

КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ СИГМА

104_формулации_105_решенија

I година

277. За реалните броеви a, b и c се исполнети неравенствата $|a| \geq |b+c|$, $|b| \geq |c+a|$ и $|c| \geq |a+b|$. Докажи дека $a+b+c=0$.

Решение. Ако дадените равенства ги квадрираме добиваме

$$a^2 \geq (b+c)^2, \quad b^2 \geq (a+c)^2, \quad c^2 \geq (a+b)^2.$$

Ако добиените неравенства ги собереме добиваме

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2,$$

кое е еквивалентно со

$$0 \geq (a+b+c)^2. \quad (*)$$

Да забележиме дека $(*)$ е точно ако и само ако во него е исполнето равенство. Равенство е исполнето ако и само ако $a+b+c=0$, што требаше и да се докаже.

278. Дали постојат попарно различни природни броеви x, y, u, v такви што

$$(x+u)(y+v) = (y+u)(x+v)? \quad (*)$$

Решение. Нека x, y, u, v се попарно различни броеви, т.е. $x, y, u, v \in \mathbb{N}$ и $x \neq y \neq u \neq v \neq x$. Равенството $(*)$ можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned} (x+u)(y+v) &= (x+v)(y+u) \\ xy + xv + uy + uv &= xy + vy + xu + uv \\ xv + uy - xu - yv &= 0 \\ y(u-v) - x(u-v) &= 0 \\ (y-x)(y-v) &= 0. \end{aligned}$$

Од точноста на низата равенства, добиваме дека $y-x=0$ или $u-v=0$, т.е. $x=y$ или $u=v$, што е во спротивност со претпоставката дека броевите се попарно различни. Според тоа, не постојат природни броеви за кои е исполнето равенството.

279. За реалните броеви x и y е исполнето равенството

$$\frac{x+y}{x+2y} + \frac{x-y}{x-2y} = 4. \quad (1)$$

Докажи дека $x^2 - y^2 \neq 0$ и определи ги можните вредности на изразот

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}.$$

Решение. Ако за реалните броеви x и y е исполнето равенството (1), тогаш $x+2y \neq 0$ и $x-2y \neq 0$. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека $x^2 - y^2 = 0$. Тогаш $(x-y)(x+y) = 0$ од каде добиваме дека $x-y=0$ или $x+y=0$. Двата случаи ќе ги разгледаме одделно.

Случај 1. $x-y=0$.

Во овој случај равенството (1) го добива обликот $\frac{x+y}{x+2y}=4$, од каде добиваме дека $3x+7y=0$. Но, на тој начин го добиваме системот $x^2=6y^2$ од $\begin{cases} x-y=0 \\ 3x+7y=0 \end{cases}$, за кој детерминантата на системот е $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7+3=10 \neq 0$. Хомогениот систем има едно единствено решение $x=y=0$. Но, тогаш $x+2y=0+2\cdot 0=0$ што не е можно.

Случај 2. $x+y=0$.

Во овој случај равенството (1) го добива обликот $\frac{x-y}{x-2y}=4$ од каде ја добиваме равенката $3x-7y=0$. Но, на тој начин го добиваме системот $\begin{cases} x+y=0 \\ 3x-7y=0 \end{cases}$, за кој детерминантата на системот е $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. Хомогениот систем има едно единствено решение $x=y=0$. Но тогаш $x-2y=0-2\cdot 0=0$, што не е можно.

Заради претходно добиените две контрадикции, добиваме дека $x-y, x+y \neq 0$, т.е. $x^2-y^2 \neq 0$. Сега, изразот (1) можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned} \frac{(x+y)(x-2y)+(x-y)(x+2y)}{(x-2y)(x+2y)} &= 4 \\ \frac{x^2+xy-2xy-2y^2+x^2-xy+2xy-2y^2}{x^2-4y^2} &= 4 \\ 2x^2-4y^2 &= 4x^2-16y^2. \end{aligned}$$

Конечно, $x^2=6y^2$ од каде што добиваме

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{6x^2+x^2}{6x^2-x^2} = \frac{7}{5}.$$

II година

280. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases},$$

во множеството реални броеви.

Решение. Очигледно е дека $x \neq 0$. Во спротивен случај би го добиле системот $\begin{cases} y^2=3 \\ y^2=-3 \end{cases}$ кој очигледно нема решение. Во тој случај оправдана е смената $y=tx$ со која системот го добива обликот

$$\begin{cases} x^2(1-3t+t^2)=3 \\ x^2(1+2t-2t^2)=6 \end{cases}. \quad (1)$$

Ако првата равенка на системот ја поделиме со втората равенка на системот, ја добиваме равенката

$$\frac{1-3t+t^2}{1+2t-2t^2} = \frac{1}{2}.$$

Се разбира, последната равенка е определена за $t \neq \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Истата го добива обликот $4t^2 - 8t + 3 = 0$, а нејзини решенија се $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = \frac{3}{2}$. Двете решенија ќе ги разгледаме како одделни случаи.

Случај 1. $t_1 = \frac{1}{2}$.

Од првата равенка на системот (1) добиваме $x^2 = 4$, па според тоа $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Соодветно $y_1 = 1$ и $y_2 = -1$, не е тешко да се провери дека паровите $(x_1, y_1) = (2, 1)$ и $(x_2, y_2) = (-2, -1)$ се решенија на системот.

Случај 2. $t_2 = \frac{3}{2}$.

Од првата равенка на системот (1) добиваме $x^2 = -12$, па според тоа, во овој случај системот нема решение.

Конечно, единствени решенија на системот се $(x_1, y_1) = (2, 1)$ и $(x_2, y_2) = (-2, -1)$.

281. Да се реши равенката

$$(\sqrt{3} + \sqrt{8})^x + \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{8})^x} - 6 = 0$$

Решение. Воведуваме смена $y = (\sqrt{8} + \sqrt{3})^x$ и равенката го добива обликот

$$y + \frac{1}{y} - 6 = 0, \text{ т.е. } y^2 - 6y + 1 = 0.$$

Решенија на последната квадратна равенка се $y_1 = 8 + \sqrt{3}$ и $y_2 = 8 - \sqrt{3}$. Не е тешко да се провери дека $y_1 = \frac{1}{y_2}$. Добиените решенија ги заменуваме во смената, при што ќе добиеме

$$(\sqrt{8} + \sqrt{3})^x = 8 + \sqrt{3}.$$

Според особините на операцијата степенување, добиваме дека решение на последната равенка е $x = 2$.

Од друга страна,

$$(\sqrt{3} + \sqrt{8})^x = 3 - \sqrt{8} = \frac{1}{3 + \sqrt{8}} = (3 + \sqrt{8})^{-1}.$$

Повторно, од особините на операцијата степенување добиваме $\frac{x}{2} = -1$, т.е. $x = -2$.

Не е тешко да се провери дека $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$ се решенија на почетната равенка.

282. Во ромб со страна a и остар агол 60° е впишана кружница. Да се најде плоштината на четириаголникот чии темиња се допирните точки на кружницата со страните на ромбот.

Решение. Нека допирните точки на впишаната кружница k во ромбот $ABCD$ ги означиме со M, N, P, Q . Јасно е дека висината на ромбот е $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, па според тоа, радиусот на впишаната

кружница во ромбот е $R = \frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Сега, според задача 1372-Рубрика задачи), добиваме дека страната на рамностраниот триаголник AMQ е $x = R\sqrt{3} = \frac{3a}{4}$. Значи, должината на едната страна на четириаголникот $MNPQ$ е $x = \frac{3a}{4}$.

Од друга страна, должината на краците DP и DQ на рамнокракиот триаголник PDQ е

$$\overline{DP} = \overline{DQ} = \frac{1}{4}a.$$

Неговите агли имаат големина $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$, па не е тешко да се пресмета дека должината на неговата основа е

$$y = 2 \cdot \frac{1}{4}a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Четириаголникот $MNPQ$ е правоаголник, па според тоа неговата плоштина е

$$P = xy = \frac{3a}{4} \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16},$$

што требаше да се пресмета.

III година

283. Докажи дека од произволни четири броја од интервалот $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ може

да се изберат два (x и y) такви што

$$8\cos x \cos y \cos(x-y) + 1 > 4(\cos^2 x + \cos^2 y).$$

Решение. Неравенството $8\cos x \cos y \cos(x-y) + 1 > 4(\cos^2 x + \cos^2 y)$ можеме да го запишеме во облик

$$8\cos x \cos y (\cos x \cos y + \sin x \sin y) - 4\cos^2 y - 4\cos^2 x + 1 > 0$$

Користејќи алгебраски трансформации и тригонометриски идентитети левата страна на последното неравенство го добива обликот

$$2(2\cos^2 x - 1)(2\cos^2 y - 1) + 2\sin 2x \sin 2y - 1 > 0,$$

$$2\cos 2x \cos 2y + 2\sin 2x \sin 2y - 1 > 0$$

$$2\cos(2x - 2y) > 1$$

$$\cos(2x - 2y) > \frac{1}{2}.$$

Сега интервалот $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ќе го разделиме на три дела со еднаква должина на следниот начин

$\left[0, \frac{\pi}{6}\right], \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right], \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$. Според Принципот на Дирихле, два од четирите броја припаѓаат на еден од

тие интервали. Нека тие броеви се x и y . Тогаш $|x - y| < \frac{\pi}{6}$, т.е. $|2x - 2y| < 2\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, па сега од парноста на функцијата $y = \cos x$, добиваме дека

$$\cos(2x - 2y) > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

што требаше да се докаже.

284. Параболата $y = ax^2 + bx + c$ минува низ точките $A(-2,1)$ и $B(2,9)$, и нема заеднички точки со апсцисната Ox -оска.

Кои вредности може да ги има апсцисата на темето на параболата?

Решение. Од условот дека параболата минува низ точките $A(-2,1)$ и $B(2,9)$ добиваме

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases}.$$

Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка на системот, добиваме $b = 2$ и потоа $4a + c = 5$.

Од условот на задачата, параболата нема заеднички точки со Ox -оската, па според тоа нема реални корени. Значи, нејзината дискриминанта е негативна, т.е.

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4a(5 - 4a) < 0.$$

Со решавање на последната неравенка добиваме $\frac{1}{4} < a < 1$. Од друга страна, параболата можеме да ја запишеме во облик

$$f(x) = ax^2 + b + c = ax^2 + 2x + 5 - 4a = a\left(x^2 + 2\frac{1}{a}x + \frac{1}{a^2}\right) - \frac{1}{a} + 5 - 4a$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{4a^2 - 5a + 1}{a}.$$

Сега, апсцисата на темето на параболата е $x_T = -\frac{1}{a}$, па од претходно добиените неравенства за a имаме $-4 < x_T < -1$, што се бараните вредности.

285. За кои вредности на параметарот m сите решенија на равенката

$$mx^4 - mx^2 + m + 1 = 0,$$

се наоѓаат во интервалот $(-1,1)$.

Решение. Со смената $y = x^2$, равенката го добива обликот

$$my^2 - my + m + 1 = 0. \quad (*)$$

Ако x е решение на почетната равенка што се наоѓа меѓу реалните броеви -1 и 1 , тогаш y е решение на $(*)$ што се наоѓа меѓу реалните броеви 0 и 1 . Равенката $(*)$ од друга страна не може да има само едно решение меѓу 0 и 1 . Во тој случај би било исполнето $f(0) \cdot f(1) < 0$, каде $f(y) = my^2 - my + m + 1$, односно $(m+1)^2 < 0$ што не е можно ($f(0)f(1) = (m+1)(m+1) = (m+1)^2 < 0$).

Да забележиме дека $(*)$ има две решенија кои се меѓу 0 и 1 ако се исполнети следните услови

а) $D \geq 0$, т.е. $m^2 - 4m(m+1) \geq 0$. Последната неравенка е исполнета за $m \in \left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$.

б) $mf(0) > 0$, т.е. $m(m+1) > 0$. Последната неравенка е исполнета за $m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

в) $mf(1) > 0$, т.е. $m(m+1) > 0$. Последната неравенка е исполнета за $m \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

г) $f'(1)f'(0) < 0$, т.е. $-m^2 < 0$. Последната неравенка е исполнета $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Сите четири услови се исполнети за $m \in \left[-\frac{4}{3}, -1\right)$. За вака определените вредности на m имаме

$0 < y_1 < y_2 < 0$, односно

$$-1 < -\sqrt{y_2} < -\sqrt{y_1} < 0 < \sqrt{y_1} < \sqrt{y_2} < 1,$$

што требаше да се докаже.

IV година

286. Нека x, y и z се позитивни реални броеви такви што $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Докажи дека

$$\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq \sqrt{3}.$$

Решение. Јасно е дека $S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 0$. Сега,

$$\begin{aligned} S^2 &= \left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \right)^2 = \left(\frac{xy}{z} \right)^2 + \left(\frac{yz}{x} \right)^2 + \left(\frac{zx}{y} \right)^2 + 2 \frac{xy}{z} \frac{yz}{x} + 2 \frac{yz}{x} \frac{zx}{y} + 2 \frac{xy}{z} \frac{zx}{y} = \\ &= \left(\frac{xy}{z} \right)^2 + \left(\frac{yz}{x} \right)^2 + \left(\frac{zx}{y} \right)^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

Од друга страна од точноста на неравенството

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca,$$

кое е исполнето за било кои реални броеви, добиваме

$$\left(\frac{xy}{z} \right)^2 + \left(\frac{yz}{x} \right)^2 + \left(\frac{zx}{y} \right)^2 \geq \frac{xy}{z} \frac{yz}{x} + \frac{yz}{x} \frac{zx}{y} + \frac{zx}{y} \frac{xy}{z} = x^2 + y^2 + z^2,$$

па според тоа

$$S^2 \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3$$

$$S \geq \sqrt{3}.$$

Равенство се достигнува ако и само ако

$$\frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y},$$

т.е. $x^2 = y^2 = z^2$. Бидејќи x, y и z се позитивни, равенство важи ако и само ако $x = y = z$.

287. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ се реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}.$$

Решение. Ако $0 \leq x \leq 1$, тогаш $x^{\frac{3}{2}} \leq x$. Притоа, равенство се достигнува за $x = 0$ и $x = 1$.

Нека во конечната низа $a_1, a_2, \dots, a_n$ има ненулни елемент, т.е. постои $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ така што $a_k \neq 0$. Тогаш

$$x_s = \frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^n a_p^2}, \quad s = 1, 2, \dots, n$$

се такви што $0 \leq x_s \leq 1$. Според забелешката на почетокот на решението на задачата имаме

$$x_s^{\frac{3}{2}} \leq x_s, \text{ т.е.}$$

$$\left(\frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^n a_p^2} \right)^{\frac{3}{2}} \leq \frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^n a_p^2}, \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Но, тогаш

$$\sum_{s=1}^n \left(\frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^n a_p^2} \right)^{\frac{3}{2}} \leq \sum_{s=1}^n \frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^n a_p^2} = \frac{\sum_{s=1}^n a_s^2}{\sum_{p=1}^n a_p^2} = 1 \Leftrightarrow \sum_{s=1}^n \frac{a_s^3}{\left(\sum_{p=1}^n a_p^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{s=1}^n a_s^3 \leq \left(\sum_{p=1}^n a_p^2 \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Сега, јасно е дека $\left(\sum_{p=1}^n a_p^3 \right)^{\frac{1}{3}} \leq \left(\sum_{p=1}^n a_p^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$

Ако пак сите $a_s, s=1, 2, \dots, n$ се еднакви на нула, тогаш важи знакот за равенство.

288. Нека $m=30030=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ и M е множеството од сите позитивни делители на m кои се производ на два прости делители на m . Определи го најмалиот природен број n со следното својство: од било кои n различни броеви од M може да се избераат три чиј производ е m .

Решение. Јасно е дека множеството M има $\binom{6}{2}=15$ елементи, односно

$$M = \{2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 2 \cdot 11, 2 \cdot 13, 3 \cdot 5, 3 \cdot 7, 3 \cdot 11, 3 \cdot 13, 5 \cdot 7, 5 \cdot 11, 5 \cdot 13, 7 \cdot 11, 7 \cdot 13, 11 \cdot 13\}.$$

Од друга страна, ако избереме 5 од 6-те прости делители на бројот m , може да направиме $\binom{5}{2}=10$ елементи од множеството M . Производот на било кои три од нив не може да е бројот m . Значи, $n \geq 11$

Ќе покажеме дека $n=11$. Елементите на множеството M ќе ги разделиме на пет попарно дисјунктни подмножества од M при што производот на елементите од секое од тие множества одделно е бројот m . Една таква поделба е

$$\begin{aligned} &\{2 \cdot 3, 5 \cdot 13, 7 \cdot 11\} \\ &\{2 \cdot 5, 3 \cdot 7, 11 \cdot 13\} \\ &\{2 \cdot 7, 3 \cdot 13, 5 \cdot 11\} \\ &\{2 \cdot 11, 3 \cdot 5, 7 \cdot 13\} \\ &\{2 \cdot 13, 3 \cdot 11, 5 \cdot 7\}. \end{aligned}$$

Ако избереме 11 елементи од множеството M , според принципот на Дирихле три елементи ќе бидат од едно исто множество, од претходните делбени множества. Нивниот производ е бројот m .