

Осумнаесетти тест

07.06.2017 година

1. Определи ги сите природни броеви n такви што бројот $11^n + 2^n + 1$ е делител на $11^{n+1} + 2^{n+1} + 1$.
2. Нека a, b, c и d се позитивни реални броеви такви што $a + b + c + d = 1$. Докажи, дека
$$\frac{a^3}{4a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^3}{4b^2 + (c+d)^2} + \frac{c^3}{4c^2 + (d+a)^2} + \frac{d^3}{4d^2 + (a+b)^2} \geq \frac{1}{8}.$$
3. Отсечките AD и BE се висини во $\triangle ABC$. Правата низ точката D паралелна со AC ја сече правата AB во точка P . Правата низ точката E паралелна со BC ја сече правата AB во точката Q . Докажи, дека точките D, E, P, Q лежат на една кружница.
4. Природните броеви се обоени во две бои.
 - а) Докажи, дека постојат бесконечно многу парови од различни еднобојни броеви x и y за кои бројот $x + y$ е точен квадрат.
 - б) Дали постојат два различни еднобојни броеви x и y чиј збир е степен на бројот 2.
5. Фигурата добиена од квадрат со димензии 2×2 со отстранување на една негова клетка ја нарекуваме триклеточен агол. Дали е можно единечните клетки на табла со димензии 3000×3000 да бидат обоени во црна и бела боја, но така што како и да се ресече таблата на 3000000 триклеточни агли, секој од нив да содржи точно по една црна клетка?