ЗАДАЧА НА БРОЈОТ СИГМА 104_ФОРМУЛАЦИЈА

Нека a,b се природни броеви такви што

$$\frac{\text{НЗС}(a,b)}{\text{НЗД}(a,b)}=a-b\ . \qquad (*)$$

Докажи дека $\text{НЗС}(a,b)=\text{НЗД}^2(a,b)$.

Решение. Нека a и b се природни броеви кои го исполнуваат условот од задачата, и нека $\text{НЗД}(a,b)=d$. Според дефиницијата на НЗД , постојат единствени x и y такви што $\text{НЗД}(x,y)=1$ и $a=dx,b=dy$. Но тогаш

$$\text{НЗС}(a,b)=\text{НЗС}(dx,dy)=d\,\text{НЗС}(x,y)=dxy\ .$$

Сега равенството (*) го добива обликот

$$\frac{dxy}{d}=dx-dy\ ,\ \text{т.е. } xy=dx-dy\ . \qquad (1)$$

Нека $\text{НЗД}(d,y)=k$. Повторно од дефиницијата на НЗД , постојат единствени u и v такви што $\text{НЗД}(u,v)=1$ и

$$d=ku\ ,\ \ y=kv\ .$$

Бидејќи $\text{НЗД}(x,y)=1$ и $v|y$, добиваме дека $\text{НЗД}(x,v)=1$ и $\text{НЗД}(x,k)=1$. Но, сега (1) го добива обликот

$$xkv=kux-kukv$$
$$xv=ux-kuv$$
$$xv+kuv=ux$$
$$v(x+ku)=ux$$

Од $\text{НЗД}(v,u)=\text{НЗД}(v,x)=1$ и $v|ux$, добиваме $v=1$ односно

$$x+ku=ux$$
$$ux-x-ku+k=k$$
$$x(u-1)-k(u-1)=k$$
$$(x-k)(u-1)=k.$$

Но, бидејќи $\text{НЗД}(x,k)=1$, добиваме $x-k=1$ и $u-1=k$, т.е. конечно $x=k+1$, $u=k+1$, $y=k$, $d=k(k+1)$, односно

$$a=k(k+1)^2$$
$$b=k^2(k+1)$$

и

$$\text{НЗС}(a,b)=k^2(k+1)^2=[k(k+1)]^2=d^2=\text{НЗД}^2(a,b)\ ,$$

што требаше да се докаже.

НАГРАДНА ЗАДАЧА НА БРОЈОТ СИГМА 104

Нека p е природен број, таков што 2^p-1 е прост број. Докажи дека збирот на позитивните делители на бројот $n=2^{p-1}(2^p-1)$ кои се помали од n е еднаков на n .

Решение. Ќе воведеме ознака $q=2^p-1$. Бидејќи $n=2^{p-1}q$ и q е прост број, делители на бројот n кои се помали од него се

$$1,2,\dots,2^{p-1}$$
$$q,2q,\dots,2^{p-2}q$$

Збирот на броевите од првата (горната редица) е

$$A=1+2+3+\dots+2^{p-1}=(2-1)(1+2+3+\dots+2^{p-1})=2^p-1=q\,,$$

а збирот на броевите од долната редица е

$$B=q+2q+\dots+2^{p-2}q=q(2-1)(1+2+\dots+2^{p-2})=q(2^{p-1}-1)=q2^{p-1}-q\,.$$

За нивниот збир имаме

$$A+B=q+n-q=n\,,$$

што требаше да се докаже.