

Тринаесетти тест

30.05.2017 година

1. Реалните броеви поголеми од 1 се обоени во две бои, при што се искористени и двете бои. Докажи, дека постојат реални броеви a и b , за кои броевите $a+b$ и ab се обоени во различни бои.
2. Множество од последователни природни броеви содржи точно 10 четврти степени и точно 100 кубови на природни броеви. Докажи, дека ова множество содржи барем 2000 точни квадрати на природни броеви.
3. Нека n е парен природен број кој нема множител точен квадрат поголем од 1, k е цел број, а p е прост број таков што $p < 2\sqrt{n}$, p не е делител на n и p е делител на $n+k^2$. Докажи, дека постојат различни природни броеви a, b, c такви што $n = ab + bc + ca$.
4. За дадено множество S од 2014 точки во рамнината нека l е најмалиот природен број за кој постојат l прави такви што секоја точка од S лежи на некоја од тие прави. Нека c е најмалиот природен број за кој постојат c кружници такви што секоја точка од S лежи на некоја од тие кружници. Дали постои множество S за кое
 - а) $l=15$ и $c=67$,
 - б) $l=19$ и $c=53$.
5. Дадени се 37 двоцифрени броеви кои не се деливи со 10. Докажи, дека меѓу овие 37 броеви постојат 5 броја такви што за секои два од овие броеви цифрите на десетките се различни и цифрите на единиците се различни.