

Дваесет и втори тест

11.06.2017 година

1. а) Докажи, дека ако $a, b \in [0, 1]$ и $a + b \leq 1$, тогаш $a^2 + b^2 \leq 1$.
б) Секои два од броевите x, y, z не се разликуваат за повеќе од 1 и $xy + yz + zx = 96$.
Опреди ја најмалата и најголемата вредност на изразот $A = x^2 + y^2 + z^2$.
2. Даден е триаголник ABC со тежиште G и центар на впишаната кружница I . Ако $\overline{AB} = 42$, $\overline{GI} = 2$ и $AB \parallel GI$, определи ги должините на страните AC и BC .
3. За секој подреден пар природни броеви (m, n) дефинираме операција $m * n = |37^m - 29^n|$.
а) Дали постои подреден пар (m, n) таков што $m * n = 2014$?
б) Опреди ја најмалата вредност на изразот $m * n$.
4. Дадени се 15 сијалици кои се подредени во форма на рамностран триаголник, како што е прикажано на цртежот десно. На почетокот сијалиците се изгаснати.
а) Докажи, дека може да се запалат 8 сијалици така што меѓу нив нема три кои се темиња на рамностран триаголник.
б) Докажи, дека како и да се запалат 9 сијалици, тогаш меѓу нив има три кои се темиња на рамностран триаголник.
5. Во множеството природни броеви равенката

$$2^t = 3^x 5^y + 7^z.$$

