Дваесетти тест

09.06.2017 година

1. Определи ги сите прости броеви p и q и сите природни броеви $k>1$ за кои броевите $p^k q+1$ и pq^k+1 се точни квадрати.

2. Нека $d, a_1, a_2, ..., a_{2014}$ се реални броеви такви што
$$|a_1-1|=|a_2-2|=|a_3-3|=...=|a_{2014}-2014|=d$$
и $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_{2014}$ се броевите $a_1, a_2, ..., a_{2014}$ подредени по големина. Докажи, дека $|a_k-b_k| \leq 2d$, за $k=1,2,...,2014$.

3. Даден е $\triangle ABC$, $\overline{AC} \neq \overline{BC}$. Нека I е центарот на впишаната кружница k во $\triangle ABC$, а D, E, F се допирните точки на k со страните AB, BC, AC, соодветно.
а) Ако $S = CI \cap EF$, докажи дека $\triangle CDI \sim \triangle DSI$.
б) Нека M е втората пресечна точка на k и CD. Тангентата на k во M ја сече правата AB во точката G. Докажи, дека $GS \perp CI$.

4. Во полињата на табла со димензии 8×8 се распоредени жетони така што:
   1) Барем во едно поле на секој правоаголник со димензии 1×2 или 2×1 има барем еден жетон.
   2) Во секој правоаголник со димензии 7×1 или 1×7 има барем два жетони кои се наоѓаат во соседни полиња.

   Определи го најмалиот можен број на жетони.

5. Определи го најмалиот позитивен реален број α, за кој е точно следново тврдење: ако вкупната тежина на конечен број тикви е еден тон и секоја од тиквите тежи најмногу α тони, тогаш тиквите може да се распределат во 50 вреќи (некои од вреќите може да бидат и празни) така што во секоја вреќа има најмногу α тони тикви.