19-та ЈММО

19-та Јуниорска македонска математичка олимпијада
Машински факултет-Скопје
06.06.2015година

1. Во множеството на целите броеви реши ја равенката $x^2+y^4+1=6^z$.

2. Дадена е кружница k со центар O и радиус r и права p која нема заеднички точки со k. Нека E е подножјето на нормалата спуштена од O кон p. На p е избрана произволна точка M различна од E и од неа се повлечени двете тангенти кон k кои ја допираат оваа кружница во A и B. Ако H е пресекот на AB и OE, докажи дека $\overline{OH}=\frac{r^2}{\overline{OE}}$.

3. Докажи дека за a,b,c позитивни реални броеви важи

$$(16a^2+8b+17)(16b^2+8c+17)(16c^2+8a+17)\geq 2^{12}(a+1)(b+1)(c+1).$$

Кога важи знак за равенство?

4. Нека ABC е остроаголен триаголник и k е кружницата опишана околу него. Точката O во внатрешноста на триаголникот е таква што $\overline{CE}=\overline{CF}$, каде E и F се точки од k и E лежи на AO, а F лежи на BO. Докажи дека O лежи на симетралата на аголот во темето C ако и само ако триаголникот е рамнокрак со основа $\overline{AB}$.

5. Нека A и B се два идентични конвексни многуаголници, секој со плоштина 2015. Многуаголникот A е разделен на многуаголници со позитивна плоштина $A_1,A_2,...,A_{2015}$, а многуаголникот B на многуаголници со позитивна плоштина $B_1,B_2,...,B_{2015}$. Со 2015 бои се обоени $A_1,A_2,...,A_{2015},B_1,B_2,...,B_{2015}$ така што A_i е различно обоен од A_j и B_i е различно обоен од B_j, за $i\neq j$. После поклопувањето на многуаголниците A и B, пресметан е збирот на плоштините на деловите што имаат иста боја.

Докажи дека постои боење на многуаголниците за кое овој збир е најмалку 1.

Време за работа 4 часа и 30 минути
за секоја точно решена задача се добиваат 8 поени