Осумнаесетти тест

06.09.2016 година

1. Даден е ромб $ABCD$ со $\measuredangle BAD = \alpha < 90^\circ$. Нека M е средината на страната CD и $BP \perp AM$, $(P \in AM)$. Определи ги односот $\overline{BP} : \overline{PD}$ и $\measuredangle BPD$.

2. Впишаната кружница во правоаголниот $\triangle ABC$ ја допира хипотенузата AB во точката C_1. Точките $P \in CC_1$ и $Q \in AC$ се такви што $PQ \parallel BC$ и четириаголникот AC_1PQ е тангентен. Докажи, дека $\overline{CP} = \overline{O_1O_2}$, каде O_1 и O_2 се центрите на впишаните кружници во $\triangle AC_1C$ и $\triangle BC_1C$.

3. Определи го најголемиот реален број a со својство: постои конвексен шестаголник $ABCDEF$ чии страни се со должина 1 и точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1 во внатрешноста на $ABCDEF$, за кои секоја од отсечките $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1$ и FF_1 има должина a и никои две од тие отсечки немаат заедничка точка која е внатрешна и за двете отсечки.

4. Должините на страните на разностран триаголник формираат аритметичка прогресија и правата низ тежиштето и центарот на впишаната кружница во триаголникот е нормална на негова страна. Докажи дека триаголникот е правоаголен.