

Деветти тест

23.05.2017 година

1. Докажи, дека постојат само конечен број тројки природни броеви (a, b, c) такви што $abc = 2009(a + b + c)$.
2. Нека x, y и z се реални броеви такви што $x, y, z \geq 1$. Докажи, дека
$$(x^2 - 2x + 2)(y^2 - 2y + 2)(z^2 - 2z + 2) \leq (xyz)^2 - 2xy + 2.$$
3. Даден е правоаголен $\triangle ABC$ со прав агол во темето C . Нека M е средината на BC , а D и E се подножјата на нормалите повлечени од темето C кон AB и AM , соодветно. Ако $\overline{BE} = 2\overline{DE}$, определи го $\angle ABC$.
4. Во остроаголниот $\triangle ABC$ тежишната линија AM е подолга од страната AB . Докажи, дека $\triangle ABC$ може да биде расечен на најмногу три дела од кои може да се состави ромб.
5. Дадена е табела со димензии $n \times n$ чии колони се нумерирани од 1 до n . Во секое поле од табелата е запишан природен број од 1 до n така што во секој ред и во секоја колона броевите се различни. Едно поле се нарекува добро ако бројот запишан во него е поголем од бројот на колоната во која тоа се наоѓа. Определи ги сите природни броеви n за кои сите редови содржат ист број добри полиња.