

Шести тест

18.05.2017 година

1. Докажи, дека за секој природен број n постои природен број N таков што за секој природен број $b \in [2, 1389]$ збирот на цифрите на бројот N запишан во броев систем со основа b е поголем од n .

2. а) Докажи, дека

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1 \quad (1)$$

за секои реални броеви x, y, z такви што ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz = 1$.

б) Докажи, дека знак за равенство важи за бесконечно многу тројки рационални броеви x, y, z такви што ниту еден од нив не е еднаков на 1 и за кои важи $xyz = 1$.

3. Нека O, I и H се центарот на опишаната, центарот на впишаната кружница и орто-центарот на остроаголниот разностран $\triangle ABC$. Докажи дека $\angle OIH > 135^\circ$.