

УЛОГА НА НАСТАВНИКОТ ВО РАБОТАТА СО ТАЛЕНТИРАНИТЕ УЧЕНИЦИ

Цана Наумовска¹, Данче Сивакова², Јованка Вангелова³

Апстракт. Воспитанието и образованието секогаш играле значајна улога во општеството и во животот на човекот. Таа улога особено се потенцира денес, кога современиот човек во знаењата го наоѓа клучот за решавање на многуте егзистенцијални проблеми. Во образовниот систем на една земја работата со талентираниите ученици се смета за многу важна компонента. Се поставува прашање каков е односот кон талентираниите и надарените ученици во училиштата кај нас. Кај нас повеќе присутна е декларативна поддршка на надарените. Повеќе од било кога се јавува потреба за стимулирање на надарените ученици. Стимулирањето на надарените е најдобра инвестиција на едно општество, бидејќи плодовите од тоа ангажирање придонесуваат за негов напредок.

„Сè што е возвишено исто така е тешко, како што е ретко“
Спиноза

1. ВОВЕД

Денес, во современиот свет, развојот на една земја не зависи толку од нејзините физички, технолошки, финансиски и други ресурси, колку од способностите, знаењата, вештините и умењата на кадровскиот потенцијал, посебно од *надарените* и *талентираниите*.

Надарените и талентираниите, според нивните способности, можности и резултати ги надминуваат достигнувањата на просечните. Тоа се најнеопходен и најпосакуван потенцијал на секоја земја, бидејќи го забрзуваат и помагаат целокупниот развој. Се разбира различен е успехот, но и интересот, талентираниите да се задржат во својата средина. Вложувањето во нивниот развој е најрентабилна инвестиција.

Потребата за инвестирање во креативноста станува императив за општествениот прогрес од причини што творештвото претставува генеричка одлика на човекот, а не привилегија на мал број на луѓе.¹

¹ Арнаудова, *Поттикнување и развој на креативното мислење, со техники на дивергентна продукција*, 5

2010 *Mathematics Subject Classification*. 97D60, 97B20

Key words and phrases. mathematical education, standardized testing, interdisciplinary competencies, assessment

Според Полик човекот е единствен кадровски ресурс кој се регенерира динамички, со силата на своето знаење како заеднички израз на човековата моќ.²

Квалитетот во образованието е мултидимензионален концепт кој може да се мери преку различни квантитативни и квалитативни индикатори. Еден од најзначајните индикатори кој директно влијае на квалитетот на образованието е оспособеноста на наставниците да ја вршат својата професија и да одговорот на барањата кои ги поставува современиот тек на живот.

Во организираниот систем за поддршка на надарените ученици, наставникот е само една кадровска компонента кон која треба да се додадат и други субјекти во постигнување на заедничката цел.

Ако училиштето сака да биде организација која учи и се развива мора да ја изрази својата хумана димензија, овозможувајќи им на сите ученици динамика на развој според нивните интелектуални, емоционални, социјални и други потреби и можности. Училиштето и вработените се тие кои му даваат белег на сето тоа, и низ различни активности да им овозможат на учениците да ги развиваат своите максимални можности и способности, со цел адекватно да ги задоволат потребите кои произлегуваат од нивните меѓусебни разлики.

Во овој труд, се разработуваат талентираниите ученици како важна компонента во образовниот систем на секоја земја. Се надевам дека ова согледување ќе овозможи создавање на клима за работа во која се јавува трансформација кај вработениот кој би сакал секогаш да биде дел од решението на некој проблем, вработен кој секогаш има идеја, кој го споделува знаењето, континуирано учи и се усовршува.

2. УЛОГАТА НА НАСТАВНИКОТ ВО РАБОТАТА СО ТАЛЕНТИРАНИТЕ УЧЕНИЦИ

Во стручната литература се сретнуваат голем број на дефиниции за надареноста кои имаат различни теоретски и практични претпоставки. Поголема конфузија се јавува при определување на термините *надареност* и *талант*, како и нивната релација. Во современата литература се јавуваат повеќе дефиниции на оваа сложена и мултидимензионална појава.

За надареноста воопшто зборува Иван Корен според кој: надареноста претставува склоп на особини, врз основа на кои поединецот е способен трајно да постигнува исклучително високи резултати во едно или повеќе подрачја на човековата дејност. Тој склоп на особини го чинат: општи и специфични способности, креативност и сплет бројни карактеристики на личноста и мотивацијата.³

Наспроти надареноста, според Варгович талентот е врзан за способности во една потесна област (математика, танц, музика) и всушност е диспозиција, која

² Полик, *Планирање кадрава и образовања*, цитирано во Кеверески, *Како да ги препознаеме надарените и талентираниите ученици*, 1

³ Арнаудова, *Надарено дете*, 23

треба да се развива со упорна работа.⁴ Разликата помеѓу надареноста и талентот, овде се должи пред сè на степенот на општост и развиеност на способностите кои се наоѓаат во нивната основа. Талентот е врзан за способностите во една потесна област и се сфаќа како разлика која треба да се развива, а надареноста се идентификува врз основа на веќе постигнатите натпросечни резултати.

Поимите надареност и талент се сродни, при што талентот се однесува на надареност во одредена област, а се должи на развиеноста на специфичните способности. Денес, кога се зборува за надареноста, мислиме на оние поединци кои постигнуваат изразито високи резултати, во една или повеќе области од човековата активност, а нивните резултати ги надминуваат границите на т.н. просечно однесување.

Третирањето на надарените ученици во воспитно образовниот процес не е можно да се набљудува независно од улогата на наставникот. Во литературата се наведуваат неколку улоги на наставникот кој се јавува како носител на работата со надарените ученици:

➤ **Наставникот - создавач на атмосфера погодна за развој на надарените;**

Наставникот во воспитно-образовниот процес има значајна улога како креатор на атмосфера која поволно влијае врз развојот на надареноста, т.е. не го спречува појавувањето на надареноста туку ги стимулира разните облици на надареност.

➤ **Наставникот - родител;**

Поставувањето на наставникот како родител на надарените ученици е битна улога која придонесува да се воспостават емоционални, социјални и мотивациони елементи кои се значајни во процесот на препознавање, идентификација и следење на развојот на надарените. Наставникот - родител ја одржува топлата емоционална семејна клима која го поттикнува интересот на детето за одделни подрачја.

➤ **Наставникот - едукатор;**

Улогата на наставникот - едукатор ориентирана е кон образованието на надарените ученици, при што наставникот ја реализира работата по однапред испланирана програма, која што *ја составил сам, учествувал* во нејзино составување или само ја *применува*.

➤ **Наставникот - ментор;**

Во работата со надарените ученици улогата на наставникот - ментор е неопходност. Негова основна задача е да ги води надарените ученици во совладување на сложените вештини за усвојување на сè поапстрактни облици на репрезентирање на знаењето, со што се постигнува поголемо чувство за успешност кај учениците кое предизвикува поголема внатрешна мотивација. Квалитетниот наставник - ментор обезбедува независност на надарените ученици и ги подготвува за самостојна творечка работа. Тој е во можност да го следи, контролира и поддржува емотивниот развој. Влијае на поттикнување и развој на внатрешната мотивација на надарените ученици.

⁴ Исто, 24

Улогите на наставникот во третирање на надарените ученици не можеме да ги набљудуваме изолирано една од друга. Тие содржат заеднички елементи и меѓусебно се преплетуваат, без оглед на своите специфичности и ограничувања.

За успешна реализација на работата со надарените ученици наставната практика ја истакнува потребата за определување на неопходните професионални знаења и вештини кои треба да ги поседува наставникот. Наставниците, за да бидат ефикасни во работата со надарените ученици мора постојано да ги развиваат своите компетенции. Компетенциите на наставниците за работа со надарените ученици во класери ги претставил Пловман:

- Препознавање на надарените;
- Знаење за природата и потребите на надарените ученици;
- Искористување на податоците од идентификацијата во планирање на индивидуалната програма за надарените ученици;
- Познавање на соодветни програмски модели за нивна поддршка;
- Знаење и вештини во користење на групна динамика;
- Интерес и обврска за постојано развивање на сопствената ефективност;
- Познавање на законите и правните норми поврзани со грижата на надарените;
- Знаење и вештини за советување на надарените студенти и нивните родители;
- Знаење за современите трендови и извори на воспитанието и образование на надарените.⁵

Критериумите за компетентност на наставникот се однесуваат на потребата наставникот да ги препознава особините на надарените ученици, нивните потреби и начини како да ја зголеми сопствената подготовка во наставниот процес за работа со нив. Во овие критериуми се содржани и познавањето на ефикасните програмски модели кои треба да се практикуваат со работа на надарените. Во организираниот систем за поддршка на надарените ученици, наставникот е само една кадровска компонета кон која треба да се додадат и други субјекти во постигнување на заедничката цел.

Акцентирана е потребата наставникот да ги следи современите трендови во теоријата и во практиката за работа со надарените ученици со што би ја зголемил сопствената ефикасност. Ако добрите наставници се најдобриот извор во создавање услови за надарените и талентираниите, потребно е на едукацијата на наставниците за работа со оваа категорија да се посвети поголемо внимание. Во програмите за нивна обука треба да се посвети внимание да ги разберат потребите на надарените и да се обучат како да ги едуцираат. Тоа може да се постигне преку нивно доусовршување, во рамките на педагошко-психолошко образование, едукација преку семинари, перманентно образование преку користење книги, брошури, прирачници и други извори.

⁵ Кеверески, *Како да ги препознаеме надарените и талентираниите ученици*, 113

Познато е дека за добар наставник секое дете е различно, а за лошиот сите деца се исти. Успешниот наставник ги познава индивидуалните способности и особености на секој свој ученик и тежи тие способности да ги развие до максимум.

Се поставува прашање каков е односот кон талентираните и надарените ученици во училиштата кај нас.

„Одливот на умови“ е само еден показател на проблемот на надареноста кај нас. Во светски рамки, па и во нашето поблиско опкружување, сериозно веќе подолго време се занимаваат со оваа проблематика. И кај нас, има пионерски обиди и иницијативи за успешно организирање и работа со надарените.

Поаѓајќи од актуелноста на овие прашања во овој труд ќе обработам две констатации, анализирајќи претходно собрани факти за потребите на магистерскиот труд *Дизајнирање на обуките во образованието во функција на унапредување на наставата*.⁶

Со истражувањето за *Дизајнирање на обуките во образованието во функција на унапредување на наставата* беа опфатени петнаесет основни училишта од седум градови и три села, и осумнаесет средни училишта од осум градови на територијата на Република Македонија. Популацијата на ова истражување ја сочинуваат 328 испитаници: директори, помошници директори, стручни соработници и наставници.

Врз база на добиените резултати од спроведената анкета и изработената квантитативна анализа изработена е компаративна анализа на просеците по категории, што претставува добра основа функционално да се спроведе потребната квалитативна анализа.

Во табела 1 е даден споредбен приказ од просеците по категории:

Од табелата за споредување на просеци по одредени категории на испитаници, може да се констатира дека не постојат значајни разлики во ставовите и мислењата на испитаниците, што сведочи за објективност на оценката. Совпаѓањето на ставовите и мислењето на: директорите, помошник директорите, наставниците и стручните соработници ни дава за право да се спроведе квалитативната анализа само на податоците и просеците на сите испитаници вкупно.

Ако училиштето сака да биде организација која учи и се развива мора да ја изрази својата хумана димензија, овозможувајќи им на сите ученици динамика на развој според нивните интелектуални, емоционални, социјални и други потреби и можности. Училиштето и вработените се тие кои му даваат белег на сето тоа, и низ различни активности да им овозможат на учениците да ги развиваат своите максимални можности и способности, со цел адекватно да ги задоволат потребите кои произлегуваат од нивните меѓусебни разлики.

Дека сето ова е важно, потврдува и мислењето на испитаниците дадено во однос на констатацијата:

⁶ Наумовска, *Дизајнирање на обуките во образованието во функција на унапредување на наставата*, 82-200

„Една од глобалните причини за неуспех на надарените е и училиштето, бидејќи вниманието во воспитно-образовниот процес е насочено, претежно, кон просечниот ученик.“

Табела 1. Компаративен приказ од просеци по категории

Ред. број	Констатација	Просек 1	Просек 2	Просек 3	Просек 4	Просек 5	Просек
1.	Една од глобалните причини за неуспех на надарените е и училиштето, бидејќи вниманието во воспитно-образовниот процес е насочено, претежно, кон просечниот ученик.	3,03	3,08	3,02	3,07	3,06	3,05
2.	Во училиштата во Р. Македонија постои доволно операционализиран систем на мерки и постапки кои се насочени кон стимулирање на развојот на надарените ученици.	2,39	2,20	2,07	2,32	2,28	2,25
Просеците по категории на испитаниците се: Просек 1 – просек на резултатите од истражувањето за испитаниците од основните училишта Просек 2 – просек на резултатите од истражувањето за испитаниците од средните училишта; Просек 3 – просек на резултатите од истражувањето за директори и помошници директори од основните и средните училишта; Просек 4 – просек на резултатите од истражувањето за наставници и стручни соработници од основните и средните училишта; Просек 5 – просек на резултатите од истражувањето за испитаниците од основните и средните училишта.							

Досегашните согледувања на карактеристиките на воспитно-образовниот систем, состојбите и условите во кои се наоѓаат надарените ученици во училиштата, укажуваат дека не постои доволно операционализиран систем на мерки насочени кон стимулирање на нивниот развој. Многу работи не одат во прилог на надарените ученици, меѓу кои: преголемите паралелки, униформните наставни планови и програми, недоволно развиена индивидуална работа, неможноста за избор на соодветен наставник, преферирање на меморативно-репродуктивниот, наместо мисловно-креативниот начин на учење и др.

Изработка на глобална стратегија во третманот на надареноста, со крајна цел задржување и искористување на тие потенцијали, е неопходна, што покажува и мислењето на испитаниците во однос на констатацијата:

„Во училиштата во Р. Македонија постои доволно операционализиран систем на мерки и постапки кои се насочени кон стимулирање на развојот на надарените ученици.“

Во образовниот систем на една земја работата со талентираните ученици се смета за многу важна компонента. Стимулирањето на надарените е најдобра инве-

стиција на едно општество, бидејќи плодовите од тоа ангажирање придонесуваат за негов напредок. Кај нас повеќе е присутна декларативна поддршка на надарените. Најзастапена форма на работа е додатната настава и слободните активности, но за жал и тие не се доволно реализирани. Во предвид треба да се земе и немотивираноста на наставниците за дополнително ангажирање без надомест, лошите просторни и материјални услови во училиштата и др.

Ако сакаме да бидеме во чекор со светските трендови во третманот со надарените ученици потребно е поголемо залагање на сите компетентни субјекти во образовниот процес, најнапред во насока на изработка на соодветна методологија за идентификација, а потоа едукација на наставниот кадар и стручните служби во училиштето. Избор на соодветен наставник за работа со надарените ученици според утврдени критериуми е неопходен, бидејќи работи со ученици со индивидуални разлики, кои се манифестираат низ интелектуалното, социјалното и емоционалното однесување.

Најголемата вредност на училишниот систем е силата на наставниците. Најважна инвестиција која што можат да ја направат директорите, е да обезбедат наставниците континуирано да се усовршуваат. Континуираното и квалитетното усовршување е од суштинска важност за постигнување на високи стандарди за учење на секој ученик. Институциите треба да се ориентираат кон мотивирање на наставниците за квалитет и ефикасност во образованието. Поради тоа, потребно е создавање на институционални и материјални капацитети за усовршување на наставниците и стручните служби.

Сите промени и воведување на најразлични проекти не се добри и не носат добри резултати сами по себе, туку ќе ни ги дадат посакуваните резултати само ако добро се осмислат, планираат и спроведат според поставени стандарди и критериуми.

Во нашата земја потребно е да се изработи национална стратегија во која ќе се операционализира третманот на надарените. Исто така, треба да се создаде структура за поддршка на наставникот и за кординирање на активностите на ниво на држава. Воспоставување на систем за следење и вреднување на работата на наставникот е неопходен, не како механизам за негово казнување, туку за подобрување на поставените стандарди и критериуми.

Прашањето за воспоставување на адекватен третман на надарените ученици треба да се постави на почетокот на дневниот ред на општествениот интерес. Да ги искористиме сите општествени, институционални и други механизми со што надарените ќе ги задржиме во нашата земја.

Согледувајќи ги долгорочните придобивки од квалитетен и модерен образовен систем, инвестирањето во образованието претставува стратешки приоритет и го определува најсигурниот пат за создавање на силни индивидуи и силна држава.

Литература

- [1] Арнаудова, В, Ачковска-Лешковска, Е. *Надарено дете*. Скопје:Филозофски факултет, 2000.
- [2] Кеверески, Јб. *Како да ги препознаеме надарените и талентираниите ученици*. Скопје: Просветен работник, 2000.
- [3] Наумовска, Ц. *Дизајнирање на обуките во образованието во функција на унапредување на наставата*, 2013.
- [4] Сивакова, Д. *Можностите и примената на информатичко комуникациската технологија во наставата по математика во основното образование*, 2012.
- [5] Dejić, A. Božin, M. Gojkov, G. Josifović, D. Lelea, J. Magda, I. Negru, A. Paser, V. Stojanović, и A. Sturza-Miletić. *Daroviti i šta sa njima*. Vršac: Viša škola za obrazovanje vaspitača, 2003.
- [6] R. Malčeski, *Methodology of the mathematical education*, FON University, Skopje, 2010 (in Macedonian)
- [7] Малчески, Р., Малческа, Ц. *Работа со надарени ученици*, ФОН универзитет, Скопје, 2010

¹⁾ СОТУ Ѓорѓи Наумов, Битола, Р. Македонија

E-mail address: canka02@yahoo.com

²⁾ Педагошки факултет, Универзитет Св. Климент Охридски, Битола, Р. Македонија

E-mail address: d_sivakova@yahoo.com

³⁾ О.У. Стив Наумов, Битола, Р. Македонија

E-mail address: jovankavangelova@yahoo.com

GEOTHNK AND MATHEMATICS

Nataliya Pavlova¹, Dragomir Marchev²

Abstract. The basic concepts and ideas of a new European project called GEOTHNK are presented in the paper. It is focused to education in natural science and mathematics with students of all ages. The main aim of this project is to enhance spatial thinking through an innovative ICT-based approach and an open, collaborative educational environment. The idea is to offer a methodological approach which allows the interdisciplinary organization and semantic linkage of knowledge.

1. INTRODUCTION

The efforts in the direction of developing spatial thinking has long been aiming at school education but the development of the new technologies poses new challenges to the education. The popular and easy to access applications for Smart phones, software as Google Earth and other attractive light technologies for students could successfully be used for arising their interest in mathematics. There are a number of studies in this direction such as Kéyah Math Project [11] and the possibilities pointed out in State of the Art [5]. This paper aims at short presentation of GEOTHNK project Figure 1 and its relation to teaching mathematics.



Figure 1: The GeoThnk Logo

2. AIMS AND METHODOLOGY

According to [5]**Error! Reference source not found.** the GEOTHNK approach goes beyond the provision and organization of resources. It proposes the development of an innovative learning and teaching environment for the semantic linkage of geospatial concepts, representation tools, and reasoning processes in between and across other domains that may also provide relevant and meaningful contexts (e.g., Environment, Earth Sciences, Social Sciences, etc.). This environment will engage users

2010 *Mathematics Subject Classification.* 97 Mathematics Education

Key words and phrases. mathematics, geospatial concepts, geometry concepts, didactic scenario, project, educational platform

in more critical, inquiry-based teaching methods, where scientific (and in our case geographical) concepts and ideas are not taught in isolation but in a way that emphasizes their correlation and relevance.

The main aim of this project is to enhance spatial thinking through an innovative ICT-based approach and an open, collaborative educational environment. The idea is to offer a methodological approach which allows the interdisciplinary organization and semantic linkage of knowledge.

These will be achieved through the realization of the following objectives [4], [5]:

- Development of a pedagogical framework that will introduce essential strategies for the development of an innovative learning approach towards effective spatial thinking.
- Design of learning pathways based on the proposed framework that will focus on the organisation of a core set of learning components (concepts, representation tools, reasoning processes, and learning activities) according to the specific needs and characteristics of each target group.
- Development of an open, collaborative educational environment that will enable:
 - a) access to various thematic resources and to learning pathways through an effective search mechanism,
 - b) creation of new learning pathways through an easy to use authoring environment that will support both the creation and the organization of learning components,
 - c) semantic linkage of the learning components and relative information for the enrichment of learning pathways and
 - d) formulation of a rich semantic network which will provide a dynamic structure facilitating knowledge visualization and exploration.

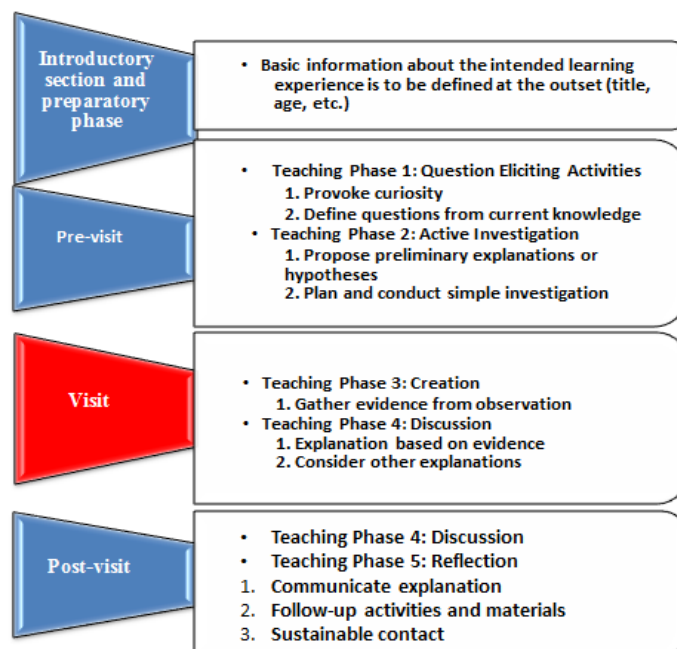


Figure 2: The educational pathway pattern for students

The methodology consists of three main lines of action:

- the pedagogical approach - development of a series of learning pathways based on GEOTHNK framework. An example is given in **Error! Reference source not found.**
- the technological development - development of an educational platform based on Figure 3 [10] and organization of network workflow Figure 4 [6].
- the pilots' implementation along with the necessary supporting mechanisms.

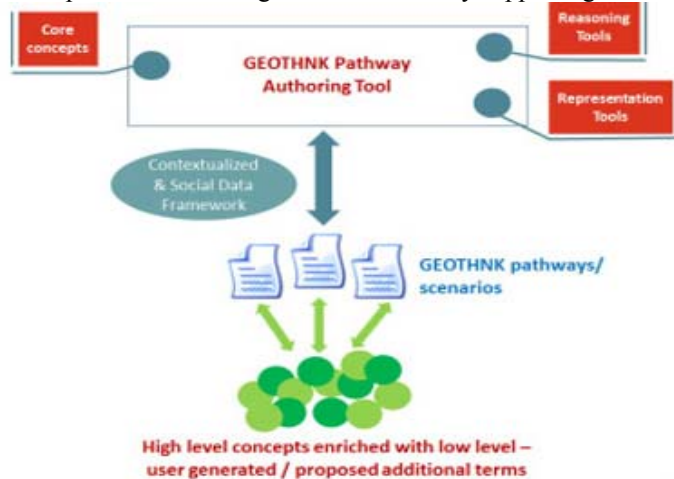


Figure 3: The Geothnk educational platform

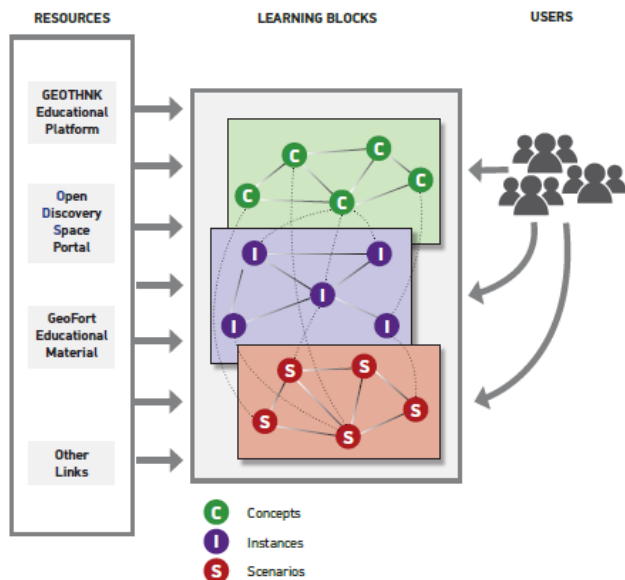


Figure 4: Geothnk workflow

The consortium of the project consists of eight organizations from six counties. The official website of the project is <http://www.geothnk.eu/>. More information could be found in [4], [5], [6].

3. MATHEMATICS AND GEOTHNK

Developing spatial thinking is one of the main tasks in mathematics. However, graduates today have a lot of difficulties working with 3D objects. On the other hand, they have no problems finding their location in unknown area using suitable applications on their Smart phones. It raises the question whether putting them in environment comfortable for them would not improve the mathematical aspect of their spatial thinking. There are already good practices in this respect as for instance, Kéyah Math Project [11].

In our work we are going to use the following definitions for the varieties of spatial thinking.

Spatial thinking is thinking that finds meaning in the shape, size, orientation, location, direction or trajectory, of objects, processes or phenomena, or the relative positions in space of multiple objects, processes or phenomena. Spatial thinking uses the properties of space as a vehicle for structuring problems, for finding answers, and for expressing solutions [8].

According to [9] Geospatial intelligence (GEOINT), is intelligence about the human activity on Earth derived from the exploitation and analysis of imagery and geospatial information that describes, assesses, and visually depicts physical features and geographically referenced activities on the Earth. GEOINT consists of imagery, imagery intelligence and geospatial information.

One of the main aims of education is to give knowledge and abilities applicable in practice. Present-day students would not study if they are not convinced in the necessity of the acquired knowledge. The majority of students face problems with mathematics irrespective of its practical importance. For the Net-generation it is a necessity to see right away the practical use of what they have learned and the technologies for finding faster the solution they are looking for. This is the specific objective of the educational pattern designed by Geothnk project. Figure 5 shows the interrelations between spatial and geospatial thinking and the benefits of the “VISIT” for their development.

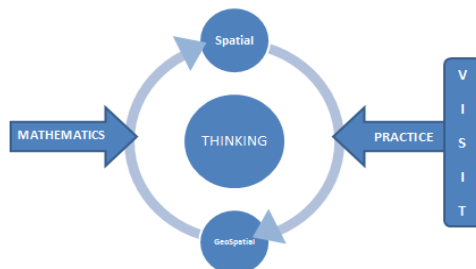


Figure 5 Relation between spatial and geospatial thinking in school

The relation between geometry/ stereometry and geography is obvious. Yet, it is interesting to compare the core concepts in the two trends.

Some core concepts of geospatial thinking suggested by Gersmehl and Gersmehl [1], Golledge et al.[2], and Janelle and Goodchild [3] are shown in Table 1 which is offered in [7].

Table 1: Core concepts of spatial thinking

Gersmehl & Gersmehl (2007)	Golledge et al. (2008)	Janelle & Goodchild (2009)
Condition	Identity	Objects and Fields
Location	Location	Location
Connection	Connectivity	Network
	Distance	Distance
	Scale	Scale
Comparison	Pattern Matching	
Aura	Buffer	
Region	Adjacency, Classification	Neighborhood and Region
Hierarchy		
Transition	Gradient, Profile	
Analogy		
	Coordinate	
Pattern	Pattern, Arrangement, Distribution, Order, Sequence	
Spatial Association	Spatial Association, Overlay/Dissolve, Interpolation	Spatial dependence, Spatial heterogeneity
	Projection, Transformation	

On the other hand, the core concepts in stereometry are **point**, **straight line** and **plane**. The key competences of the students are:

- To recognize angles in space;
- To recognize planes and sections.
- To recognize the mutual location of points, straight lines and planes irrespective of the perspective.
- To be able to design objects.
- To recognize plane tasks as a component of a stereometrical task.

There is a direct relation between these concepts, for instance:

- Location $\leftrightarrow$ Point
- Connection $\leftrightarrow$ Segment, side, edge, straight line
- Region $\leftrightarrow$ Plane, section.

4. CONCLUSION

In teaching mathematics there are a number of educational patterns based on geospatial thinking that are used for a long time. For example, seeking treasure through

a secret map which requires solving given mathematical problems or games as mathematical orientation, etc. Some interesting instances based on information and communication technologies are suggested at <http://keyah.asu.edu/> [11].

As a conclusion we should state that it is important to create educational materials helping teachers in their work. Geothnk unites already created materials in a common network that can be used free of charge by everyone but it is important for the teacher community to enrich the resources by new quality educational pathway patterns developed not only in English but in their own languages, so that the teachers of their own countries can use the materials while teaching.

Acknowledgements:

The presented paper is partially funded by the GEOTNK project 543451-LLP-1-2013-1-GR-KA3-KA3MP and project № RD-08-235/13.03.2014 by paragraph Scientific Research of Konstantin Preslavsky University of Shumen.

References

- [1] Gersmehl, P. J., C. A. Gersmehl. *Spatial thinking by young children: Neurologic evidence for early development and "educability"*, Journal of Geography 106, (2007), 181-191.
- [2] Golledge, R. G., M. Marsh., S. Battersby. *Matching geospatial concepts with geographic educational needs. Geographical Research* 46(1), (2008), 85-98
- [3] Janelle, D. G., and Goodchild, M. F. *Location across disciplines: Reflection on the CSISS experience. In Geospatial technology and the role of location in science*, eds. H. J. Scholten, N. van Manen, and R. v.d. Velde, Dordrecht, Springer, (2009), 15-29
- [4] Kavouras, M. , *Project proposal 2013, "Semantic pathways for building a spatially-thinking society"*, (2013)
- [5] Kavouras, M. , Sotiriou, S., Baglatzi, A., Darra, N, Kokla, M., Lazoudis, A, Pastra, K., Tomai, E., *Semantic Pathways for Geospatial Thinking, EIF/LINQ 2014: Changing the trajectory – Quality for Opening up Education* ,(2014)
- [6] Kavouras, M., Kokla, M., Tomai, E., Darra, N, Baglatzi, A., Sotiriou, S., Lazoudis, A, *The GEOTHNK platform: connecting spatial thinking to secondary education* (2014)
- [7] Lee, J., Bednarz , R., *Components of spatial thinking: Evidence from a spatial thinking ability test*, Journal of Geography, Volume: 111, Issue: 1, (2012),15-26
- [8] National Research Council, *Learning to Think Spatially*, Washington, D.C.: National Academies Press, (2006)
- [9] <http://codes.lp.findlaw.com/uscode/10/A/I/22/IV/467>, 25.7.2014
- [10] <http://www.geothnk.eu>, 29.9.2014
- [11] <http://keyah.asu.edu/>, , 25.7.2014

¹⁾ Faculty of Mathematics and Informatics, Konstantin Preslavsky University of Shumen, Bulgaria

E-mail address: Natalia_1@abv.bg

²⁾ Faculty of Natural Science, Konstantin Preslavsky University of Shumen, Bulgaria

E-mail address: d.marchev@shu-bg.net

ПРИМЕНА НА WEB 2.0 АЛАТКИ ВО НАСТАВАТА ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

Надица Пиперевска Цветковска¹, Данијела Ѓорѓевиќ²

Абстракт. Со проектот од Министерството за образование и наука "Компјутер за секое дете", поголем број од училиштата во Македонија се опремени со современи компјутери кои се поврзани на интернет, па наставниците и учениците се обучуваат за користење на компјутерите во наставата. Како резултат на ова авторите на овој труд би сакале да споделат некои Web 2.0 алатки во наставата кои се едни од најдобрите со кои работиме ние, нашите ученици и нашите професори. Web 2.0 овозможува релевантни можности за учење во наставата. Овие квалитетни и лесно достапни апликации треба да им помогнат на наставниците полесно да ги објаснат поимите, а учениците успешно да го совладуваат материјалот. Наставниците може да ги ревитализираат нивните лекции со интегрирање на овие наставни алатки во нивните наставни планови.

1. ВОВЕД

Едукаторите се соочуваат со многу предизвици денес. Тие мора да се прилагодат на генерација на студенти кои пораснале со користење на интернет.

Ние живееме во глобална, економија базирана на знаење. Според заедничката суштина, државните стандарди, студентите мора да совладуваат вештини од витално значење за 21 век за да бидат подготвени за на факултет и создавање на кариера. Денешните ученици треба да ги поседуваат следниве вештини.

- креативност и иновативност
- комуникација и соработка
- истражување и
- критичко размислување

2. WEB 2.0

Под терминот Web 2.0 се мисли на развојот на web по 2000 година, кога дошло до промени во начинот на користење на web-от. Првично интернетот било место само за лоцирање на информации кои корисниците можеле само да ги читаат. Денес интернетот се развива во платформа која преку низа алатки на корисниците им овозможува да учествуваат во креирање на web-содржини од различен вид и директна размена на информации со други корисници. Корисниците можат да користат

2010 *Mathematics Subject Classification*. Primary: 97P50, 97Q20, Secondary: 97R20

Key words and phrases. Web 2.0 teaching tools are some of the best-of-the-best. Teachers can revitalize their lessons by integrating these instructional technology tools into their teaching

апликации преку својот веб-прелистувач, корисниците се тие на кои податоците им припаѓаат и кои имаат контрола врз нив. Структурата на web-от ги поттикнува корисниците да учествуваат во креирање на web-содржини или апликации. Отвореност, слобода, колективна интелигенција нуди употребата на Web 2.0.

Табела 1: Web 2.0 во наставата

Реден број	Web 2.0 во наставата овозможува
1	Иновативен пристап
2	Поголема мотивација
3	Развива критичко размислување
4	Поттикнува соработка и тимска работа
5	Поттикнува креативност и создавање на сопствени образовни содржини

3. ПРИМЕНА НА WEB 2.0 АЛАТИ ВО НАСТАВАТА

Web 2.0 алатките се:

- секогаш достапни
- бесплатни
- едноставни за користење
- не е потребна инсталација

Во продолжение ќе се обидеме да ги групираме web 2.0 алатките во неколку категории, меѓутоа не постои строга поделба па некои алатки можат да се распределат во повеќе категории.

Прва категорија: блог, вики, сајт – наш простор на веб

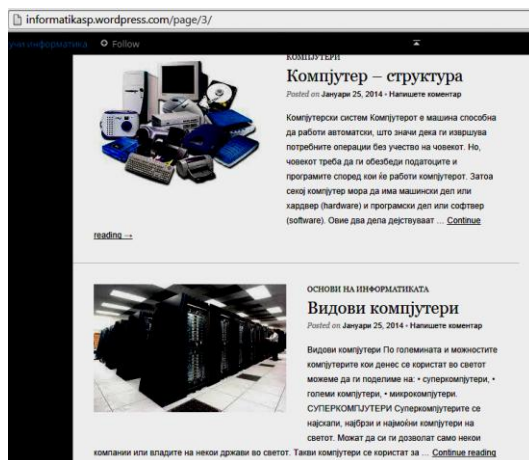
Со овие алатки секој наставник може да има свој простор на Интернет. Одговор на прашањето која од овие алатки треба да се користи не е едноставен. Најдобро е да се испитаат сите можности и да се најде најдобро решение според потребите на секој наставник. Еве неколку начини на користење на овие алатки:

Пример 1. Дијаграмот е направен со алатката Dijagram.ly

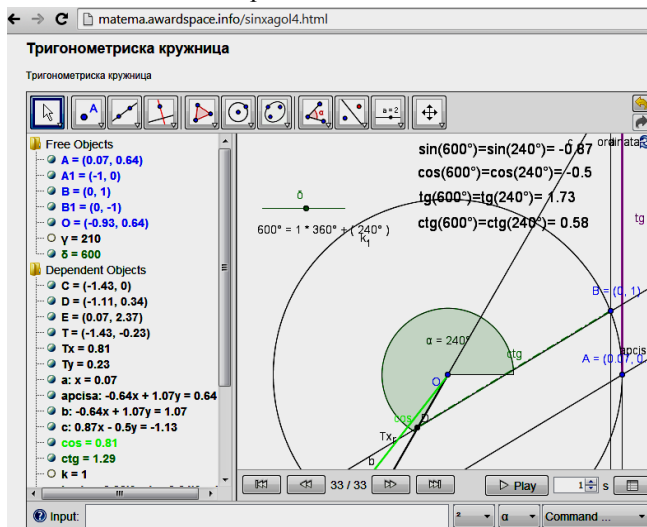


Линк: <http://vebciklopedija.weebly.com/1041108310861075-1080-1074108010821080.html>

Пример 2. Блог за информатика на Георгина Димова

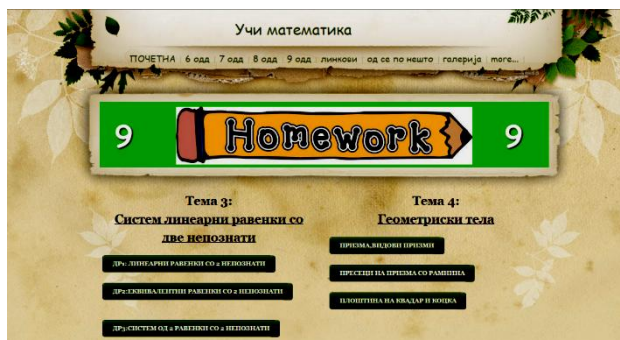


Пример 3. Блог за математика на Зоран Филов



линк: <http://matema.awardspace.info>

Пример 4. Сајт за математика на Снеже Златковска



Втора категорија: Социјални мрежи

Социјалните мрежи наоѓаат голема примена во наставата. Тие овозможуваат поврзување и соработка меѓу учениците и професорите, размена на искуства и информации.

Ја претставуваме платформата Edmodo.com. Пристап до мрежата имаат само регистрирани корисници поради тоа што Edmodo е безбедна социјална мрежа и за учениците од пониските класови.

Edmodo е безбеден и брз начин на соработка на учениците во паралелката. Обезбедува платформа за размена на идеи, размена на содржини, полесен пристап до домашните задачи, оценките и известувањата. Целта на Edmodo е да им се помогне на наставниците да ја искористат моќта на социјалните медиуми и да ја приспособат на училиницата за секојдневно учење.

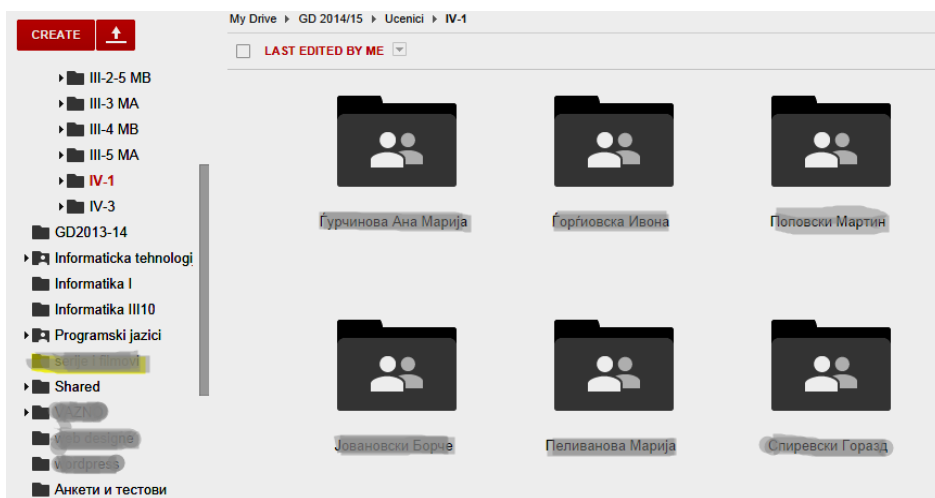
Трета категорија: Делење, соработка

Web алатките како што се Youtube, Slide Share, Drop Box и други таканаречени „облачиња“ овозможуваат споделување на материјали помеѓу наставниците и учениците, достапност на материјалите и симултано уредување од страна на повеќе автори.

Најголемите Интернет компании даваат **бесплатен простор на своите сервери** (најчесто **5GB**) на кои корисниците можат да ги чуваат и организираат своите податоци и, доколку сакаат, да ги споделуваат со други.

Најпознатите облачиња се Google Drive (drive.google.com), Sky Drive (skydrive.live.com) на Microsoft, DropBox (www.dropbox.com), iCloud на Apple, а во поново време и Cloud Drive на најголемата интернет продавница Amazon. Во овие облачиња можеме да **поставуваме документи, слики и други датотеки, да ги организираме во фолдери, определуваме дали ќе бидат јавни или приватни, со кого ќе ги споделиме** итн.

Примена во наставата ќе прикажеме преку следните примери:



Google Drive (drive.google.com) е искористен како место каде учениците оставаат свои домашни задачи, проекти и слично. Секој ученик има своја папка за која тој одлучува со кого ќе ја сподели. Наставникот има контрола врз сите папки и документи.

Компанијата Google нуди и on-line изработка на документи (docs.google.com) на кои истовремено може да работат повеќе ученици. Како пример ја наведуваме збирката на задачи во C++ изработена од учениците од четврта година ПМА насока во СУГС „Георги Димитров“, ментор Данијела Ѓорѓевиќ.

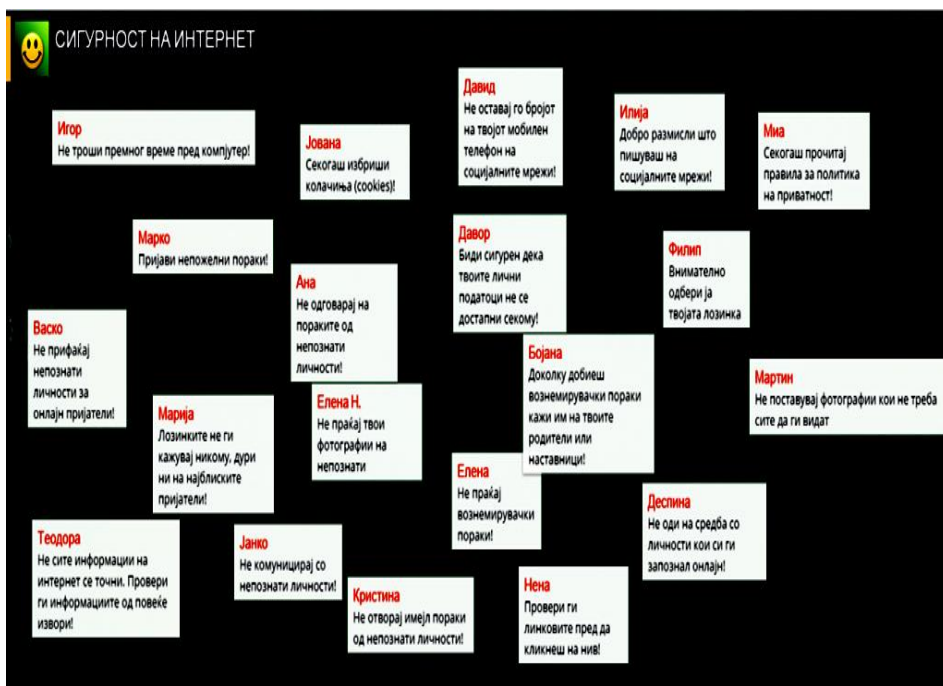
Линк: <https://docs.google.com/document/d/1iaRk8kpDV8hznzQIE3Yoxbw3nb4F-Gqkl38iOh4qqv8M/edit#heading=h.g3p15jsmoj03>

Документите исто можат да се споделат јавно, со луѓе кои имаат линк или да бидат приватни.

На сајтот slideshare.net наставниците и учениците можат да оставаат свои презентации, кои исто така можат да се споделуваат со други корисници.

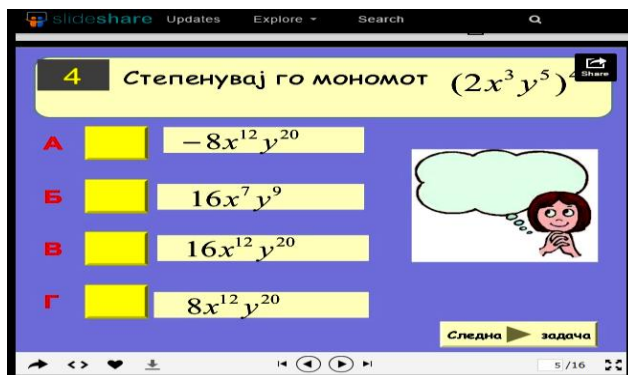
Wallwisher (padlet.com) апликацијата можете да ја користите како огласна табла, место за белешки, простор за заедничка работа, место за собирање на податоци нпр. потреби и желби на ученици, за изработка на домашни задачи или за реализација на интересни активности со учениците.

Пример 5. Сигурност на Интернет, изработено од учениците во СУГС „Георги Димитров“, ментор Данијела Ѓорѓевиќ.



Линк: http://padlet.com/dani_djordjevi1/g9iwuobrgc

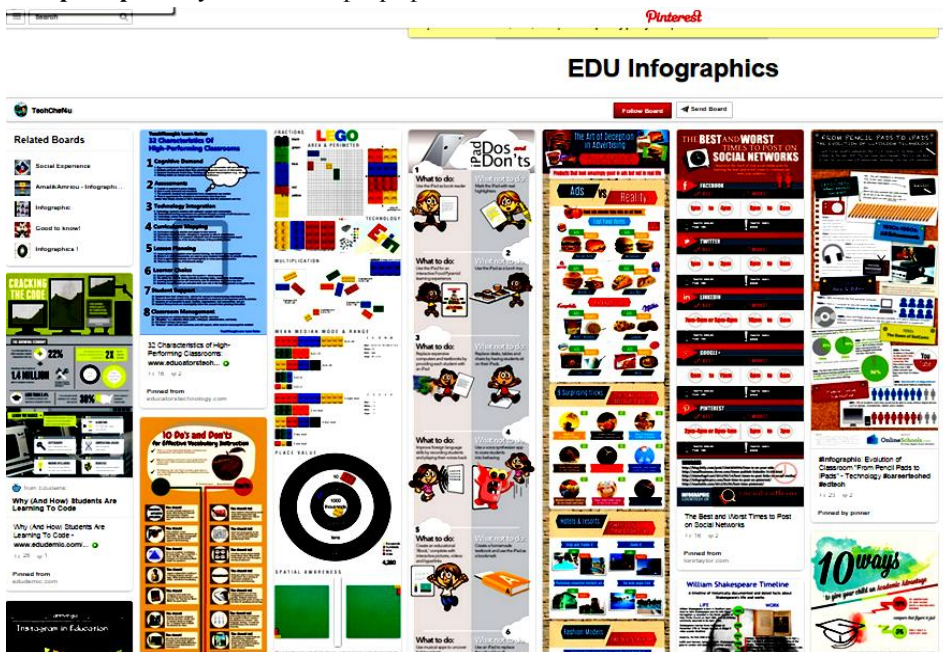
Пример 6. Презентација и квиз за мономи и полиноми на колешката Снеж Златковска.



Линк: <http://www.slideshare.net/sneze1/ss15464762?ref=http://ucimatematika.weebly.com/1058107710891090108610741080-8-108610761076.html>

Pinterest (www.pinterest.com) е апликација во која можете да направите колекции од едукативни материјали или колекција од сајтови.

Пример 7. Едукативни инфографици

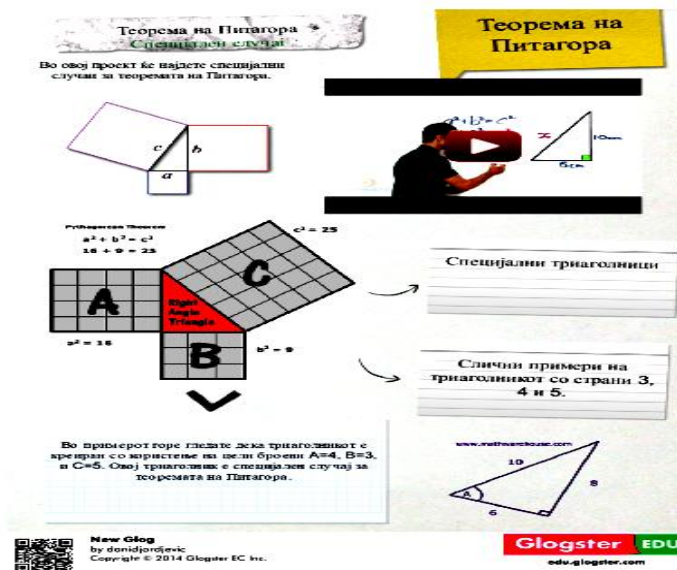


Четврта категорија: Презентации

Веб алатките за презентации овозможуваат изработка и делење на постери, анимации, стрипови, презентации, видео-материјали, временски ленти, мисловни мапи...

Glogster (glogster.com) е програма за изработка на интерактивни дигитални плакати и постери на едноставен и интересен начин. Во изработка на дигиталните плакати се користи текст, слики, линкови, аудио и видео записи. Со Glogster класичните постери изработени на хамер (кои порано или подоцна ќе завршат во отпад) ги заменуваме со мултимедијални постери кои можат да се споделуваат преку социјални мрежи или да се вградата во веб сајт. На овој начин, освен други предности, се намалува и потрошувачка на хартија.

Пример 8. Теорема на Питагора



Линк: <http://danidjordjevic.edu.glogster.com/new-glog/>

Mindomo.com (mindomo.com) е алатка на која на брз, лесен и едноставен начин можат да се изработат ментални мапи. Постојат многу алатки за креирање на ментални мапи. Ќе ја спомнеме и MindMup.com.

Пример 9. Дигитална фотографија

Линк: <https://www.mindomo.com/mindmap/1dfddc598003404b91ac63cb741eb583>

Wordle (www.wordle.net) е веб апликација со помош на која можете да генерирате т.н. облаци од зборови во вид на постери кои можат да се користат во наставата. Едноставна е и интересна за користење, па најчесто наоѓа примена за систематизација на знаења во пониските класови.

Пример 10. Поими за множества

Линк: <http://www.wordle.net/delete?index=8162702&d=VHJT>

MyHistro (myhistro.com) е алатка погодна за претставување на историски развој. Графичкиот приказ на историските податоци е прегледен и лесно се памти.

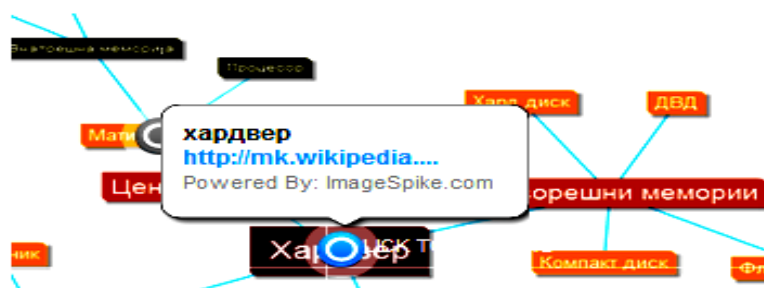
Можете да претставите цели историски периоди, историски развој на идеи, стилови, производи, биографии...

Секој настан се претставува на временска лента и просторно на географска мапа. Можат да се вметнат линкови до други сајтови, коментари, слики, аудио и видео-записи и слично. Слична на оваа алатка е и алатката Timerime.

Пример 11. Историја на бројот π .

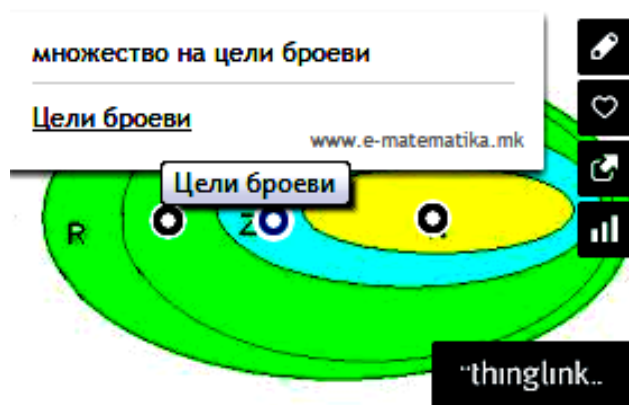
Imagespike.com (imagespike.com) е едноставна алатка за изработка на интерактивни фотографии. Тоа се фотографии на кои се вградени линкови до соодветни страници, слики или видеозаписи или се запишани дополнителни информации.

Пример 12. Хардвер



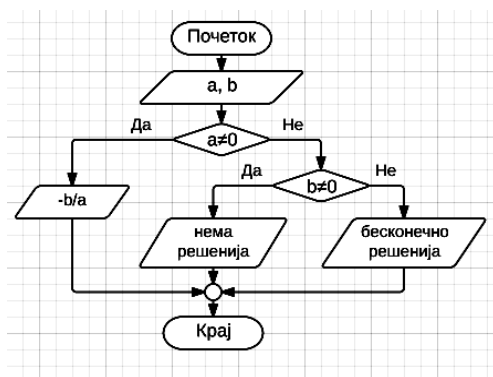
Thinglink.com (thinglink.com) е уште една алатка за изработка на интерактивни слики. Со доближување со глумче на означените места ученикот добива дополнителни информации или линк до повеќе содржини.

Пример 13. Множества на броеви



Lucidchart.com (lucidchart.com) е алатка за изработка на графикони и шеми. Особено е погодна во наставата по информатика за изработка на блок-дијаграми.

Пример 14. Блок-дијаграм за решенија на линеарна равенка



Петта категорија: Тестови, квизови, анкети

Web 2.0 алатките нудат изработка на онлајн тестови, квизови и анкети со добивање на повратни резултати и анализи. На интернет навистина постојат многу вакви алатки, па ќе наведеме некои погодни за изработка на тестови во наставата по математика. Такви се: PROPROFS, Classmarker, Quizstar, Socrative и други.

Во следниот пример се гледа како GoogleDocs (docs.google.com) може да се искористи за креирање на анкета при што учениците, родителите и наставниците анкетата ја решаваат онлајн во своите домови, а наставникот добива повратна информација и анализа на анкетата.

Пример 15. Анкета за електронски отпад

Proprofs.com (proprofs.com) има многу подобар едитор за пишување на математички формули, а освен тоа овозможува креирање на курсеви, лекции, анкети, истражувања, тестови и квизови. Откако учениците ќе го решат тестот можеме да видиме анализа и статистика и резултатите можеме да ги отпечатиме (како доказан материјал). Уште повеќе, секој ученик по решавање на тестот може да ги отпечати своите резултати или да ги симне како pdf документ и да провери на кои прашања згрешил и кои се точни одговори. Една од предностите е и можност на секое прашање да доделиме соодветен број на поени.

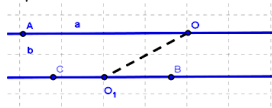
Пример 16. Квиз за вектори

1 / 10

✓



На цртежот правите a и b се паралелни.
Кои од полуправите OA , O_1C и O_1B се спротивнонасочени?



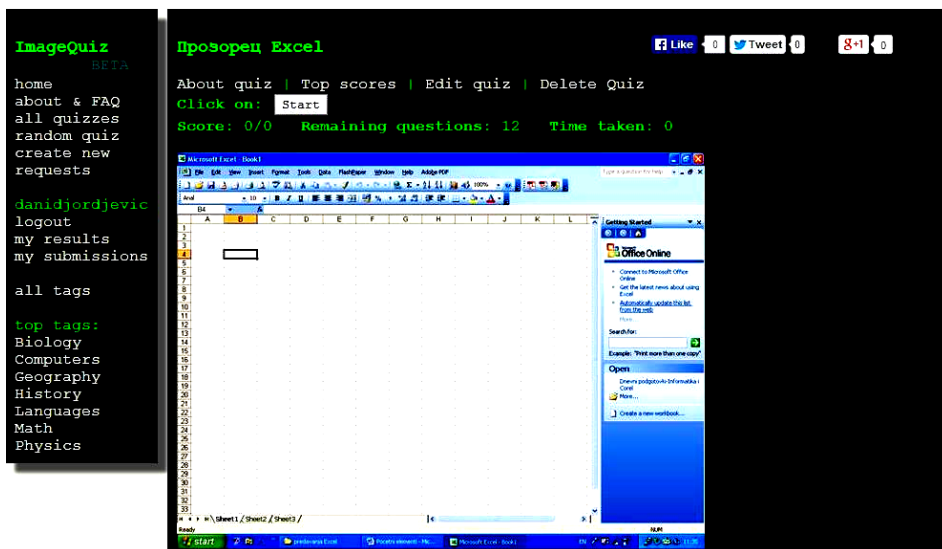
1. OA и OO_1

2. OA и O_1B ✓

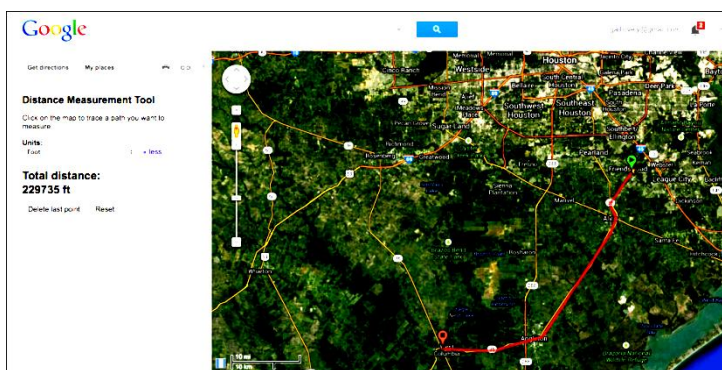
3. OA и O_1C

4. OA и OO_1

Imagequiz.com (imagequiz.com) е едноставна и лесна за користење алатка која овозможува изработка на квизови од претставена слика ученикот да покаже каков поим се бара од него.



Користење на Google мапи (maps.google.com) во математика:



Литература

- [1] *Наставна програма по математика и информатика*, Скопје мај 2001
- [2] Д. Ѓорѓевик . *Информатика за прва година средно образование*, 2013
- [3] К.Тренчевски, Д. Димовски, Б. Крстевска, Л. Кондинска. *Математика за прва година средно образование*, 2002.
- [4] www.web2teachingtools.com,
- [5] www.web2014.discoveryeducation.com,
- [6] www.nastava20.wordpress.com

¹⁾ СУГС Георги Димитров Скопје, Р Македонија
E-mail address: npiperevska@yahoo.com

²⁾ СУГС Георги Димитров Скопје, Р Македонија
E-mail address: dani_djordjevic@yahoo.com

APPLICATION OF WEB 2.0 IN TUITION OF MATH AND IT TECHNOLOGY

Nadica Piperevska Cvetkovska¹, Danijela Djordjevic²

Abstract. With the project of the Ministry of Education and Science "Computer for Every Child" new project "Tablet for Every Child", growing number of schools in Macedonia are equipped with modern computers that are connected to the Internet, and teachers and students are trained to use computers in teaching. As results of this we want to share some Web 2.0 teaching tools that are some of the best-of-the-best ones that have worked for us, our students, and other teachers. Web 2.0 can provide compelling teaching and learning opportunities. These quality and affordable applications to help teachers easily explain concepts, while students successfully learn the material. Teachers can revitalize their lessons by integrating these instructional technology tools into their teaching.

ЗА ПАРАДОКСОТ НА CARDANO

Боро М. Пиперевски

Апстракт: Во трудот се обработуваат формулите на Cardano за корените на алгебарска равенка од трет степен во зависност од дискриминантата. При тоа се дискутира поимот за алгебарско решение на равенка од трет степен во радикали, во корелација со парадоксот Cardano. Во литературата тој факт експлицитно не се истакнува на начинот на кој е тоа направено во овој труд.

1. ВОВЕД

Од средно образование е позната формулата за корени на квадратна равенка чии коефициенти се реални броеви. Како битна бројна карактеристика се појавува дискриминантата со помош на која се определува природата на корените, реални, двоен корен или комплексни.

Во наставата по математика е позната формулата за решавање на квадратна равенка додека за алгебарско решавање на равенки од повисок степен се разгледуваат само специјални случаи.

Равенката од трет степен прв ја решил италијанскиот математичар Scipione del Ferro во 1515 година. Потоа решението било повторно откриено од италијанските математичари Nikolaus Tartaglia во 1535 година и Geronimo Cardano во 1545 година. Во тоа време Ludovico Ferrari, ученик на Cardano, нашол формула за решение на равенка од четврти степен.

2. ФОРМУЛИ ЗА КОРЕНИ НА РАВЕНКА ОД ТРЕТ СТЕПЕН

Ќе започнеме со наједноставната равенка од трет степен

$$x^3 - 1 = 0$$

која има корени

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \alpha, \quad x_3 = \alpha^2,$$

каде

$$\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}. \quad (2.1)$$

Нека сега ја разгледаме равенката од трет степен

2010 *Mathematics Subject Classification.* 11D25, Secondary: 97U70

Key words and phrases. Discriminant, Radicals, Paradox of Cardano, Formula at solution algebraic on cubic algebraic equation with real coefficients

$$x^3 - a = 0,$$

која има корени дадени со формулите

$$x_1 = \sqrt[3]{a}, \quad x_2 = \alpha \cdot \sqrt[3]{a}, \quad x_3 = \alpha^2 \cdot \sqrt[3]{a},$$

каде $\sqrt[3]{a}$ е една од трите вредности на коренот.

Општата равенка од трет степен

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0, \quad a_0 \neq 0, a_1, a_2, a_3 \in R$$

со смената

$$x = y - \frac{a_1}{3a_0}, \quad (2.2)$$

се сведува на равенка од вид $y^3 + py + q = 0$, каде

$$p = -\frac{a_1^2}{3a_0^2} + \frac{a_2}{a_0}, \quad q = \frac{2a_1^3}{27a_0^3} - \frac{a_1a_2}{3a_0^2} + \frac{a_3}{a_0}.$$

Понатаму ќе работиме со равенка од вид:

$$x^3 + px + q = 0. \quad (2.3)$$

До денес постојат повеќе методи за решавање на равенката (2.3).

Нека y_0 е еден од двата корена на квадратната равенка

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0, \quad (2.4)$$

реални или комплексни, изразени со соодветната формула за решение.

За корените на равенката $y^3 - u_0 = 0$ се добиваат формулите

$$y_1 = \sqrt[3]{u_0}, \quad y_2 = \alpha \cdot \sqrt[3]{u_0}, \quad y_3 = \alpha^2 \cdot \sqrt[3]{u_0}, \quad (2.5)$$

каде α е дадено со формулата (2.1) и $\sqrt[3]{u_0}$ е една од трите вредности на кубниот корен. Во согласност со смената

$$x = y - \frac{p}{3y}, \quad (2.6)$$

се добиваат формулите за корените на нашата равенка (2.3).

Според тоа формулата за корени на кубната равенка е добиена од формулата за корени на квадратна равенка и формулата за корени на специјална кубна равенка. При тоа во формулата се користат рационални операции и коренување со коренов показател 2 и 3, од коефициентите на кубната равенка, со еден исклучок (решавање во радикали).

Дискриминантата на нашата равенка од трет степен (2.3) се пресметува со форму

$$D = (x_1 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2,$$

и со користење на Виетовите формули се добива

$$D = -4p^3 - 27q^2.$$

Значи $D \in R$.

За понатамошна постапка е интересна врската на оваа дискриминанта со дискриминантата на квадратната равенка (2.4). Ако со

$$d = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

ја означиме дискриминантата на квадратната равенка (2.4), тогаш се добива врската $108d + D = 0$.

Исто како и кај квадратна равенка, во зависност од дискриминантата D може да се определи природата на корените.

Нека $D = 0$. Тогаш од

$$D = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 = 0$$

се добива дека барем два корена се еднакви, а сите три се реални броеви.

Да се потсетиме дека кај алгебарски равенки со коефициенти реални броеви ако еден комплексен број е корен тогаш и неговиот коњугиран број е исто така корен.

Нека $D \neq 0$. Ако трите корени се реални и различни, тогаш

$$D = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2 > 0.$$

Ако пак еден корен x_3 е реален (сите корени се различни поради $D \neq 0$), тогаш другите два би биле коњугирано комплексни $x_1 = a + ib$, $x_2 = a - ib$, и од формулата се добива

$$D = -4b^2[(a - x_3)^2 + b^2]^2 < 0.$$

Ова решение има прекрасно својство. Во случај кога равенката (2.3) има три различни реални корени, и важи $D > 0$, во претставувањето на корените од равенката (2.4) се користи кубичен корен од комплексен број ($d = -\frac{D}{108} < 0$). Ова значи дека трет корен од комплексен број е реален број.

Всушност во овој случај не е можно во формулата да се користат само рационални операции и коренување со коренов показател 2 и 3, од коефициентите на кубната равенка (решавање во радикали), што е и математички докажано. Долго време тоа својство се сметало за недостаток на методот на решавање. Сепак може да се добие формула за корените и во овој случај со користење на тригонометриски вид на комплексен број.

Забележуваме дека во првите два случаја $D = 0, D < 0$, корените можат лесно да се изразат преку коефициентите на равенката (2.1), додека во третиот случај $D > 0$ тоа не е непосредно возможно. Затоа за тој случај ќе дадеме решение изразено со тригонометриски запис на комплексен број.

Нека комплексниот број

$$u_0 = -\frac{q}{2} + i\sqrt{\frac{D}{108}}$$

го запишеме во тригонометриски запис

$$u_0 = \rho(\cos \phi + i \sin \phi),$$

каде $\rho = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}$, $\cos \phi = -\frac{q}{2\rho}$, $\sin \phi = \frac{\sqrt{D}}{2\rho}$. Во согласност со формулата (2.5), каде

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \quad \alpha^2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3},$$

ќе добиеме

$$y_1 = \sqrt[3]{\rho}(\cos \frac{\phi}{3} + i \sin \frac{\phi}{3}), \quad y_2 = \sqrt[3]{\rho}(\cos \frac{\phi+2\pi}{3} + i \sin \frac{\phi+2\pi}{3}),$$

$$y_3 = \sqrt[3]{\rho}(\cos \frac{\phi+4\pi}{3} + i \sin \frac{\phi+4\pi}{3})$$

Од смената (2.6) и користење на равенствата

$$\sqrt[3]{\rho} + \frac{p}{3\sqrt[3]{\rho}} = \frac{3\sqrt[3]{\rho^2+p}}{3\sqrt[3]{\rho}} = \frac{3\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}+p}}{3\sqrt[3]{\rho}} = \frac{-3\frac{p}{3}+p}{3\sqrt[3]{\rho}} = 0,$$

$$\sqrt[3]{\rho} - \frac{p}{3\sqrt[3]{\rho}} = \frac{3\sqrt[3]{\rho^2-p}}{3\sqrt[3]{\rho}} = \frac{3\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}-p}}{3\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}} = \frac{-3\frac{p}{3}-p}{3\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}} = \frac{-2p}{3\sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}}} = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}},$$

се добиваат конечните формули за корените

$$x_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cdot \cos \frac{\phi}{3}, \quad x_2 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cdot \cos \frac{\phi+2\pi}{3}, \quad x_3 = 2\sqrt[3]{-\frac{p}{3}} \cdot \cos \frac{\phi+4\pi}{3}. \quad (2.7)$$

При тоа се користат операции со комплексни броеви во тригонометриски вид, тригонометриски формули за двоен агол, тригонометриски функции од збир на агли, коренување на комплексен број во тригонометриски вид и на крај се заменува ρ со n .

Пример 1. За равенката $x^3 + 3x - 14 = 0$, се добива

$$p = 3, q = -14, D = -5400 < 0,$$

и во согласност со формулата (2.5) ќе имаме

$$u_0 = 7 + \sqrt{50}, \quad y_1 = \sqrt[3]{7 + \sqrt{50}} = 1 + \sqrt{2}, \quad y_2 = \alpha(1 + \sqrt{2}), \quad y_3 = \alpha^2(1 + \sqrt{2}).$$

Во согласност со смената (2.6) се добиваат и корените

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1 + i\sqrt{6}, \quad x_3 = -1 - i\sqrt{6}.$$

Пример 2. За равенката $x^3 - 3x - 1 = 0$, се добива

$$p = -3, q = -1, D = 81 > 0, \quad u_0 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \rho = 1, \phi = \frac{\pi}{3},$$

и според формулите (2.7) ќе имаме

$$x_1 = 2 \cos \frac{\pi}{9}, \quad x_2 = 2 \cos \frac{7\pi}{9}, \quad x_3 = 2 \cos \frac{13\pi}{9}.$$

3. ЗАКЛУЧОК

Формулата за корените на равенката од трет степен ја нашол Феро и ја држел во тајност 30 години. Во некоја литература како куриозитет се наведува дека Cardano кој бил врач, дознал на некој начин за формулата од Tartaglia кој ја нашол независно од Феро, и иако обекал дека ќе ја држи во тајност, ја публикувал како своја во *Arts Magna*. Истото се случило и со формулата за корените на равенка од четврти степен, која ја нашол неговиот студент Ferrari. Сепак Cardano има подобри пресметки при изучувањето на корените, бројот на корените, врски меѓу нив и користење на комплексните броеви во тригонометриски запис за корените. Денес и двете формули се познати како формули на Cardano.

На крај да забележиме дека за произволна равенка од степен $n > 4$ не постои општа формула со помош на која ќе бидат најдени сите корени со конечен број операции собирање одземање, множење, делење и коренување со коренов показател природен број, од нејзините коефициенти. Тоа тврдење во 1826 година го докажал големиот математичар Abel.

Некомплетен доказ на тврдењето за прв пат бил публикуван 1799 година од страна на Ruffini кој по професија бил лекар. Подоцна еден од најголемите математичари Galois (1811 – 1832), преку неговата теорија го разрешил и проблемот како да се состави конкретна равенка со степен $n > 4$ која е нерешлива т.е. за која не може да се најде формула со помош на која ќе бидат најдени сите корени со конечен број операции собирање одземање, множење, делење и коренување со коренов показател природен број, од нејзините коефициенти. Една така конструирана равенка која е алгебарски нерешлива е равенката:

$$x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 2 = 0.$$

Литература

- [1] Solomon Feferman, *The Number Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. Reading, Mass. Palo Alto, London.
- [2] Академик Никола Обрешков: *ВИСША АЛГЕБРА*, Наука и изкуство, София 1966.
- [3] Избрани теми: *Карданови формули*, ЦИМ, ФЕИТ, УКИМ, 2007, Скопје, cim.feit.ukim.edu.mk

¹⁾Faculty of Electrical Engineering and Information Technologies, University “Ss Cyril and Methodius”, Skopje, Macedonia
E-mail address: borom@feit.ukim.edu.mk

FOR THE PARADOX OF CARDANO

Boro M. Piperevski¹

Abstract: In this paper, Cardano formulas are processed for the roots of third degree algebraic equation in dependence on discriminant. By that the notion of algebraic solutions to third degree equations in radicals is discussed, in correlation with the paradox of Cardano. This fact is not explicitly noted in literature.