



СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2019

16.02.2019 година

Четврата година

Група А

1. Нека $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ се низи дадени со $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $x_{n+1} = \frac{3x_n + y_n}{4}$, $y_{n+1} = \frac{2x_n + 3y_n}{5}$.

Докажи дека $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дадена со $z_n = y_n - x_n$, за секој $n \in \mathbb{N}$ е геометриска прогресија.

2. Дадена е парабола $y^2 = 2px$, $p > 0$. На параболата се дадени точки A, B, C (A има најголема, а C најмала ордината) такви што симетралата на $\angle ABC$ е паралелна со x -оската. Ако должината на проекцијата на отсечката AC на y -оската е еднаква на $4p$, определи ја ординатата на средината на отсечката BC .
3. Нека a и b се позитивни реални броеви такви што броевите $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ и $\log_{4b}(4a)$, во овој редослед се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи, дека $a = b$.

4. Пресметај го збирот

$$2 \binom{2007}{2} + 4 \binom{2007}{4} + \dots + 2006 \binom{2007}{2006}.$$

Време за работа 150 минути

Секоја задача се вреднува по 25 поени



СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2019

16.02.2019 година

Четврта година Група Б

1. Во рамнина се дадени две множества од паралелни прави p_1, p_2, \dots, p_{13} и q_1, q_2, \dots, q_7 такви што правите од првото множество се сечат со правите од второто множество. Колку паралелограми се определени со тие прави?
2. Дадена е парабола $y^2 = 2px$, $p > 0$. На параболата се дадени точки A, B, C (A има најголема, а C има најмала ордината) такви што симетралата на $\angle ABC$ е паралелна со x -оската. Ако должината на проекцијата на отсечката AC на y -оската е еднаква на $4p$, определи ја ординатата на средината на отсечката BC .
3. Нека a и b се позитивни реални броеви такви што броевите $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ и $\log_{4b}(4a)$, во овој редослед се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи, дека $a = b$.

4. Докажи дека за секој природен број n

$$\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{n\text{-корени}}$$

Време за работа 150 минути

Секоја задача се вреднува по 25 поени