

Единаесетти тест

26.05.2017 година

1. Определи го најмалиот реален број k за кој неравенството

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)} + \sqrt{(a^2+1)(b^2+1)(d^2+1)} + \\ & + \sqrt{(a^2+1)(c^2+1)(d^2+1)} + \sqrt{(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)} \geq \\ & \geq 2(ab+bc+cd+ac+bd+ad) - k \end{aligned}$$

важи за произволни реални броеви a, b, c и d .

2. Докажи, дека ако еден правоаголник може да биде поделен на 200 и на 288 еднакви квадратчиња, тогаш тој може да биде поделен и на 392 еднакви квадратчиња.
3. Низа од четири парни цифри се нарекува допустлива, ако меѓу цифрите нема три еднакви.
- 1) Определи го бројот на допустливите низи.
 - 2) За секој природен број $n > 2$ со d_n да го означиме бројот на начините на кој со парни цифри може да се пополни табела со n редови и 4 колони така што секој ред е допустлив и низата 2, 0, 0, 8 се среќава точно еднаш. Определи ги сите природни броеви n за кои d_n е делител на d_{n+1} .
4. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Над страните AB и CD кон внатрешноста на четириаголникот се конструирани рамнострани триаголници ABP и DCM , а над страните AD и BC надворешно за четириаголникот се конструирани рамнострани триаголници ADN и BCQ . Докажи, дека точките M, N, P и Q се темиња на паралелограм.
5. Во $\triangle ABC$ е земена точка K која лежи на симетралата на $\angle BAC$. Правата CK по вторпат ја сече опишаната кружница ω околу $\triangle ABC$ во точката M . Кружницата Ω минува низ точката A , ја допира правата CM во точката K и по вторпат ја сече отсечката AB во точката P , а кружницата ω во точката Q . Докажи, дека точките P, Q и M лежат на една права.