

Дванаесетти тест

31.05.2017 година

1. Нека $n > 1$ е природен број и нека $d_1, d_2, \dots, d_k$ се сите позитивни делители на бројот n , при што

$$1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n.$$

Нека $D = \sum_{i=1}^{k-1} d_i d_{i+1}$.

- а) Докажи, дека $D < n^2$.
- б) Определи ги сите броеви n за кои D е делител на n^2 .
2. Кружниците Γ_1 и Γ_2 се сечат во точките M и N . Нека правата AB ги допира кружниците Γ_1 и Γ_2 во точките A и B соодветно, така што точката M е поблиску до правата AB од точката N . Нека правата која минува низ точката M и е паралелна со правата AB по втор пат ги сече кружниците Γ_1 и Γ_2 во точките C и D соодветно. Правите CA и DB се сечат во точката E , правите AN и CD во точката P , а правите BN и CD во точката Q . Докажи дека $\overline{EP} = \overline{EQ}$.
3. Нека $n \geq 2$. На хоризонтална права се наоѓаат n болви но така што не се сите во една точка. За позитивен број λ *потез* се дефинира на следниов начин: се избираат две болви кои се наоѓаат во произволни точки A и B при што точката A се наоѓа лево од точката B ; болвата од точката A скока во точката C , која на дадената права се наоѓа десно од B така да важи $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \lambda$.
- Определи ги сите вредности на λ така што за секоја точка M на дадената права и произволен почетен распоред на n -те болви постои конечна низа потези после која сите болви ќе се најдат десно од точката M .