

## Четврт тест

21.03.2017 година

1. Нека  $I$  е центарот на впишаната кружница во  $\triangle ABC$ , а  $M$  е средината на страната  $AB$ . Ако  $\overline{CI} = \overline{MI}$ , определи ја најмалата можна вредност на  $\sphericalangle CIM$ .

2. Нека  $a, b, c$  се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geq 0.$$

3. Трака со ширина  $w$  го нарекуваме множеството точки во рамнината кои се наоѓаат на или меѓу две паралелни прави кои се на растојание  $w$  една од друга. Нека  $S$  е множество од  $n$  точки во рамнината такво што било кои три точки од множеството  $S$  може да се покријат со трака со ширина 1. Докажи, дека  $S$  може да се покрие со трака со ширина 2.

4. Нека  $n \geq 2$  е природен број. Со  $f(n)$  да го означиме збирот на сите природни броеви кои се помали или еднакви на  $n$  и кои не се заемно прости со  $n$ . Докажи, дека  $f(n+p) \neq f(n)$ , за секој  $n \geq 2$  и за секој прост број  $p$ .