

Седми тест

19.05.2017 година

1. Нека k е природен број и m е непарен цел број. Докажи, дека постои природен број n таков што 2^k е делител на $n^n - m$.
2. Дадени се кружница ω со центар I и две прави кој ја допираат ω во точките A и B и се сечат во точката O . Нека C е точка на помалиот лак AB на ω , различна од средината на лакот. Правите AC и OB се сечат во точката D , а правите BC и OA се сечат во точката E . Докажи, дека центрите на опишаните кружници околу триаголниците ACE , BCD и OCI лежат на една права.
3. Нека $n \geq 3$ е природен број и $a_2, a_3, \dots, a_n$ се позитивни реални броеви такви што $a_2 a_3 \dots a_n = 1$. Докажи, дека

$$(1 + a_2)^2 (1 + a_3)^3 \dots (1 + a_n)^n > n^n. \quad (1)$$