

Шести тест

19.05.2017 година

1. Во целобројна решетка е даден 10×10 квадрат. Единечните отсечки на квадратот се обоени во неколку бои. Познато е дека контурата на секој квадрат со страни на целобројната решетка е обоена најмногу во две бои. (Не е задолжително таков квадрат да се содржи во дадениот.) Определи го максималниот број искористени бои?
2. За едно множество природни броеви X ќе велиме дека е добро, ако за секои $a, b \in X$ точно еден од броевите $a+b$ и $|a-b|$ припаѓа на X (броевите a и b може да бидат еднакви). Определи го максималниот број добри множества кои го содржат бројот 2008.
3. На таблата се запишани неколку ирационални броеви. Познато е дека за секои два броја a и b запишани на таблата, барем еден од броевите $\frac{a}{b+1}$ и $\frac{b}{a+1}$ е рационален. Определи колку нјамногу броеви може да се запишани на таблата.
4. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните BC и AC во точките A_1 и B_1 , соодветно. Правата B_1A_1 ја сече AB во точката X , при што A е меѓу X и B . Определи ги аглиите на $\triangle ABC$, ако $\angle CXB = 90^\circ$ и $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC} \cdot \overline{AC}$.
5. Во квадратна мрежа се дадени два квадрати кои не се сечат и кои се составени од m^2 и n^2 единечни квадратчиња на мрежата, соодветно. Ако $m^2 + n^2 = 2017$, докажи, дека:
а) такви квадрати постојат;
б) единечните квадратчиња на точно еден од двата квадрати може да се обојат во црвена или сина боја така, што секое квадратче има непарен број соседни квадратчиња со иста боја. (Две единечни квадратчиња се соседни, ако имаат барем едно заедничко теме.)