

Петнаесетти тест

01.06.2017 година

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$\frac{x^2+y^2}{z!} = \frac{1}{x!} + \frac{1}{y!}.$$

2. Докажи, дека ако a и b се реални броеви поголеми од -1 , тогаш

$$\frac{1+a^6}{1+a} \cdot \frac{1+b^6}{1+b} \geq \frac{1+ab}{2} \cdot \frac{1+a^4b^4}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?

3. На дадена кружница k се избрани точки A, B и C . Конструирани е кружница ω , која се допира до тетивите AB, AC и внатрешно до кружницата k во точките P, Q и R , соодветно. Нека правите PR и QR по втор пат ја сечат k во точките M и N соодветно, а точката T е таква, што четириаголникот $AMTN$ е паралелограм. Докажи дека точките P, Q и T лежат на една права.
4. Даден е квадрат $ABCD$ со должина на страна a . Точките M и N лежат на страните BC и CD , соодветно и се такви што $\angle MAN = 45^\circ$. Определи го периметарот на триаголникот MNC .
5. На тениски турнир секој тенисер играл по еден натпревар со секој друг тенисер (во тенисот ниту еден натпревар не завршува нерешено). Се покажало, дека најголемиот број играчи кои можат да седнат околу тркалезна маса, но така што секој играч да го победил играчот кој се наоѓа од неговата десна страна е еднаков на четири. Докажи, дека бројот на начините сите играчи да се подредат во редица, но така што секој играч да го победил играчот кој се наоѓа од неговата десна страна е делив со пет.