Proc. V Congres
2014 (42-51)
Скопје, Македонија

UDC:517.517:004.925.8
ISBN 978-9989-646-69-0

ИНТЕРАКТИВНИ ГРАФИЦИ

Соња Геговска-Зајкова[1], Билјана Начевска-Настовска[2]

Апстракт. Една од најзначајните примени на програмскиот пакет Wolfram Mathematica во образовни цели е можноста за креирање интерактивни графици. Во овој труд, користејќи ја командата Manipulate, предожени се кодови за CDF документи со чија помош, поаѓајќи од графикот на реална функција од една реална променлива, може да се креираат интерактивни графици на различни функции кои зависат од еден или повеќе параметри. На тој начин, на учениците им е овозможено да го истражуваат влијанието на овие параметри врз графикот на функцијата и самостојно да донесуваат заклучоци за обликот на кривата, што придонесува во развојот на критичкото мислење кај учениците.

1. Вовед

Присуството на информациско-комуникациските технологии не значи автоматски нивна квалитетна примена во наставата. Денешните ученици, како активни субјекти на наставниот процес, со леснотија ги прифаќаат технолошките иновации, имајќи предвид дека тие се составен дел од нивниот секојдневен живот. Учениците се по природа љубопитни, активни, брзи, нивното внимание најчесто е краткотрајно, сакаат да добиваат нови информации извршувајќи повеќе активности истовремено. Компјутерот е средство кое може да ги задоволи овие нивни потреби. Традиционалната настава често пати ги доведува учениците во состојба на пасивност и појава на отпор кон училиштето и учењето.

Ќе издвоиме неколку карактеристики кои се многу битни во однесувањето на учениците во современиот образовен систем [2]:

- Активности наместо меморирање. Учениците сé помалку се потпираат на информациите кои ги меморираат, а повеќе на пронаоѓањето одредени факти во моментот кога тоа е потребно. Знаењето веќе не е крајна цел и активностите се вреднуваат повеќе од меморираните податоци.
- Брзина. На денешните ученици им е многу важно информацијата да ја добијат веднаш и од неколку различни извори, често пати не водејќи сметка за валидноста на добиената информација и верувајќи дека сите податоци достапни на интернет се валидни.

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 97U50. Secondary: 97U70.
Key words and phrases. График на функција, визуелизација, интеракција, Wolfram Mathematica, креативно мислење.

- Краткотрајно внимание. Секако, ова е последица на современиот начи на живот, во кој најчесто нема доволно време темелно и долготрајно да се посвети вниманието на некоја активност.
- Извршување повеќе задачи одеднаш. Новите генерации се поуспешни во работата кога истовремено работат повеќе работи, како слушање музика, читање или внесување текст.
- Визуелно учење. Младите претпочитаат да учат визуелно, имајќи предвид дека биле постојано изложени на многу визуелни стимулации. Ова е во спротивност со традиционалните стилови на поучување – креда и табла.
- Соработничко учење. За денешните ученици од огромно значење се интеракцијата, вмрежувањето, активното учество и поврзувањето во секој момент и на секое место. Тие претпочитаат да учат низ дискусија и соработка, а не само слушајќи ги другите.

Со цел да ги достигнат идеалите на современата настава, наставниците постојано треба да бараат методи кои ќе резултирааат во зголемување на интересот на учениците, нивно поактивно и сестрано учество во наставниот процес и солидно и трајно усвојување на знаењата и вештините. Користењето слики, анимации, симулации или презентации наоѓа значајна примена во претставувањето на содржините од наставата по математика. Без примена на визуелните претстави, наставникот ќе мора да вложи значаен напор за да ја активира фантазијата на учениците, со чија помош тие ќе можат да си го претстават она за што им се зборува. И покрај овие напори, не сите ученици, на пример, можат да го замислат конусот кој се формира со ротација на правоаголен триаголник околу неговата катета.

Затоа е од особена важност наставниците да станат иницијатори на активниот современ наставен процес. Образовниот софтвер во наставата по математика мора да биде прилагоден на целите и задачите на наставата, возраста на учениците, наставните содржини, типот на часот, како и дидактичките принципи и наставните методи. Од особена важност е образовниот софтвер да обезбеди услови за самостојна работа и индивидуализација на наставата, визуелизација на наставната содржина, со посебен акцент на примената на проблемски и истражувачки наставни методи [1, 3].

Wolfram Mathematica е моќен софтверски систем предвиден за нумеричко, симболичко и графичко пресметување и визуелизација. Тој е присутен во сите фази од наставата по математика, почнувајќи од основно училиште, до високо образование [4].

Тој обезбедува комплетно окружување за креирање материјали за курсеви, комбинирајќи ги можностите за различни пресметувања и динамичката визуелизација со професионална документација и алатките за презентација.

Во овој труд, е даден приказ на наставна единица во која се изучуваат трансформациите на график на функција од една реална променлива. Со примената на командата Manipulate од пакетот Wolfram Mathematica 9, креирани се CDF документи за исцртување интерактивни графици кои зависат од еден или повеќе параметри. CDF документите може да се користат од учениците без тие да имаат познавања од пакетот Mathematica. За користење на овие документи неопходен е само CDF player, кој може слободно и бесплатно да се преземе од www.wolfram.com/cdf-player. Понатаму, во трудот се предложени активности на учениците со кои тие ќе бидат поттикнати на набљудување, истражување и самостојно извлекување заклучоци за влијанието на промената на параметрите врз обликот на кривата која е график на трансформираната функција. На крајот е предложен и модул за проверка на знаењата.

2. Трансформација на графикот на дадена функција

Во наставната програма по математика за реформираното гимназиско образование, во рамките на темите: Експоненцијална и логаритамска функција и Тригонометрија во III година и Функции и гранични вредности на функции во IV година, предвидена е содржината цртање график на соодветната функција. Една од конкретните цели на оваа содржина е скицирање график на функцијата $y = c \cdot f(b \cdot x + a) + d,\ a,b,c,d \in \mathbb{R}$, користејќи го графикот на функцијата $y = f(x)$.

Со помош на традиционалните средства, како што се таблата и кредата, при реализацијата на оваа содржина, се добиваат статични цртежи. Често пати учениците се ставени во улога на пасивни набљудувачи кои едноставно го прецртуваат во тетратките она што е прикажано на таблата.

Во продолжение ќе покажеме како може да се искористат компјутерите за реализација на оваа наставна содржина. Мотивацијата за ваков час е да се направи исчекор од традиционалната настава, со цел полесно и побрзо разбирање на наставните содржини низ визуелното доживување на ученикот. Целта е преку визуелното набљудување, а потоа ментално, учениците да се поттикнат на откривање на математичките вистини. Предностите на овој вид час може да се огледаат во примената на современи методи и облици на работа, усвојување на знаењата за сразмерно пократко време, како и прилагодување на темпото на работа на учениците кон сопствените психофизички способности.

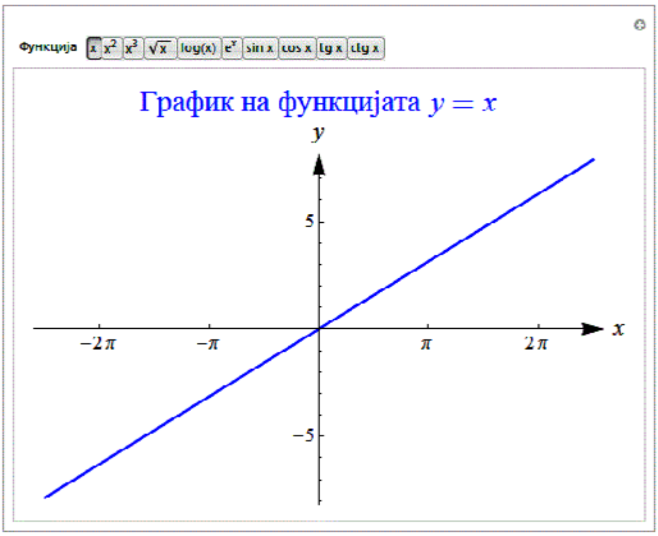
Воведен дел. Во воведниот дел на часот е предвидено скицирање на графиците на елементарните функции. Наставникот ја демонстрира примената на наредбата Plot од Wolfram Mathematica, а потоа и на наредбата Manipulate со која, избирајќи соодветна функција од менито, може да се добијат графиците на повеќе елементарни функции.

Низ разговор за својствата на елементарните функции, наставникот ја иницира активноста на учениците, која во овој дел од часот се сведува на учество во разговорот.

```
In[1]:= Manipulate[Plot[f[x], {x, -2.5 Pi, 2.5 Pi}, Axes → True,
      Ticks → {Table[u * Pi, {u, -4, 4}], Automatic},
      PlotStyle → {{Thick, Blue} , {Thick, Red}},
      AxesLabel → {Style[x, Italic, 20], Style[y, Italic, 20]},
      AxesStyle → Arrowheads[{0, 0.04}], LabelStyle → Directive[16],
      PlotLabel → Style["График на функцијата y" = f[x], Blue, 25],
      ImageSize -> 500],
     {{f, (Identity), "Функција"},
      {Identity → "x",
       ((#^2) &) → "x²",
       ((#^3) &) → "x³",
       ((#^(1/2)) &) → "√x ",
       Log → "log(x)",
       Exp → "eˣ",
       Sin → "sin x",
       Cos → "cos x",
       Tan → "tg x",
       Cot → "ctg x"

      }, ControlType → SetterBar}]
```

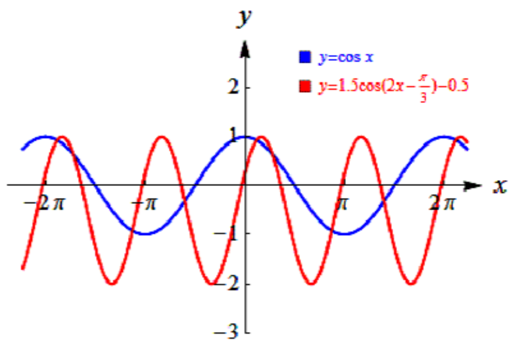
Out[1]=



Главен дел. Во овој дел од часот учениците треба да ги усвојат и разберат трансформациите на графиците на функции добиени од елементарните функции со воведување параметар. На почетокот, од учениците се бара да ги воочат сличностите и разликите помеѓу графиците на функциите $f(x)=\cos x$ и $f(x)=2\cos(3x-\frac{\pi}{3})-0.5$.

```
In[2]:=
Plot[{Cos[x], 1.5 Cos[2 x - Pi / 3] - 0.5}, {x, -7, 7},
 PlotRange → {{-7.5, 7.5}, {-3, 3}}, Axes → True,
 Ticks → {Table[u * Pi, {u, -2, 2}], Table[u, {u, -3, 3}]},
 PlotStyle → {{Thick, Blue}, {Thick, Red}} ,
 AxesLabel → {Style[x, Italic, 20], Style[y, Italic, 20]},
 AxesStyle → Arrowheads[{0, 0.04}], LabelStyle → Directive[16],
 PlotLegends → Placed[SwatchLegend[{"y=cos x", "y=1.5cos(2x-π/3)-0.5"}],
   {Right, Top}]]
```

Out[2]=




```
In[3]:= Manipulate[
 Plot[{Tooltip[fcn[x]], Tooltip[fcn[x + a]]}, {x, -6, 6}, PlotRange → {-6, 6},
  Axes → True, Ticks → {Table[u, {u, -6, 6}], Table[u, {u, -6, 6}]},
  PlotStyle → {{Thick, Blue} , {Thick, Red}},
  PlotLabel → Style[If[a ≥ 0, "y" = fcn[x + Dynamic[a]],
     "y" = fcn[x - Dynamic[Abs[a]]]], {Red, 20}],
  AxesLabel → {Style[x, Italic, 20], Style[y, Italic, 20]},
  AxesStyle → Arrowheads[{0, 0.04}], LabelStyle → Directive[16],
  ImageSize → {400, 400}, AspectRatio → Automatic,
  PlotLegends → Placed[SwatchLegend[{"y=f(x)", "y=f(x+a)"}], {Right, Top}]],
 {{fcn, (#^2) &, "Оригинална функција"},
  {Identity → "x",
   ((#^2) &) → "x²",
   ((#^3) &) → "x³",
   Sin → "sin x",
   Cos → "cos x",
   Tan → "tg x",
   Cot → "ctg x",
   Log → "ln x",
   Exp → "eˣ",
   ((#^(1/2)) &) → "√x",
   Abs → "|x|"
  }, ControlType → SetterBar},

 {{a, 0, "a"}, -5, 5, .01, Appearance → "Labeled", ControlPlacement → Left}]
```

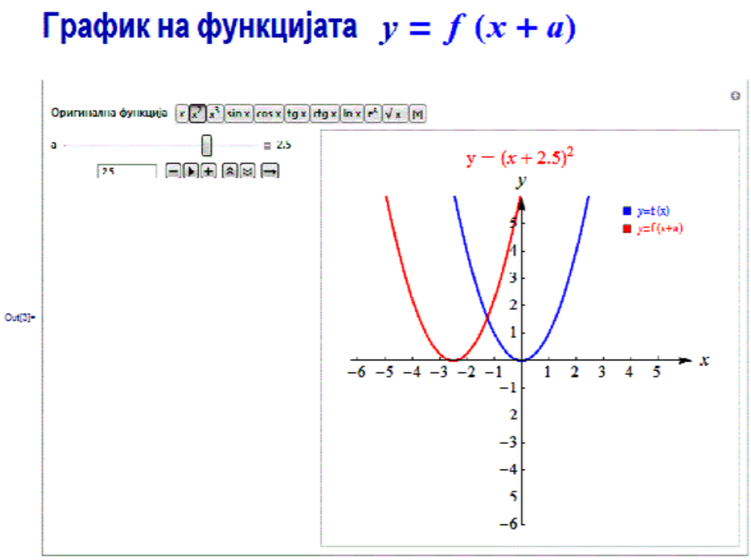
Потоа, класот се дели во четири групи. Во секоја група се анализира влијанието на само еден параметар врз графикот на функцијата. Секоја група користи готов CDF документ кој содржи анимација.

Поаѓајќи од графикот на функцијата $y = f(x)$, првата група треба да го анализира влијанието на реалниот параметар a врз графикот на функцијата $y = f(x + a)$.

Со претходниот код се креира соодветниот CDF документ. На ученикот му се достапни следниве контроли:

- оригинална функција – се избира една од функциите предложени на менито со кликнување на соодветното копче;
- а – се избира вредност на параметарот со користење на лизгачот или со непосредно внесување на саканата вредност во соодветното поле.

Модулот ги прикажува графикот на оригиналната функција (со сина боја) и графикот на трансформираната функција (со црвена боја). Автоматски на екранот се запишува и аналитичкиот израз за трансформираната функција.



Втората, третата и четвртата група имаат слична задача. Користејќи готов CDF документ, тие треба да го анализираат влијанието на реалниот параметар b, c, односно d врз графикот на функцијата $y = f(bx)$, $y = cf(x)$ и $y = f(x) + d$, соодветно.

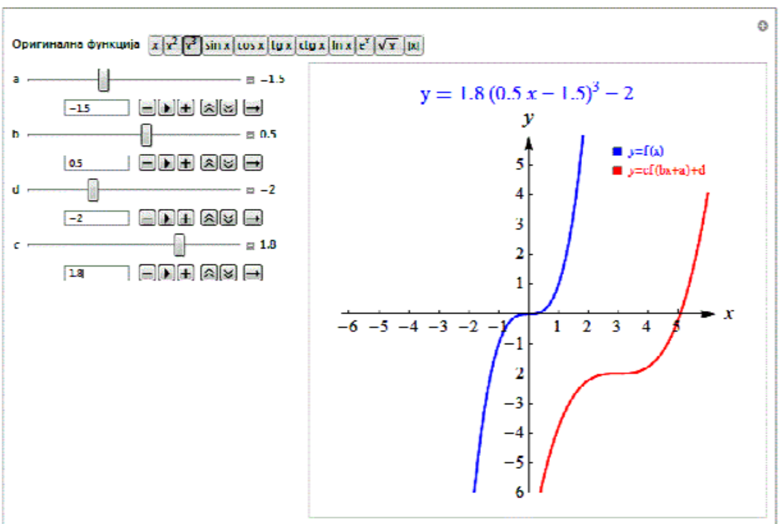
Секоја група треба да ги набљудува и анализира промените на графикот кои настануваат зависно од промената на вредноста на параметарот и да донесе соодветни заклучоци. На крајот добиените заклучоци се презентираат пред целиот клас.

Потоа од учениците се бара да го стартуваат CDF документот чиј код е даден подолу, со цел да го воочат влијанието на сите параметри истовремено.

```
In[4]:= Manipulate[
  Plot[{Tooltip[fcn[x]], Tooltip[c*fcn[b*x+a]+d]}, {x, -6, 6}, PlotRange→{-6, 6},
   Axes→True, PlotStyle→{{Thick, Blue}, {Thick, Red}},
   PlotLabel→Style[If[a≥0,
      If[b≥0, "y" = c*fcn[Dynamic[b]*x+Dynamic[a]]+d, "y" = c*fcn[-Dynamic[Abs[b]]*x+Dynamic[a]]+d],
      If[b≥0, "y" = c*fcn[Dynamic[b]*x-Dynamic[Abs[a]]]+d, "y" = c*fcn[-Dynamic[Abs[b]]*x-Dynamic[Abs[a]]]+d]], {Blue, 20}],
   AxesLabel→{Style[x, Italic, 20], Style[y, Italic, 20]},
   AxesStyle → Arrowheads[{0, 0.04}], LabelStyle→Directive[16],
   ImageSize→{400, 400}, AspectRatio→Automatic, Ticks→{Range[-6, 6], Range[-6, 6]},
   PlotLegends→Placed[SwatchLegend[{"y=f(x)", "y=cf(bx+a)+d"}], {Right, Top}]],
  {{fcn, (#^2) &, "Оригинална функција"},
   {Identity→"x",
    ((#^2) &)→"x²",
    ((#^3) &)→"x³",
    Sin→"sin x",
    Cos→"cos x",
    Tan→"tg x",
    Cot→"ctg x",
    Log→"ln x",
    Exp→"eˣ",
    ((#^(1/2)) &)→"√x",
    Abs→"|x|"
   }, ControlType→SetterBar},
  {{a, 0, "a"}, -5, 5, .01, Appearance→"Labeled", ControlPlacement→Left},
  {{b, 1, "b"}, -4, 4, .01, Appearance→"Labeled", ControlPlacement→Left},
  {{d, 0, "d"}, -5, 5, .01, Appearance→"Labeled", ControlPlacement→Left},
  {{c, 1, "c"}, -4, 4, .01, Appearance→"Labeled", ControlPlacement→Left}]
```

График на функцијата $y = cf\,(b\,x + a) + d$

Out[4]=

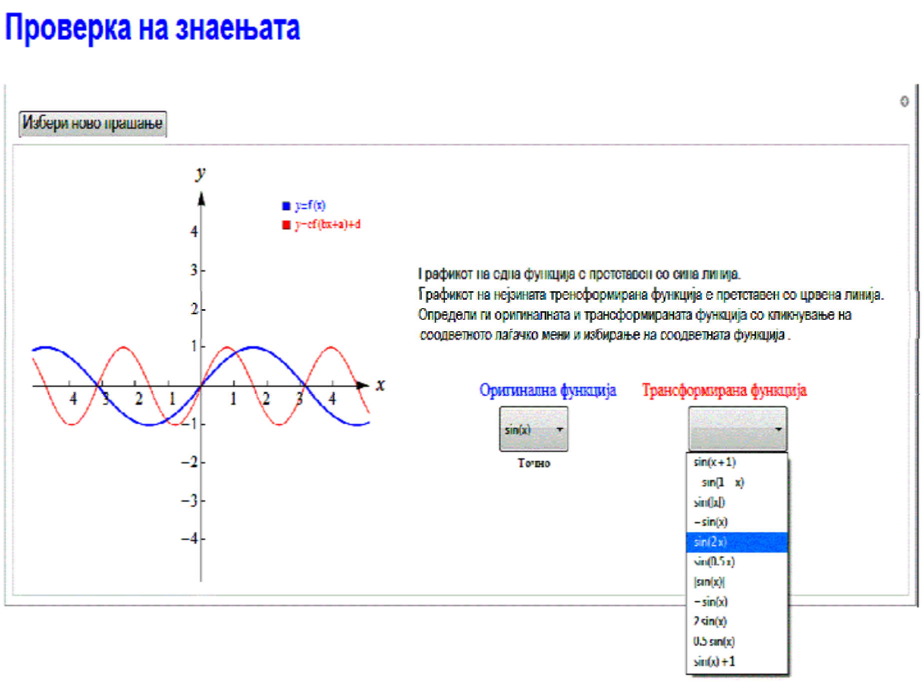


Завршен дел. Врз основа на претходно спроведеното истражување, се донесуваат заклучоци за тоа како секој од параметрите влијае врз графикот на функцијата. На крајот од учениците се бара да проверат колку ги усвоиле трансформациите на графиците на функции добиени од елементарните функции со воведување параметри, користејќи го подолу наведениот код на CDF документ. Со сина боја е прикажан графикот на некоја елементарна функција. Учениците треба од паѓачкото мени да го изберат аналитичкиот израз со кој е опишана функцијата чиј график е прикажан. Секој избор е следен со соодветен коментар: точно или неточно. Потоа од второто паѓачко мени учениците треба да го изберат аналитичкиот израз со кој е зададена трансформираната функција чиј график е прикажан со црвена боја. Со кликнување на полето “Избери нова функција”, се добива ново прашање.

```
In[5]:= Manipulate[SeedRandom[ranint]; iz = RandomInteger[{1, 6}]; izt = RandomInteger[{1, 11}];
  Module[{aa = Table[RandomSample[Range[-2, 2], 4], {6}]}, fun = funs[[iz]];
   funtr = Join[fun /. {{x → x + 1}, {x → x - 1}, {x → Abs[x]}, {x → -x}, {x → 2 x}, {x → 0.5 x}},
     {Abs[fun], -fun, 2 fun, 0.5 fun, fun + 1}]; fun1 = funs[[iz]] /. {x → "x"}; funs1 = funs /. {x -> "x"};
   funtr1 = funtr /. {x -> "x"}; fun1t = funtr[[izt]] /. {x → "x"};
   Text@Column[{
      Style[Row[{"           Графикот на една функција е претставен со сина линија.                    "}], 16],
      Style[Row[{"      Графикот на нејзината тренсформирана функција е претставен со црвена линија."}], 16],
      Style[Row[{"Определи ги оригиналната и трансформираната функција со кликнување на    "}], 16],
      Style[Row[{"   соодветното паѓачко мени и избирање на соодветната функција.               "}], 16],
      Row[{""}], Row[{""}],
      Row[{Style["Оригинална функција", Blue, 16], Style[ "        Трансформирана функција", Red, 16]}],
      Grid[{{PopupMenu[Dynamic[an1], Map[TraditionalForm, funs1], FieldSize → {4, 2}],
          PopupMenu[Dynamic[an], Map[TraditionalForm, funtr1], Enabled → ! an1 === -4 && an1[[1]] === fun1,
           FieldSize → {7, 2}]},
         {If[an1 === -4, " ", If[an1[[1]] === fun1, Точно, Неточно]],
          If[an === -4, " ", If[an[[1]] === fun1t, Точно, Неточно]]}}, Spacings → 10]}, Alignment → Center]

    Show[Plot[{fun, funtr[[izt]]}, {x, -5.1, 5.1}, Axes → True, AxesOrigin → {0, 0},
      Ticks → {Table[u, {u, -4, 4}], Table[u, {u, -4, 4}]}, AspectRatio → Automatic,

      AxesLabel → {Style[x, Italic, 20], Style[y, Italic, 20]}, AxesStyle → Arrowheads[{0, 0.04}],
      LabelStyle → Directive[16], Exclusions → Automatic, PlotRange → {{-5.1, 5.1}, {-5.1, 5.1}},
      PlotLegends → Placed[SwatchLegend[{"y=f(x)", "y=cf(bx+a)+d"}], {Right, Top}],
      PlotStyle → {{Thickness[0.005], Blue}, {Thickness[0.002], Red}}], ImageSize → {400, 400}]],
  {ranint, RandomInteger[{199, 199977}], ControlType → None},
  {an1, -4, ControlType → None}, {an, -4, ControlType → None}, {iz, 7, ControlType → None},
  {izt, 12, ControlType → None}, {fun, {}, ControlType → None}, {fun1, {}, ControlType → None},
  {{funs, {Exp[x], x, x^2, x^3, Sin[x], (x^2 + 1)^(-1)}}, ControlType → None}, {funs1, {}, ControlType → None},
  {funtr, {}, ControlType → None}, {funtr1, {}, ControlType → None}, {fun1t, {}, ControlType → None},
  Button["Избери ново прашање", ranint = Random[Integer, {1, 123577}]; an1 = -4; an = -4],
  AutorunSequencing → {5}]
```



3. Заклучок

Наставниците во современиот наставен процес работат со ученици кои се родени во дигиталната ера. Постојано опкружени со нови технологии, денешните ученици ги прифаќаат технолошките иновации без резерва и сосем природно. Така, компјутерите и нивната примена во секојдневниот живот за учениците се нешто најнормално, како што за некои претходни генерации биле радиото или телевизијата. Останува отворено прашањето како оптимално да се користат компјутерите во наставата. Во овој труд се обидовме да ја илустрираме примената на CDF документите креирани со помош на програмскиот пакет Mathematica при испитување на влијанието на одредени реални параметри врз графикот на елементарните функции. Целта на воведените новини е, преку динамичката визуелизација, да се подобри разбирањето на оваа наставна содржина кај учениците, како и развивање на математичката и информатичката писменост. Од не помало значење е и елиминирање на факторот здодевност, кој многу често се поврзува со традиционалната настава. За реализирање на предложената наставна единица, наставникот не мора да бидат информатички експерт. Доволно е да поседува основна компјутерска писменост и познавање на основите на програмскиот пакет Mathematica, кој овозможува едноставно креирање разновидни мултимедиски материјали за учење кои наставникот може да им ги направи достапни на учениците во секое време.

Литература

[1] Kahveci, M. & Imamoglu, *Interactive Learning in Mathematics Education: Review of Recent Literature*, Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 26*(2)*, 137-153, 2007.

[2] Schofield C. P., Honore S.*,Generation Y and learning*, The Ashridge Journal, 2009.

[3] Lim C. P., Zhao Y., Tondeur J., Chai C.S & Tsai C. C., *Bridging the Gap: Technology Trends and Use of Technology in Schools*, Educational Technology & Society, 16 (2), 59–68, 2013.

[4] http://www.wolfram.com/mathematica/

[1)]Факултет за електротехника и информациски технологии,
Универзитет Св. Кирил и Методиј Скопје, Македонија
E-mail address: szajkova@feit.ukim.edu.mk
[2)]Факултет за електротехника и информациски технологии,
Универзитет Св. Кирил и Методиј Скопје, Македонија
E-mail address: biljanan@feit.ukim.edu.mk

Proc. V Congres
2014 (52-66)
Скопје, Македонија

UDC:517.51:004.925.86
ISBN 978-9989-646-69-0

ПРИМЕНА НА ПАКЕТОТ MATHEMATICA ЗА ИСПИТУВАЊЕ ОСОБИНИ И СКИЦИРАЊЕ ГРАФИК НА РЕАЛНА ФУНКЦИЈА ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

Сања Костадинова Атанасова[1], Катерина Хаџи-Велкова Санева[2], Соња Геговска-Зајкова[3]

Апстракт. Во овој труд е опишано како пакетот *Mathematica* може да се искористи како помошна алатка во наставата по математика во четврта година гимназиско образование. На конкретни примери ќе биде покажана примената на пакетот *Mathematica* во испитување на особините и скицирање график на реална функција од една реална променлива. Примерите се изработени во програмскиот пакет Wolfram Mathematica 8.

1. Вовед

Повеќе од извесно е дека компјутерите заземаат сѐ поголемо учество во процесот на образование. Мотивација за да се искористи некој програмски пакет во наставата по математика е токму фактот дека денес секој ученик има пристап до компјутер. Учениците во средното образование лесно може да се прилагодат на пакетот Wolfram Mathematica бидејќи тој лесно може да се користи како калкулатор, но исто така и за некои посложени математички операции. Wolfram Mathematica почнува да се развива од 1988 година, и денес се користи како софтверска програма во многу научни, математички, инженерски и компјутерски полиња кои се засноваат на симболичка математика. Овој програмски пакет е посебно погоден за работа со нумерички податоци, за симболички процесирања, како и за графичко прикажување на податоци и функции.

Според наставниот план и програма за средно образование, реалните функции од една реална променлива се обработуваат во четврта година. Испитувањето на функциите е сложен мисловен процес кој вклучува препознавање на нивните основни својства, решавање равенки и неравенки, извршување симболички пресметувања и користење на овие аналитички резултати при скицирање на графикот на функцијата [1]. Овој процес е особено важен за развојот на теоретското мислење кај учениците, кои најчесто математиката ја доживуваат како апстрактен предмет. Учениците обично можат успешно да ги извршат формалните пресметувања, но имаат проблем при нивната интерпретација. Како последица на тоа, голем дел од учениците се неуспешни во процесот на синтеза на добиените резултати при конструкција на визуелниот модел, како што е графикот на функцијата. Како една

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 97U50. Secondary: 97U70.
Key words and phrases. График на функција, визуелизација, интеракција, Wolfram Mathematica, креативно мислење.

од мерките за надминување на овие проблеми, во овој труд е опишана примената на пакетот Mathematica при испитувањето на особините и скицирањето на графикот на реална функција од една реална променлива. На овој начин, учениците ќе се запознаат со пакетот Mathematica и може да стекнат солидна основа за негова примена во решавање на други математички проблеми. Во овој труд, на конкретни примери ќе биде опишано како овој пакет може да се искористи за извршување голем број математички операции, правење пресметки со голема точност, решавање равенки, определување гранични вредности и изводи, како и цртање графици на функција. Пакетот дава одлична можност за полесно и побрзо испитување на особините на функциите, како и добра визуализација на нивните графици. Резултатите се изработени во Wolfram Mathematica 8.

1.1. ПОСТАПКА ЗА ИСПИТУВАЊЕ НА ОСОБИНИТЕ НА ФУНКЦИЈА

При испитувањето на особините на дадена реална функција $y = f(x)$ најчесто се следат неколку чекори кои помагаат при скицирање на нејзиниот график.

Првиот чекор на кој се обрнува внимание е определување на **област на дефинираност** D_f на функцијата. Притоа, ако дадената функција е сложена, од учениците се бара да утврдат од кои елементарни функции (полиномна, дробно-рационална, експоненцијална, логаритамска, тригонометриска или инверзна тригонометриска функција) е добиена.

Вториот чекор е определување на **пресеците на кривата** $y = f(x)$ **со координатните оски**. За да ги определиме пресечните точки со x–оската ја решаваме равенката $f(x) = 0$. Доколку оваа равенка има решение с $x_0 \in D_f$, пресечната точка со x–оската ќе биде $(x_0, 0)$. За определување на пресечните точки со y–оската бараме колку е $y_0 = f(0)$ доколку $x = 0 \in D_f$ и ја добиваме точката $(0, y_0)$.

Во третиот чекор проверуваме дали дадената функција е **парна** или **непарна**. Притоа, потребно е да се определи $f(-x)$. Поради тоа, парност и непарност се испитуваат само за функции чии области на дефинираност D_f се симетрични во однос на координатниот почеток, т.е. ако $x \in D_f$, тогаш и $-x \in D_f$. Притоа, можни се следниве три случаи:

- Ако $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$, тогаш функцијата е парна и нејзиниот график е осно симетричен во однос на y-оската.
- Ако $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$, тогаш функцијата е непарна и нејзиниот график е централно симетричен во однос на координатниот почеток.
- Ако не е исполнето ниту едно од равенствата $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$ или $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$, тогаш функцијата не е ниту парна ниту непарна.

Четвртиот чекор е определување на **асимптотите** за графикот на функцијата. Да се потсетиме на начинот на кој испитуваме постоење асимптоти за графикот на функцијата $y = f(x)$. Ако постои $x_0 \in \mathbb{R}$ за кој функцијата не е дефинирана, тогаш во таа точка бараме лева и десна гранична вредност. Ако

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty \quad (\text{односно } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty),$$

тогаш правата $x = x_0$ е лева (односно десна) вертикална асимптота за графикот на функцијата $y = f(x)$. Нагласуваме дека графикот на функцијата не ја сече вертикалната асимптота.

Ако постои барем една од граничните вредности

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \ (\text{односно } \lim_{x \to -\infty} f(x))$$

и е еднаква на $p \in \mathbb{R}$, тогаш правата $y = p$ е десна (односно лева) хоризонтална асимптота за графикот на функција $y = f(x)$.

Определувањето коса асимптота бара придржување кон следната постапка. Бараме

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \ (\text{односно } \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}).$$

Ако добиената гранична вредност е реален број k, тогаш бараме:

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) \ (\text{односно } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx)).$$

Ако последната гранична вредност е повторно реален број n, тогаш правата $y = kx + n$ е десна (односно лева) коса асимптота за графикот на функцијата $f(x)$. Графикот на функцијата може да ја сече хоризонталната (односно косата) асимптота $y = p$ (односно $y = kx + n$) и пресеците (доколку постојат) може да се определат како решение на системот од две равенки со две непознати:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = p \end{cases}, \text{ односно } \begin{cases} y = f(x) \\ y = kx + n \end{cases}.$$

Во петиот чекор ги определуваме **интервалите на монотоност** за функцијата $y = f(x)$ и нејзините **локални екстреми**. Прво ја решаваме равенката $f'(x) = 0$, чии решенија се нарекуваат стационарни или критични точки и кои се потенцијални екстреми. Нагласуваме дека стационарни точки се и точките од областа на дефинираност на функцијата во кои изводната функција $f'(x)$ не е дефинирана. Потоа, со добиените стационарни точки, областа на дефинираност на функцијата ја делиме на подинтервали. Ако $f'(x) > 0$ на интервалот (a,b), тогаш на овој интервал функцијата $f(x)$ строго монотоно расте, а ако $f'(x) < 0$ на интервалот (a,b), тогаш на овој интервал дадената функција строго монотоно опаѓа. Притоа, за точката $x_0 \in D_f$ велиме дека е локален максимум (односно локален минимум) ако функцијата минувајќи низ $(x_0, f(x_0))$ се менува од монотоно растечка во монотоно опаѓачка (односно од монотоно опаѓачка во монотоно растечка). Стационарните точки не мора да се определуваат, ако директно ги определиме интервалите во кои изводната функција $f'(x)$ е позитивна (односно негативна), со што ги добиваме интервалите во кои функцијата строго монотоно расте (односно строго монотоно опаѓа).

Нагласуваме дека за разлика од претходната постапка каде што прво се определуваат интервалите на монотоност, а потоа и екстремните вредности, можеме да работиме и по обратен редослед, т.е. прво да ги определиме екстремните вредности, а потоа и интервалите на монотоност. Притоа користиме дека функцијата $y = f(x)$ има локален максимум (односно локален минимум) во стационарната точка $x_0 \in D_f$ ако $f''(x_0) < 0$ (односно $f''(x_0) > 0$). Ова важи само за стационарните точки кои се решенија на равенката $f'(x) = 0$.

Во последниот чекор ќе испитуваме **конкавност и конвексност** на функцијата $y = f(x)$ и постоење **превојна точка**. Прво ја решаваме равенката $f''(x) = 0$ чии решенија се потенцијални точки на превој. Нагласуваме дека потенцијални превојни точки се и точките во кои функцијата $f''(x)$ не е дефинирана. Потоа, со добиените потенцијални превојни точки, областа на дефинираност на функцијата ја делиме на подинтервали, и користиме дека, ако $f''(x) > 0$ на интервалот (a,b), тогаш на овој интервал функцијата е конвексна, а ако $f''(x) < 0$ на интервалот (a,b), тогаш на овој интервал дадената функција е конкавна. Притоа, за точката $x_0 \in D_f$ велиме дека е превојна ако функцијата минувајќи низ $(x_0, f(x_0))$, се менува од конвексна во конкавна или обратно. Потенцијалните превојни точки не мора да се определуваат, ако директно ги определиме интервалите во кои функција $f''(x)$ е позитивна (односно негативна), со што ги добиваме интервалите во кои функцијата е конвексна (односно конкавна).

1.2. ЗАПОЗНАВАЊЕ СО ПАКЕТОТ WOLFRAM MATHEMATICA

На почетокот треба да се запознаеме со основниот концепт на *Mathematica.* Пожелно е прво да се решат дадените готови примери, многу внимателно да се менува во дадените примери и да се увидат промените кои притоа настануваат, а потоа следува експериментирање со ваши примери. *Mathematica* е исклучително чуствителна на менување на голема со мала буква и користење специјални типови загради. Mathematica има добар Help со детално објаснети операции и прегледни примери од кои може многу да се научи.

Mathematica може да се користи како калкулатор на многу едноставен начин. За поелегантен запис ќе се користат опциите кои ги нуди менито Palettes-> Basic Math Assistant. Така се добива палета од наредби кои лесно може се користат со кликнување. За да се изврши некоја наредба се кликнува [Shift]+[Enter]. *Mathematica* сама го означува редоследот на влез (input) и излез (output).

Во следнава табела се дадени неколку наредби во пакетот Mathematica кои најчесто се користат при испитување на особините на функциите.

Табела 1: Некои наредби во пакетот Mathematica

Наредба	Опис на наредбата
Solve[izraz, prom]	Се користи за решавање равенка дадена со izraz, и истата се решава по променливата prom
NSolve[izraz, prom]	Ги дава приближните решенија на равенката дадена со izraz со променлива prom
D[*f*, *x*] или *f* '[*x*]	Го определува првиот извод на функцијата *f*(*x*)
D[f[x],{x, n}]	Го определува *n*-тиот извод на функцијата *f*(*x*)
Limit[f[x], x-> x_0]	Се користи за наоѓање гранична вредност на функцијата *f*(*x*) кога $x \to x_0$
Limit[f[x], x-> x_0, Direction->1]	Се користи за наоѓање лева гранична вредност на функцијата *f*(*x*) кога $x \to x_0^-$
Limit[f[x], x-> x_0, Direction-> -1]	Се користи за наоѓање десна гранична вредност на функцијата *f*(*x*) кога $x \to x_0^+$
Plot[f[x], {x, x_{min} , x_{max}}]	Се користи за цртање график на функцијата *f*(*x*) во интервалот [x_{min}, x_{max}]
Simplify[izraz]	Се користи за поедноставување на сложени изрази

2. КОРИСТЕЊЕ НА ПАКЕТОТ MATHEMATICA ЗА ИСПИТУВАЊЕ НА СВОЈСТВАТА И ЦРТАЊЕ ГРАФИК НА ФУНКЦИЈА

Пример 1. Да се испита текот и да се скицира графикот на функцијата

$$f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-1}.$$

Во Mathematica дефинираме функција на следниов начин

f[x_]:=(x^2-5 x+6)/(x^2-1).

Чекор 1. Област на дефинираност

Од учениците се бара да определат од кои елементарни функции е составена оваа функција и да утврдат дека нејзината област на дефинираност ќе ги содржи сите точки од реалната права за кои именителот е различен од нула. Тоа значи дека во областа на дефинираност припаѓаат сите реални броеви освен решенијата на равенката $x^2-1=0$. Применувајќи го пакетот Mathematica, равенката $x^2-1=0$ ја решаваме на следниов начин:

In[2]:= Solve[x^2-1==0,x]

Out[2]= {{x->-1},{x->1}}

Според тоа, $x \in R \setminus \{-1,1\}$.

Чекор 2. Пресеци со координатните оски

За наоѓање на пресекот со x –оската потребно е да се реши равенката $f(x)=0$.

In[3]:= Solve[(x^2-5x+6)/(x^2-1)= =0, x]

Out[3]= {{x->2},{x->3}}

Значи пресечните точки на графикот на дадената функција со x –оската се $(2,0)$ и $(3,0)$. Бидејќи $x=0\in D_f$, графикот има пресек и со y -оската. За да ја определиме оваа пресечна точка потребно е да се определи $f(0)$.

In[4]:= f[0]

Out[4]= -6

Од тука се добива уште една точка од графикот, а тоа е точката $(0,-6)$.

<u>Чекор 3</u>. Парност (односно непарност)

Областа на дефинираност $D_f=R\setminus\{-1,1\}$ е симетрична во однос на координатниот почеток, па може да испитаме дали функцијата е парна или непарна. Бидејќи

$$f(-x)=\frac{x^2+5x+6}{x^2-1}\neq\frac{x^2-5x+6}{x^2-1}=f(x)$$

заклучуваме дека функцијата не е ниту парна, ниту непарна. Оваа проверка во Mathematica може да се направи со помош на следнава наредба:

In[5]:= If[f[x]= =f[-x],Print["Funkcijata e parna"],
If[f[x]==-f[-x],Print["Funkcijata e neparna"]],
Print["Funkcijata e nitu parna, nitu neparna"]]

Out[5]= Funkcijata e nitu parna, nitu neparna

<u>Чекор 4</u>. Асимптоти

Ги бараме левата и десната граница на функцијата во точките $x=1$ и $x=-1$.

In[6]:= Limit[f[x], x-> 1, Direction-> -1]

Out[6]=\[Infinity]

In[7]:= Limit[f[x], x-> 1, Direction-> 1]

Out[7]= -\[Infinity]

Заклучуваме дека левата и десната граница на функцијата во точката $x=1$ се бесконечни, па според тоа правата $x=1$ е вертикална асимптота за функцијата. Аналогно се проверува и заклучува дека и правата $x=-1$ е вертикална асимптота за функцијата:

In[8]:= Limit[f[x], x-> -1, Direction-> -1]

Out[8]=- \[Infinity]

In[9]:= Limit[f[x], x-> -1, Direction-> 1]

Out[9]= \[Infinity]

Проверуваме дали функцијата има хоризонтални асимптоти барајќи ги границите во бесконечност.

In[10]:= Limit[f[x], x-> \[Infinity]]

Out[10]= 1

In[11]:= Limit[f[x], x-> -\[Infinity]]

Out[11]= 1

Заклучуваме дека правата $y=1$ е хоризонтална асимптота за функцијата.

Пресекот на хоризонталната асимптота со графикот на функцијата се добива со решавање на равенката $f(x)=1$:

In[12]:= Solve[f[x]==1, x]

Out[12]= {{x->7/5}}

од каде се добива дека хоризонталната асимптота и графикот на функцијата се сечат во точката $(7/5,1)$. Од постоењето на хоризонталната асимптота следува заклучокот дека коса асимптота не постои.

Чекор 5. Интервали на монотоност и екстреми

Прво, ќе го определиме првиот извод $f'(x)$ на дадената функција,

In[13]:= Simplify[f'[x]]

Out[13]= (5-14 x+5 x^2)/(-1+x^2)^2

Следен чекор е да се определат стационарните точки. Бидејќи изразот за првиот извод е дефиниран во сите точки од областа на дефинираност на функцијата, останува стационарните точки (доколку постојат) да ги добиеме со решавање на равенката $f'(x)=0$.

In[14]:= Solve[(5-14 x+5 x^2)/(-1+x^2)^2==0, x]

Out[14]= {{x->1/5 (7-2 Sqrt[6])},{x->1/5 (7+2 Sqrt[6])}}

Заради подобар увид на резултатите, решенија на оваа равенка ќе ги добиеме приближно користејќи ја следната наредба:

In[15]:= NSolve[(5-14 x+5 x^2)/(-1+x^2)^2==0,x]

Out[15]= {{x->2.3798},{x->0.420204}}

За интервалите на монотоност ја имаме следнава табела:

	$(-\infty,-1)$	$(-1, 0.42)$	$(0.42, 1)$	$(1, 2.38)$	$(2.38, \infty)$
$f'(x)$	In[16]:= f'[-3] Out[16]= 1.437	In[17]:=f'[0] Out[17]= 5	In[18]:=f'[0.5] Out[18]= -1.333	In[19]:= f'[2] Out[19]= -0.333	In[20]:=f'[5] Out[20]= 0.104
$f(x)$	расте	расте	опаѓа	опаѓа	расте

Според табелата добиваме дека во точката $x \approx 0.42$ функцијата има локален максимум, а во точката $x \approx 2.38$ функцијата има локален минимум. За определување на $f(0.42)$ и $f(2.38)$, соодветно користиме:

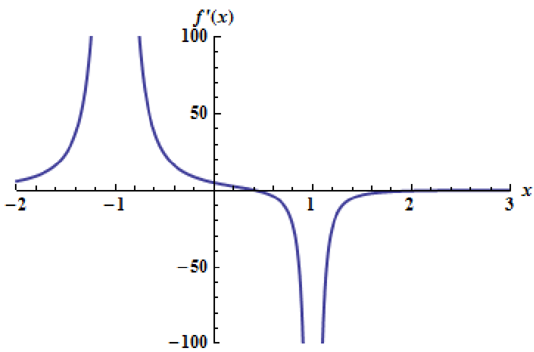
In[21]:= f[0.42]

Out[21]= -4.94949

In[22]:= f[2.38]

Out[22]= -0.0505102

Со ова ги добиваме точките $(0.42,-4.95)$ и $(2.38,-0.05)$.

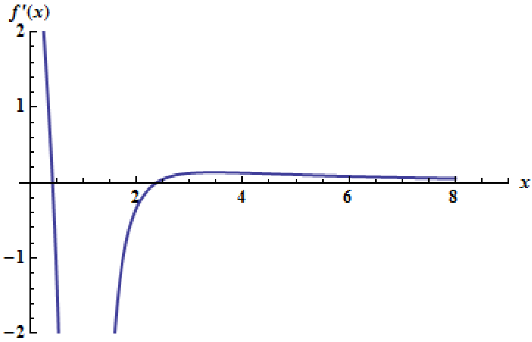


Забележуваме дека интервалите на монотоност може да се определат и директно со скицирање на графикот на изводната функција $f'(x)$ и определување на нејзиниот знак.

In[23]:= Plot[f'[x], {x, -2, 3},PlotRange-> {{-2, 3},{-100, 100}}, PlotStyle->{Thick}, AxesLabel->{“*x*”,”*f’(x)*”}, LabelStyle->Directive[12, Bold]]

Out[23]=

За подобро да ги определиме интервалите во позитивниот дел на *x*-оската, во кои горната изводна функција е позитивна односно негативна, горниот график ќе го “зумираме“ на сегментот [0,8]:



Од горните графици може да се види дека првиот извод е позитивен на интервалите $(-\infty,-1)$, $(-1,0.42)$ и $(2.38,\ \infty)$, а е негативен на интервалите (0.42, 1) и (1, 2.38).

Чекор 6. Интервали на конкавност и конвексност и превојни точки

Вториот извод на функцијата се добива со наредбата: Simplify[D[f(x),{x,2}]] и тој е

$$f''(x) = -\frac{2(-7+15x-21x^2+5x^3)}{(-1+x^2)^3}.$$

Ова значи дека вториот извод е дефиниран на целата област на дефинираност на функцијата. За да го определиме потенцијал-ниот превој, ја решаваме равенката $f''(x)=0$.

In[24]:= NSolve[f"[x]==0,x]

Out[24]= {{x->3.44762},{x->0.37619+0.514352 I},{x->0.37619- 0.514352 I}}

	$(-\infty,-1)$	$(-1,\ 1)$	$(1,\ 3.448)$	$(3.448,\ \infty)$
$f''(x)$	In[25]:= N[f"[-3]] Out[25]= 1.469	In[26]:=N[f"[0]] Out[26]= -14	In[27]:=N[f"[3]] Out[27]= 0.0625	In[29]:=N[f" [5]] Out[29]= -0,024
$f(x)$	конвексна	конкавна	конвексна	конкавна

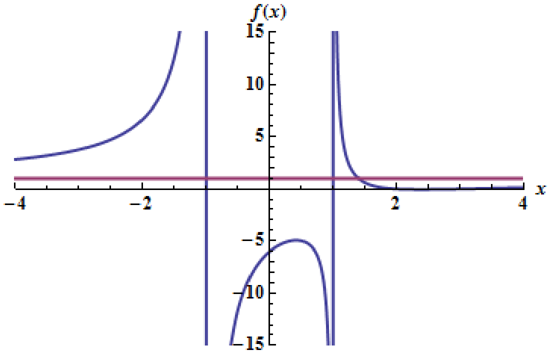
Притоа, јасно е дека точката $(3.448, 0.06)$ е превој на функцијата.

Графикот на функцијата на сегментот [-4, 4] заедно со нејзината хоризонтална асимптота се добива со следнава наредба:

In[30]:= Plot[{f[x],1},{x,-4,4},PlotRange-> {{-4,4},{-15,15}}, PlotStyle->{Thick}, AxesLabel->{“*x*”,”*f(x)*”}, LabelStyle->Directive[12, Bold]]

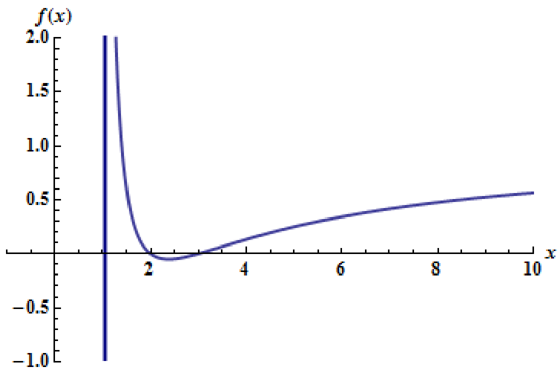
Out[30]=

За подобро да ја забележиме превојната точка $(3.448, 0.06)$, како и пресеците на графикот со *x*-оската, ќе го “зумираме“ графикот на сегментот [1,10]:



In[31]:=Plot[f[x],{x,1,10},PlotRange->{{1,10},{-1,2}},PlotStyle->{Thick},
AxesLabel->{“*x*”,”*f(x)*”}, LabelStyle->Directive[12, Bold]]

Out[30]=



Пример 2. Да се испита текот и да се скицира графикот на фукцијата

$$f\left(x\right) = \cos x + \tfrac{1}{2}\cos 2x \ .$$

Функцијата ќе ја дефинираме со наредбата

f[x_]:=Cos[x]+(1/2)*Cos[2x]

Јасно е дека дадената функција е периодична како збир од две периодични функ-ции. Нејзиниот основен период може да се најде како најмал заеднички содржател од основните периоди на функциите-собироци. Периодичноста на оваа функција во Mathematica може да се тестира со следнава наредба која во потврден случај го дава и основниот период на функцијата.

In[2]:= Periodic`PeriodicFunctionPeriod[f[x]],x]

Out[2]= 2 \[Pi]

<u>Чекор 1.</u> Област на дефинираност: $x \in R$. Бидејќи функцијата е периодична со основен период 2π, доволно е таа да се разгледува и скицира на интервалот $[-\pi, \pi]$, а потоа периодично да се продолжи. Да забележиме дека и пакетот Mathematica резултатите ги дава на тој интервал.

<u>Чекор 2.</u> Пресеци со координатните оски

За наоѓање на пресекот со x-оската ја решаваме равенката $f(x)=0$. При користење на наредбата Solve[] се добиваат решенија во тригонометриски облик, па затоа ќе ја користиме наредбата NSolve[] со која ќе ги добиеме приближно решенијата на равенката $f(x)=0$.

In[3]:= NSolve[f[x]==0,x]

During evaluation of In[29]:= NSolve::ifun: Inverse functions are being used by NSolve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. >>

Out[3]= {{x->-3.14159+0.831443*i*},{x->-1.19606},{x->1.19606},
{x->3.14159- 0.831443*i*}}

Добиваме две реални решенија, што значи дека графикот на функцијата ја сече x-оската на интервалот $[-\pi,\pi]$ во точките $(-1.196,0)$ и $(1.196,0)$. За да ја определиме пресечната точка со y-оската ја определуваме вредноста на функцијата во точката $x=0\in D_f$, т.е.

In[4]:= f[0]

Out[4]= 3/2

Од тука добиваме уште една точка од графикот, $(0,3/2)$.

Чекор 3. Парност (односно непарност)

In[5]:= If[f[x]= =f[-x],Print[“Funkcijata e parna”],
If[f[x]==-f[-x],Print[“Funkcijata e neparna”]],
Print[“Funkcijata e nitu parna, nitu neparna”]]

Out[5]= Funkcijata e parna

Од овде заклучуваме дека функцијата е парна. До овој заклучок може да се дојде и ако се искористи фактот дека дадената функцијата е збир од две парни функции.

Чекор 4. Асимптоти

Вертикална асимптота на дадената функција не постои бидејќи функцијата е дефинирана на целата реална права. Од следниве гранични вредности

In[6]:= Limit[f[x],x-> \[Infinity]]

Out[6]= Interval[{-(3/2),3/2}]

In[7]:= Limit[f[x],x->- \[Infinity]]

Out[7]= Interval[{-(3/2),3/2}]

следува дека хоризонтална асимптота не постои. Од тоа што

In[8]:= k=Limit[f[x]/x, x-> \[Infinity]]

Out[8]= 0

In[9]:= Limit[f[x] /x, x-> -\[Infinity]]

Out[9]= 0

заклучуваме дека не постои ниту коса асимптота.

Чекор 5. Интервали на монотоност и екстреми

In[10]:= Simplify[f'[x]]

Out[10]= -Sin[x]-Sin[2 x]

Бидејќи и за оваа функција, изразот за првиот извод е дефиниран во сите точки од областа на дефинираност, останува стационарните точки (доколку постојат) да ги добиеме со решавање на равенката $f'(x)=0$.

In[11]:= Solve[f'[x]==0,x]

During evaluation of In[36]:= Solve::ifun: Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. >>

Out[11]= {{x->0},{x->-2Pi/3},{x->2 Pi3}}

	$(-\pi,-2\pi/3)$	$(-2\pi/3,0)$	$(0,2\pi/3)$	$(2\pi/3,\pi)$
$f'(x)$	In[13]:= f'[-5]//N Out[13]= -1.503	In[14]:= f'[-1]//N Out[14]= 1.75	In[15]:= f'[1]//N Out[15]= -1.75	In[17]:= f'[3] Out[17]= 0.138
$f(x)$	опаѓа	расте	опаѓа	расте

Според табелата добиваме дека во точките $x=-2\pi/3$ и $x=2\pi/3$ функцијата има локален минимум, а во точката $x=0$ функцијата има локален максимум. Притоа,

In[20]:= f[-2*Pi/3]
Out[20]= -3/4

In[21]:= f[2*Pi/3]
Out[21]= -3/4

In[21]:= f[0]
Out[21]= 3/2

Со ова ги добиваме точките $(-\frac{2\pi}{3},-\frac{3}{4})$, $(\frac{2\pi}{3},-\frac{3}{4})$ и $(0,\frac{3}{2})$.

Чекор 6. Интервали на конкавност и конвексност и превојни точки

Вториот извод на функцијата е $f''(x)=-\cos(x)-2\cos(2x)$ и тој е дефиниран во секоја точка од областа на дефинираност на дадената функција. Затоа, за да го определиме потенцијалниот превој, ја решаваме равенката $f''(x)=0$.

In[22]:= NSolve[D[f[x],{x,2}]==0,x]

During evaluation of In[9]:= NSolve::ifun: Inverse functions are being used by NSolve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. >>

Out[22]= {{x->-2.57376},{x->-0.935929},{x->0.935929},{x->2.57376}}

	$(\pi,2.574)$	(-2.574, -0.936)	(-0.936, 0.936)	(0.936, 2.574)	$(2.574,\pi)$
$f''(x)$	In[23]:= N[f''[-3]] Out[23]= -0.93	In[24]:= N[f''[-1]] Out[24]= 0.29	In[25]:= N[f''[0]] Out[25]= -3	In[26]:= N[f''[1]] Out[26]= 0.29	In[27]:= N[f''[3]] Out[27]= -0.93
$f(x)$	конкавна	конвексна	конкавна	конвексна	конкавна

Од тоа што

In[28]:= f[-2.574]
Out[28]= -0.63221

In[29]:= f[-0.936]
Out[29]= 0.444679

In[30]:= f[0.936]
Out[30]= 0.444679

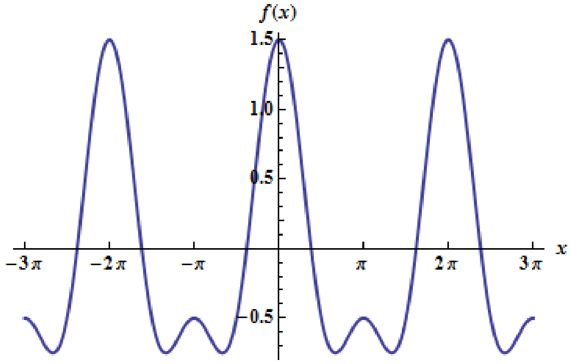
In[31]:= f[2.574]
Out[31]= -0.632215

определуваме четири точки на превој: (-2.574,-0.632), (-0.936, 0.445), (0.936, 0.455) и (2.574, -0.632).

За скицирање на графикот на дадената функција на сегментот $[-3\pi,3\pi]$ ја користиме наредбата Plot[]:

In[32]:= Plot[f[x],{x,-3*Pi, 3*Pi}, PlotStyle->{Thick}, AxesLabel->{"*x*","*f(x)*"},
Ticks->{Table[n*Pi,{n,-3,3}],Automatic},LabelStyle->Directive[12, Bold]]

Out[32]=



Пример 3. Да се испита текот и да се скицира графикот на фукцијата

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x-1}}$$

Функцијата ќе ја зададеме со наредбата

```
f[x_]:=x*Exp[1/(x-1)]
```

<u>Чекор 1.</u> Област на дефинираност

За определување на областа на дефинираност потребно е именителот во експонентот да е различен од нула. Решавајќи ја равенката $x-1=0$ добиваме:

In[2]:= Solve[x-1==0,x]

Out[2]= {{x->1}}

од каде следува $x \in R \setminus \{1\}$.

<u>Чекор 2.</u> Пресеци со координатните оски

За наоѓање на пресекот со x-оската потребно е да се реши равенката $f(x) = 0$.

In[3]:= Solve[f[x]==0, x]

During evaluation of In[24]:= Solve::ifun: Inverse functions are being used by Solve, so some solutions may not be found; use Reduce for complete solution information. >>

Out[3]= {{x->0}}

Притоа ја добиваме точката (0,0) која е и пресечна точка на графикот со y-оската.

<u>Чекор 3.</u> Парност (односно непарност)

In[5]:= If[f[x]= =f[-x],Print["Funkcijata e parna"],
If[f[x]==-f[-x],Print["Funkcijata e neparna"]],
Print["Funkcijata e nitu parna, nitu neparna"]]

Out[5]= Funkcijata e nitu parna, nitu neparna

Заклучуваме дека функцијата не е ниту парна, ниту непарна.

<u>Чекор 4.</u> Асимптоти

In[6]:= Limit[f[x],x-> 1, Direction-> 1]

Out[6]= 0

In[7]:= Limit[f[x],x-> 1, Direction-> -1]

Out[7]= \[Infinity]

Бидејќи само граничната вредност кога x тежи кон 1 од десно е бесконечна, заклучуваме дека правата $x = 1$ е десна вертикална асимптота.

In[8]:= Limit[f[x],x-> \[Infinity]]

Out[8]= \[Infinity]

In[9]:= Limit[f[x],x-> -\[Infinity]]

Out[9]= -\[Infinity]

Бидејќи ниедна од горните гранични вредности не е конечна, заклучуваме дека хоризонтална асимптота не постои. Испитуваме постоење на коса асимптота:

In[11]:= k=Limit[f[x]/x,x-> \[Infinity]]
Out[11]= 1

In[12]:= n=Limit[f[x]-k*x,x-> \[Infinity]]
Out[12]= 1

Аналогни резултати се добиваат за горните лимеси и кога $x \to -\infty$ што значи дека правата $y = x + 1$ е коса асимптота.

Пресеците на косата асимптота со графикот на функцијата (доколку постојат) се добиваат со решавање на равенката $f(x) = x + 1$.

In[12]:= Solve[f[x]==x+1, x]
Out[12]= Solve::nsmet: This system cannot be solved with the methods available to Solve.

од каде се добива дека косата асимптота и графикот на функцијата немаат заеднички точки.

Чекор 5. Интервали на монотоност и екстреми

In[13]:= Simplify[f'[x]]
Out[13]= (E^(1/(-1+x)) (1-3 x+x^2))/(-1+x)^2

Стационарни или критични точки се:

In[14]:= NSolve[f'[x]==0,x]
Out[14]= {{x->0.381966},{x->2.61803}}

	$(-\infty, 0.38)$	(0.38, 1)	(1, 2.62)	(2,62, ∞)
$f'(x)$	In[15]:= f'[0] Out[15]= 1/e	In[16]:= f'[0.5] Out[16]= -0.130	In[17]:= f'[2] Out[17]= -e	In[18]:= f'[3] Out[18]= Sqrt[e]/4
$f(x)$	расте	опаѓа	опаѓа	расте

Со ова ја добиваме точката $(0.38, 0.076)$ во која функцијата има локален максимум и точката $(2.62, 4.857)$ во која функцијата има локален минимум.

Чекор 6. Интервали на конкавност и конвексност и превојни точки

За да го пределиме потенцијалниот превој, ја решаваме равенката $f''(x) = 0$.

In[19]:= NSolve[f''[x]==0,x]
Out[19]= {{x->0.666667}}

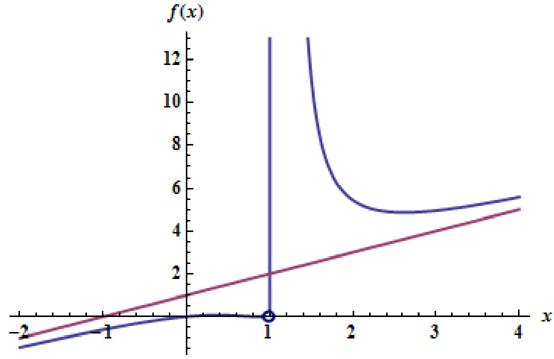
	$(-\infty, 0.667)$	(0.667, 1)	(1, ∞)
$f''(x)$	In[20]:=N[f'' [0]] Out[20]= -0.736	In[21]:= N[f'' [0.8]] Out[21]= 1.68	In[22]:= N[f'' [3]] Out[22]= 0.72
$f(x)$	конкавна	конвексна	конвексна

In[23]:= f[0.666667]
Out[23]= 0.0331913

Од табелата се определува дека точката $(0.667, 0.033)$ е превој.

Графикот на функцијата се добива со следната наредба:

In[24]:= Plot[{f[x], x+1}, {x, -2, 4}]
Out[24]=

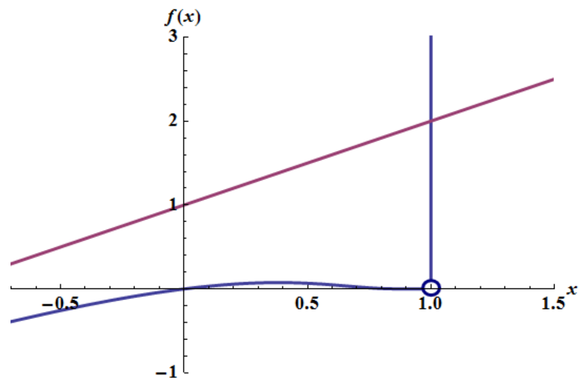


За подобро да ја забележиме превојната точка $(0.667, 0.033)$, ќе го “зумираме“ графикот на сегментот [-0.6,1].

Забелешка. Јасно е дека испитување на периодичност има смисла само кај тригонометриските функции, сепак ќе направиме тест со кој ќе потврдиме дека дадената функција не е периодична.

In[5]:= Periodic`PeriodicFunctionPeriod[x*Exp[1/(x-1)],x]

Out[5]= $Failed



3. Заклучок

Современиот начин на живеење, во кој најчесто нема доволно време за темелно и долготрајно посветување на една активност, се рефлектира и врз односот на учениците кон пристапот до информациите и нивната обработка. Учениците сакаат да дојдат до информациите брзо, по можност од различни извори, а се покажува дека се најпродуктивни кога се ангажирани со повеќе активности одеднаш. Примената на компјутерите во наставата може во голема мера да ги задоволи овие потреби на учениците. Користењето на програмскиот пакет Mathematica го олеснува испитувањето на својствата на функциите на тој начин што овозможува брзо и едноставно да се најдат решенијата на равенките со кои се определуваат можните точки на прекин, можните екстреми, односно можните превојни точки на графикот на функцијата. Определувањето на граничните вредности со користење на Mathematica може да им помогне на учениците брзо и ефикасно да го испитаат поведението на функцијата во околина на точките на прекин, како и поведението на функцијата во бесконечност, односно да ги определат асимптотите на графикот на функцијата. Конечно, визуелизацијата, односно скицирањето на графикот на функцијата со помош на овој пакет, овозможува синтеза на претходно добиените резултати.

Користењето на компјутерите како средство за стекнување вештини за современите облици на рационално учење и самостојно истражување е една од примарните цели на современата настава. Наместо знаење кое се сведува на голо репродуцирање на податоците добиени од наставникот, односно учебникот, на овој начин се развиваат способности за нивно суштинско разбирање и примена во реалниот свет.

Литература

[1] Dagan M., *Psyhological aspects of students thinking at the stage of graphical representation in the process of investigation of functions*, Proceedings of PME 30, 2006.

[2] http://www.wolframalpha.com/

[3] http://www.wolfram.com/mathematica/

[4] С. Геговска-Зајкова, К. Хаџи-Велкова Санева, *Диференцијално и интегрално сметање на реални функции од една реална променлива*, интерна скрипта, Факултет за електротехника и информациски технологии, Скопје, 2013.

[1)]Факултет за електротехника и информациски технологии,
Универзитет Св. Кирил и Методиј Скопје, Македонија
E-mail address: ksanja@feit.ukim.edu.mk
[2)]Факултет за електротехника и информациски технологии,
Универзитет Св. Кирил и Методиј Скопје, Македонија
E-mail address saneva@feit.ukim.edu.mk
[3)]Факултет за електротехника и информациски технологии,
Универзитет Св. Кирил и Методиј Скопје, Македонија
E-mail address: szajkova@feit.ukim.edu.mk