

Дваесетти тест

11.06.2017 година

1. Нека n и нека $a_1, a_2, \dots, a_k, (k \geq 2)$ се меѓусебно различни природни броеви од множеството $\{1, 2, \dots, n\}$ такви што броевите $a_i(a_{i+1} - 1)$ се деливи со n за секој $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Докажи дека бројот $a_k(a_1 - 1)$ не е делив со n .
2. Еден зад друг во круг се застанати n ученици, чии висини се $h_1 < h_2 < \dots < h_n$. Ако ученикот со висина h_k е веднаш зад ученикот со висина h_{k-2} или помала, тогаш двајцата ученици можат да ги заменат местата. Докажи, дека се можни најмногу $\binom{n}{3}$ такви замени, т.е. дека после најмногу $\binom{n}{3}$ замени ќе се добие распоред после кој повеќе не се можни замени.
3. Дадени се природни броеви m и n , поголеми од 1 и цели броеви $a_1 < a_2 < \dots < a_m$. Докажи, дека постои множество T од цели броеви такво што $|T| \leq 1 + \frac{a_m - a_1}{2n+1}$ и секој a_i може да се претстави во облик $a_i = t + s$ за некои $t \in T$ и $s \in [-n, n]$.