n-ти степен. Според Биномната формула, имаме

$$Q(k) = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + ... + \binom{k}{n} = (1+1)^k = 2^k,$$

за секој $k = 0,1,2,...,n$. Според тоа, $P(x) = Q(x)$ за секој $x \in \mathbb{R}$, од каде што добиваме

$$P(n+1) = Q(n+1) = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + ... + \binom{n+1}{n} = 2^{n+1} - 1,$$

што требаше да се определи.

6. Определи ги сите реални функции $f(x)$, такви што за секој реален број x е исполнето равенството

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4 . \qquad (1)$$

Решение. Ако во (1) направиме трансформација $x \to 1-x$, тогаш равенката го добива обликот

$$(1-x)^2 f(1-x) + f[1-(1-x)] = 2(1-x) - (1-x)^4$$

$$(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4 , \qquad (2)$$

за секој реален број x.

Од почетната равенка имаме $f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x)$. Ако замениме во (2), со помош на алгебарски трансформации добиваме

$$f(x)(x^2 - x - 1)(x^2 - x + 1) = (1-x)(1+x^3)(x^2 - x - 1) .$$

Од неравенството $x^2 - x + 1 > 0$, кое е исполнето за секој $x \in \mathbb{R}$ добиваме дека

$$f(x)(x^2 - x - 1) = (1-x^2)(x^2 - x - 1) . \qquad (3)$$

Од равенството (3) непосредно добиваме дека $f(x) = 1 - x^2$, за $x \neq \alpha, \beta$, каде α и β се решенија на равенката $x^2 - x - 1 = 0$. Според Виетовите правила, за α и β се исполнети равенствата $\alpha\beta = -1$ и $\alpha + \beta = 1$. Заменувајќи во равенката (1) добиваме

$$\begin{cases} \alpha^2 f(\alpha) + f(1-\alpha) = 2\alpha - \alpha^4 \\ \beta^2 f(\beta) + f(1-\beta) = 2\beta - \beta^4 \end{cases}, \text{ т.е. } \begin{cases} \alpha^2 f(\alpha) + f(\beta) = 2\alpha - \alpha^4 \\ \beta^2 f(\beta) + f(\alpha) = 2\beta - \beta^4 \end{cases}.$$

Решение на овој систем е $f(\alpha) = k$ и $f(\beta) = 2\alpha - \alpha^4 - \alpha^2 k$, каде k е произволен реален број.

Конечно, решение на (1) е

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{ako } x = \alpha \\ 2\alpha - \alpha^4 - \alpha^2 k & \text{ako } x = \beta \\ 1 - x^2 & \text{ako } x \neq \alpha, \beta \end{cases},$$

каде α и β се решенија на равенката $x^2 - x - 1 = 0$. Од претходната дискусија јасно е дека овие функции се единствените решенија на (1).

7. Нека $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ е функција која ги исполнува следните услови:

- f е строго растечка
- $f(x) > -\dfrac{1}{x}$ за секој реален број $x > 0$
- $f(x) f\left(f(x) + \dfrac{1}{x} \right) = 1$ за секој реален број $x > 0$.

Определи ја вредноста $f(1)$.

Решение. Нека е $f(1) = t$. За $x = 1$, од третата особина која ја задоволува функцијата имаме

$$tf(t+1) = 1 ,$$

па според тоа $t \neq 0$ и $f(t+1) = \dfrac{1}{t}$. Ако замениме $x = t+1$, добиваме

$$f(t+1)f\left(f(t+1)+\frac{1}{t+1}\right)=1,$$

па според тоа

$$f\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}\right)=t=f(1).$$

Бидејќи f е строго монотоно растечка функција, добиваме дека $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}=1$, т.е. бараната вредност за t е решение на равенката $t^2-t-1=0$. Нејзини решенија се $t_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Ако е $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$, тогаш би имале

$$1<t=f(1)<f(1+t)=\frac{1}{t}<1.$$

Заради добиената контрадикција $f(1)=t=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Да забележиме дека $f(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2x}$ е функција која ги задоволува условите од задачата.

8. Дадена е низата реални броеви $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, таква што за секои $m,n\in\mathbb{N}_0, m\geq n\geq 0$ е исполнето равенството

$$a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n}). \qquad (1)$$

Определи го a_{2015}, ако $a_1=1$.

Решение. За $m=n$ имаме $a_{2m}+a_0=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2m})=a_{2m}$, па според тоа $a_0=0$.

Ако во (1) замениме $n=0$, добиваме $a_m+a_m=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_0)$, односно $a_{2m}=4a_m$.

Ако во (1) замениме $m=n+2$, добивме

$$a_{2n+2}+a_2=\frac{1}{2}(a_{2n+4}+a_{2n})=\frac{1}{2}(4a_{n+2}+4a_n)=2a_{n+2}+2a_n. \qquad (2)$$

Но бидејќи $a_{2n+2}=a_{2(n+1)}$, имаме $a_{2n+2}=4a_{n+1}$. Бидејќи $a_2=4a_1=4$, добиваме

$$a_{2n+2}+a_2=4a_{n+1}+4a_1=4(a_{n+1}+1). \qquad (3)$$

Сега, од (2) и (3) добиваме дека

$$2a_{n+2}+2a_n=4(a_{n+1}+1),$$
$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2. \qquad (4)$$

Притоа исполнети се равенствата $a_0=0$ и $a_1=1$. Не е тешко да се провери дека $a_2=4, a_3=9$. Тоа ни дава повод да провериме дали $a_n=n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Тврдењето е точно за $n=0,1,2,3$. Понатаму ќе продолжиме со помош на принципот на математичка индукција. Нека тврдењето е точно за сите природни броеви помали од $n+2$, т.е. $a_n=n^2$ и $a_{n+1}=(n+1)^2$. Тогаш од (4) добиваме

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2=2(n+1)^2-n^2+2=n^2+4n+4=(n+2)^2.$$

Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

Не е тешко да се провери дека низата го задоволува равенството (1). При тоа

$$a_{2015}=2015^2.$$

9. Низата $a_1, a_2, \ldots$ е определен со $a_1 = 2, a_2 = 5$ и $a_{n+2} = (2-n^2)a_{n+1} + (2+n^2)a_n$ за секој $n \geq 1$. Дали постојат природни броеви p, q и r такви што $a_p a_q = a_r$?

Решение. Членови на дадената низа се $2,5,11,8,65,-766,\ldots$ редоследно. Да забележиме дека разликата меѓу било кои два соседни членови на низата е делива со 3. Ќе докажеме повеќе, т.е. доволно е да се докаже дека $a_n \equiv 2 \pmod 3$. Јасно е дека $a_1, a_2 \equiv 2 \pmod 3$ (непосредна проверка). Тврдењето ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција. Нека тврдењето е точно за секој природен број помал од $n+2$, т.е. $a_{n+1}, a_n \equiv 2 \pmod 3$. Тогаш, од особините на конгруенции, имаме

$$a_{n+2} \equiv (2-n^2)\cdot 2 + (2+n^2)\cdot 2 = 8 \equiv 2 \pmod 3.$$

Според принципот на математичка индукција $a_n \equiv 2 \pmod 2$.

Тогаш, за произволни природни броеви p,q,r имаме $a_p a_q \equiv 2\cdot 2 = 4 \equiv 1 \pmod 3$ и $a_r \equiv 2 \pmod 3$. Според тоа, за произволни $p,q,r \in \mathbb{N}$ имаме $a_p \cdot a_q \neq a_r$.

Значи, одговорот е не постојат такви природни броеви.

10. Низата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ е определена со $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, и $a_{n+3}a_n - a_{n+2}a_{n+1} = n!$ за $n \geq 0$. Докажи дека $a_n \in \mathbb{Z}$ за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

Решение. Ќе ја разгледаме низата $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ зададена со $v_0 = 1$, $v_1 = 1$ и $v_n = (n-1)v_{n-2}$ за секој $n \geq 2$. Од самата дефинција на v_n е јасно дека сите членови на низата $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ се цели броеви.

Со помош на принципот на математичка индукција ќе покажеме дека $v_n v_{n+1} = n!$ за секој $n \geq 0$. За $n = 0$ имаме $v_0 v_1 = 1\cdot 1 = 1 = 0!$, т.е. тврдењето е точно. Нека $v_{n-1}v_n = (n-1)!$. Бидејќи $v_{n+1} = n v_{n-1}$, добиваме

$$v_n v_{n+1} = n v_{n-1} v_n = n(n-1)! = n!.$$

Со тоа е докажано дека тврдењето е точно за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

Повторно со индукција ќе покажеме дека $a_n = v_n$. Јасно е дека за $n \in \{0,1,2,\}$ е исполнето равенството $v_n = a_n$. Нека за $n \geq 3$ е исполнето $a_{n-3} = v_{n-3}$, $a_{n-2} = v_{n-2}$, $a_{n-1} = v_{n-1}$. Тогаш $(n-3)! = a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-2}$, па според тоа

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n-3)! + a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-3}} = \frac{(n-3)! + v_{n-1}v_{n-2}}{v_{n-3}} = \\ &= \frac{v_{n-3}v_{n-2} + (n-2)v_{n-3}v_{n-2}}{v_{n-3}} = v_{n-2} + (n-2)v_{n-2} = \\ &= (n-1)v_{n-2} = v_n \end{aligned}$$

Според принципот на математичка индукција, $a_n = v_n$ за секој $n \geq 0$, па според тоа сите членови на низата $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ се цели броеви.