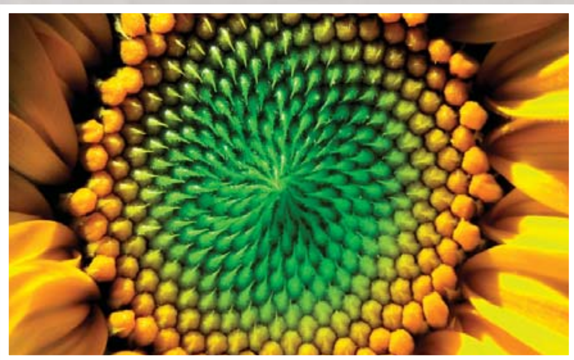
# СИГМА

МАТЕМАТИЧКО СПИСАНИЕ ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА



ГОД 35 1
2015 /2016 105

# Математичко списание СИГМА
# за учениците од средните училишта

**ISSN 1409-6803** **UDC51(497.17)**

**СОПСТВЕНИК И ИЗДАВАЧ:**

**СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА**

**Првиот број на СИГМА е отпечатен во јануари 1979 година.**

**Излегува во четири броја во текот на една учебна година.**

Цената на еден примерок е 90 денари. Претплатата за четирите броја е 300 денари.

**Претплатата и порачките можете да ги испратите на адреса:**

Сојуз на математичарите на Македонија
Бул. Александар Македонски б.б. Скопје П.Ф. 10
Тел. (02) 3116053 (од 9 до 15 часот)
Жиро сметка 3000 0000 1276 071, ЕДБ 4030 99 11 21 596,
Депонент: Комерцијална банка - Скопје,
СМ на Македонија, за СИГМА.

---

Учениците кои ќе испратат точни решенија на некои од задачите (од рубриките задачи, конкурсни задачи, наградна задача и задача на бројот) ќе бидат наградени со пригодна награда и нивните имиња ќе бидат објавени во СИГМА. Наградата ќе зависи од бројот на точно решени задачи. Особено ќе се вреднува решавањето на наградната задача и задачата на бројот.

Сите коментари, забелешки, Ваши предлози (статии, занимливости, задачи, работа со талентирани ученици и друго) за објавување во СИГМА, и решенија на задачите, можете да ги испратите на e-mail: **gorgim@pmf.ukim.mk**

---



---

Со мислење на Министерство за образование и наука бр. 11-914/3 од 01.03.2012 година се одобрува употреба на СИГМА во средните училишта.

**Ирена Стојковска**
**Скопје**

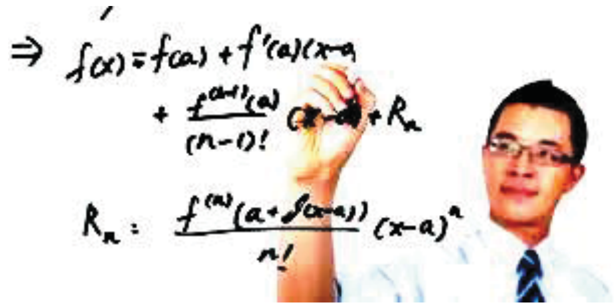
## КАРИЕРНИ МОЖНОСТИ ЗА МАТЕМАТИЧАРИТЕ

Не ретко сте ги слушнале прашањата од типот:

* Зошто ми треба математиката?

* Што може да работам како математичар, освен во настава?

Во продолжение ќе се обидеме да дадеме одговор на овие и многу други слични прашања и да ги доловиме кариерните можности кои ги нуди математиката.



Оваа статија е поттикната главно од се уште актуелната вест дека *професијата математичар е на врвот на листата со најдобри професии за 2014 година*. Листата е направена од страна на CareerCast, врз база на повеќе критериуми, како примањата, изгледите за вработување, стресот и слично, па така професијата математичар е и со најголема стапка за развој во наредните 10-тина години.

Зошто е тоа така? *Светот станува се поматематички, влегува во нова ера на броевите*. Потребата од математичарите е се поголема. Математичарите денес помагаат во лабараториите при изработка на нов медикамент, учествуваат при дизајнирањето на авионите и вселенските летала, креираат ефикасни алгоритми за процесирање на голем број на податоци, им овозможуваат на компаниите да имаат индивидуален пристап кон секој корисник, истовремено зголемувајќи ја ефикасноста на компаниите, и задоволството на корисниците. Со еден збор, математиката учествува во поставувањето на новите стандарди на современиот начин на живеење. Така, според изјавата на CareerCast, државните и приватните компании, владините организации, образовните институции и непрофитабилните сектори, сите бараат да вработуваат *математичари*, најмногу заради се поголемата популарност на математичките принципи и концепти во работата.

Имено, *математичарите се издвојуваат со своето аналитичко расудување, што е резултат на континуираното решавање на проблеми*.

Од друга страна, секој ученик нема да стане математичар, но сепак има потреба од математиката. Зошто и како? Исто како што телото станува посилно кога редовно вежбаме со трчање, скокање, кревање тегови, така умот станува посилен со редовно практицирање на математиката - решавање на задачи, разбирање на нови идеи, и докажување на тврдења. Сите спортисти не креваат тегови кога се натпреваруваат, но имањето на силни мускули им помага во сите спортови. Голем број од луѓето не користат напредна математика во нивната работа, но да се биде попаметен помага во се што ќе работите.

*А што може да работи еден математичар?* Во продолжение следат описи на разните професии на математичарите, кои се поделени во две групи: *едукатори* и *практичари*:

**Едукатори**

*** Професор во основно/средно училиште**

Традиционално најзастапена професија на математичарите, која се уште е актуелна, барана, но и најодговорна. Професорите по математика во основно и средно училиште на себе го имаат целиот терет и голема одговорност, *да ги поставаат темелите на математичките знаења кај идните генерации и најважно да ја всадат љубовта кон математиката*. Редовното поставување на прашања за умствено загревање - решавање на задачи „на памет“, со кои се „решаваат“ проблеми од секојдневниот живот, е патот кој води кон оваа цел. Задавањето на задачи и активности за час и за дома, кои потоа професорот ќе ги провери со активна дискусија за истите, допринесува за стекнување на навика за решавање на математички задачи - умствена активност која помага при развивањето на аналитичкото мислење.

Успешен професор по математика во основно и средно училиште треба да има солидни познавања од областите алгебра, геометрија и тригонометрија, како и аналитичка геометрија и калкулус, а најновите наставни програми вклучуваат во себе предмети од областа на компјутерско програмирање, линеарна алгебра, веројатност и статистика, и нивни примени.

Често носителите на дипломата професор по математика во основно/средно образование, ја наоѓаат својата професија како *тутори по математика*, попозната како „професори кои даваат часови по математика“, помагајќи им на учениците и студентите, индивидуално или во групи, полесно да ги совладаат математичките содржини.

*** Асистент на факултет**

Скоро сите факултети во своите студиски програми имаат предмети од областа на математиката. Математичките предмети се изучуваат од теориски и практичен аспект. Практикувањето на теориските знаења преку изведување на теориски или лабараториски вежби е една од главните работни задачи на асистентите по математички предмети. Паралелно со изведувањето на вежбите, асистентите го надоградуваат и продлабочуваат своето знаење во одредена област од математиката, преку научни истражувања, најчесто водени од ментор кој е универзитетски професор.

Да се биде успешен во оваа професија потребни се суштински познавања на основните математички дисциплини, продлабочени знаења од областите на математичките предмети по кои асистентот изведува вежби, и умешност знаењата да се пренесат на студентите. Подготовките за часовите, правењето селекција на задачите кои треба да ги презентираат пред студентите, составувањето на испитните комбинации, му помагаат на асистентот во развивањето на неговата креативност и истражувачки дух, кои се потребни при научните истражувања.

Студентите кои се истакнуваат со надпросечни резултати за време на нивните студии имаат можност да бидат ангажирани како „*демонстратор*“’ и во текот на завршните години од првиот циклус студии, како и за време на вториот циклус студии. Работните задачи на демонстраторите се идентични со оние на асистентите.

*** Универзитетски професор**

Математичките знаења акумулирани во текот на годините, најдобро доаѓаат до израз во професијата универзитетски професор од областа на математиката и математичките науки. Одговорноста за реализирање на наставата по доделените наставни предмети му дава можност на универзитетскиот професор не само да ја креира самиот содржината на предметот, туку и да креира нови предмети заедно со наставниот колегиум на факултетот, па и нови студиски програми, откако претходно согледале дека општеството има потреба од истите.

Успешните универзитетски професори при презентирање на математичката теорија пред студентите, секојпат наоѓаат нов и интересен начин за изложување на оддамна откриените математички законитости, нивна примена кај другите науки, како и примена во секојдневниот живот. Универзитетските професори преку менторство во изработка на семинарски, дипломски работи, магистерски работи, докторски дисертации ги воведуваат студентите во научните истражувања. Најголемиот број на научници во светот се универзитетски професори, кои допринесуваат во развојот на науката, и општеството во целост.

Соработката на универзитетските професори со компаниите од стопанството е од огромно значење за развојот на општеството. Преку учества во заеднички проекти, спроведување на семинари, тренинзи и предавања пред вработените во компаниите, од интерес на самите компании, универзитетските професори помагаат во подобрата информираност и доквалификацијата на кадрите, со што се зголемува продуктивноста на компаниите. Од друга страна, проблемите со кои се соочуваат компаниите, претставуваат научен предизвик достоен за разгледување. Универзитетските професори често учествуваат во тимовите кои ги наоѓаат решенија на проблемите на компаниите.

**Практичари**

*** Статистичар**

Статистиката е истовремено и широко применета и силно теориска област. Статистичарот е математичар кој собира и проучува (анализира) податоци со цел подобро да го разбереме нашиот свет и да се анализира некој од неговите проблеми. Затоа, оваа професија е позната и како *статистички аналитичар*.

Статистичарите главно работат со експерти од други области, па затоа комуникациските вештини се од големо значење за статистичарите. Работата со податоци изискува и одредено познавање на статистички софтвер - компјутерски програми за обработка и анализа на податоците. Статистичарите може да реализираат истражувања, создаваат модели, креираат тестови, го контролираат квалитетот на статистичките истражувања.

Степенот на образование кој статистичарот го поседува, често има влијание на видот на работата кој тој е способен да ја извршува. Многу често, работодавците ги охрабруваат статистичарите да го продолжат своето образование, со стипендирање на нивните понатамошни студии или со организирање на тренинзи за доквалификација на своите кадри.

Во моментот, зголемена е побарувачката на статистичари на пазарот за работна сила. Овој факт можеби би допринел многумина да се определат за оваа професија, но и исто така тоа ја прави професијата поконкурентна.

*** Актуар**

Математиката е силно орудие во полето на актуарството. Актуарството вклучува во себе многу меѓусебно поврзани дисциплини, како веројатност и статистика, финансии и економија. Актуарот има задача да креира корисни статистики кои би им помогнале на компаниите да ги предвидат идните случувања. Актуарот поседува огромна количина на математички вештини, ужива во решавањето на проблеми, тој е исклучително љубопитна личност кој сака да истражува. Покрај овие карактеристики, актуарот мора да биде во тек со најновите трендови и актуелната бизнис клима, но исто така да биде запознаен и со најновите случувања од полето на општествените науки, правото и економијата. Сето ова е потребно, за да актуарот биде способен да ја измоделира со математички модел моменталната состојба, со цел да може да изработи значајни предвидувања. Актуарите се барани од осигурителните компании, пензиските фондови, консултантските фирми, претпријатијата и владините агенции.

*** Финансиски аналитичар**

Финансии е поле кое се занимава со проучување на начинот на работа на компаниите со монетарните ресурси во текот на времето, земајќи го во предвид можниот ризик при работењето. Финансиските аналитичари често препорачуваат кои активности треба компанијата да ги превземе (купување или продажба на акции) врз база на сегашната нејзина моќ и предвидената моќ во блиска иднина. Тоа се постигнува со градење на математички модели кои би го објасниле и предвиделе однесувањето на финансиските пазари.

Финансиските аналитичари се вработуваат во банки, инвеститорски фирми и осигурителни компании. Да се биде успешен финансиски аналитичар, потребно е праќење на дневните случувања, движењата на пазарите и пратење на индустриските профили во финансиските списанија, и книги. Можни се и патувања, учества на општествени настани и конференции.

*** Програмер**

Математичарите многу често се наоѓаат себе си и во полето на програмирањето. Пишувањето на програма е слично на решавањето на една математичка задача. Секоја програма за дадени влезни податоци, дава одреден излез, исто како што решението на математичката задача дава одговор. Задача на програмерот е да го презапише алгоритмот за решавање на некој проблем на јазик разбирлив за комјутерите, наречен програмски јазик. Учењето на програмски јазици е како учењето на странските јазици, треба да се совладаат резервираните зборови (вокабуларот), синтаксите на наредбите (граматиката), и понатаму се останува на континуирано практикување на јазикот - програмирање.

Програмерите со продлабочен интерес и знаења од комјутерските науки, ја наоѓаат и својата професионална определба како *софтвер инженери*. Софтвер инженерот генерално дизајнира и пишува софтвер кој не е нумерички ориентиран. Големите корпорации задолжително вработуваат софтверски инженери чија задача е развивање на сопствен софтвер на самата корпорација.

*** Нумеричар**

Нумеричар (computational scientist) е математичар кој ги интерпретира проблемите произлезени од физичките науки и инженерството во математичка форма и развива математички решенија на овие проблеми, најчесто со апроксимации, користејќи напредни познавања од диференцијално сметање, оптимизациони методи, комјутерско моделирање и симулации. Нумеричарите користат моќни компјутери при решавањето на овие проблеми, затоа покрај математичките знаења, тие поседуваат и програмерски вештини. Комјутерските симулации и моделирањето денес се користат во секоја научна област и инженерството. Метереолозите го користат компјутерското моделирање да го предвидат текот на климатските промени, за да ги разберат феномените како ураганите и торнадата. Авијатичарите користат симулации за протокот на воздухот околу леталото, и при тоа да го дефинираат начинот на летање во екстремни услови. Механичките инженери, користат симулации за автомобилски судари се со цел да дизајнираат побезбедни возила. Но, исто така компјутерски симулации користат и астрономерите и астрофизчарите, биолозите и хемичарите.

*** Аналитичар за операциони истражувања**

Операционите истражувања (ОИ) се меѓудисциплинарна гранка од математиката која користи математички методи за донесување на подобри одлуки. Аналитичарите за ОИ им помагаат на компаниите да ги координираат своите активности на најефикасен начин, применувајќи научни методи и математички принципи при решавањето на ваквиот вид организациони проблеми - како да се сработи работната задача побрзо или поевтино, поквалитетно или поефикасно. Понекогаш ОИ аналитичарите доаѓаат до нови методи, пристапи за решавање на конкретниот проблем.

Аналитичарите за ОИ со користење на математички модели го претставуваат конкретниот проблем, а потоа со помош на оптимизациони методи наоѓаат оптимално, или приближно оптимално решение. Најчесто оптимизацијата се изведува во насока на минимизирање на трошокот и максимизирање на профитот. Некои од работните задачи на ОИ аналитичарите се: изработка на распореди (часови, автобуски линии, спортски настани), одржување на инвентарот, менаџирање со ресурсите (човечки, материјални), донесување одлуки (безбедност, инвестиции).

*** Математичар истражувач**

Математичарот може да истражува, како на полето на чистата математика, така и во полето на применетата математика. *Истражувањето нема граници.* Една од причините зошто математичарите истражуваат е во убавината на апстрактните облици кои ги користат, и во задоволството на откривање на не толку очигледни аспекти на овие сложени облици. Постојат многу примери, кога едно математичко откритие треба да почека неколку години, децении, за да биде искористено, применето, па дури и да стане многу значајно. На пример, долго време откритијата во Теоријата на броеви се сметале за неприменливи, и единствена причина за истражувањата во оваа област била откривањето на самата убавина на Теоријата на броеви. Сето ова се има сменето со раѓањето на модерната енкрипторна теорија, која е клучен дел од е-трговијата и силно се потпира на својствата на простите броеви и другите концепти на Теоријата на броеви.

Математички занимања надвор од образованието, математичарите истражувачи може да ги најдат во центрите за истражување и развој на големите корпорации, како и разни владини институции - воените и безбедносни агенции, агенцијата за енергетика, националните лаборатории. За овие позиции, најчесто се бараат повиски дипломи, како доктор на математички науки.

Останати професионални определби за *математичарите – практичари*:

*** Биоматематичар -** Моделирањето на природните и биолошки процеси, со користење на математички техники и алатки (дифернецијални равенки, динамички системи и слично) е задача на биоматематичарот. Резултатите кои тој ги добива се применуваат во неуробиологијата, моделирање на епидемии, генетика на популацијата и слично.


*** Криптограф –** Криптографијата е наука за сокриените информации. Таа се смета дека е меѓудисциплина на математиката и комјутерските науки. Криптографите учествуваат во изработка на безбедни банкарски електронски картички (ATM cards), комјутерски лозинки и слично.

*** Кариери во областа бизнис и менаџмент** - Математиката е вградена компонента во професиите од областа на бизнис и менаџмент. Калкулус, веројатност и статистика и други математички области се користат секојдневно во овој вид на професии. Математичарите кои избираат ваков вид на кариера често поседуваат и дополнителни дипломи од завршени степени на образование од области како бизнис, менаџмент, компјутерските науки, маркетинг.

*** Кариери во инженерски области** - Инженерството се потпира на многу математички дисциплини како нумерички методи, линеарна алгебра, напреден калкулус, веројатност и статистика. Инженерите често работат во групи и така доаѓаат до нови идеи за производи кои би олесниле одреден аспект од живеењето и би донеле поголем профит на компаниите.

**Литература**

[1] The Best Jobs of 2014,
http://www.careercast.com/jobs-rated/best-jobs-2014
[2] Што може да работи еден математичар?,
http://kariera-im-pmf.weebly.com/sto-moze-da-raboti-eden-matematicar.html
[3] Be An Actuary, http://www.beanactuary.org/
[4] Consider an Analytics/OR Career,
https://www.informs.org/Build-Your-Career/Consider-an-Analytics-OR-Career

**Елена Хаџиева**
**Душан Петковски**

# МАТЕМАТИКАТА ВО МАГИЈАТА – 4. дел

Во овој број на Сигма ќе ви го претставиме последниот трик кој го подготвивме за вас, трикот со 21 карта. Веројатно го знаете од детството... но дали сте се запрашале кое е неговото математичко обаснување? Читајте внимателно!

## 1. Трикот со 21-на карта

На што помислуваме кога некој ќе извади 21 карта од шпил карти? Веднаш ни текнува на стариот добар трик кој го имаме видено илјадници пати. Сите знаеме дека е „математички трик“, сите знаеме дека картата во средина после третото отварање на картите ќе биде замислената карта и сите знаеме дека не е најзабавниот трик за гледање. Но колкумина од нас знаат зошто и како функционира трикот? Зошто после 3 отварања на картите, замислената карта се наоѓа во средина? Која е математиката зад сето тоа?

Затоа, сега ќе објасниме што се случува во мистериозната задпина на трикот со 21 карта.

*Трикот во очите на публиката*

Магионичарот вади 21 карта од шпил карти и ги реди во 3 колони по 7 карти. Го замолува соговорникот да замисли една карта и после три прашања, магионичарот ја открива замислената карта.

*Објаснување на трикот*

За оние кои не знаат како се прави трикот, следи детално објаснување за истиот. Извадете 21 карта, распоредете ги во 3 колони од по 7 карти на следниов начин: прво трите карти од првата редица, па трите карти од втората редица,..., на крај трите карти од седмата редица. Замислете една карта.

Соберете ги 3-те колони во купчиња, со тоа што купчето од колоната во која што се наоѓа вашата карта мора да го ставите во средина, помеѓу другите две. Повторно поделете ги картите во 3 колони, редејќи ги како што беше опишано погоре. Забележете во која колона се наоѓа вашата карта овој пат и повторете го истото уште еднаш: соберете ги картите, со колоната со вашата карта во средина и поделете ги за последен пат.

Моето прашање до вас е во која колона се наоѓа картата овој пат? Без разлика кој е вашиот одговор, со сигурност можам да кажам дека вашата карта се наоѓа во средината на колоната. Зачудувачки, зар не? Без разлика која карта ќе ја замислите и каде се наоѓа, после 3 отварања на картите, секогаш ќе биде во средината на колоната во која што се наоѓа третиот пат.

Една тајна за оние кои го знаат трикот: познатиот трик со 21 карта не мора да се прави со 21 карта. Трикот функционира со $n=3(2k+1)$ карти, каде што $k=1,2,3,4$ односно $n=9,15,21,27$. За поголемо $k$, на пример $k$ = 5, 6, 7, 8, 9, 10, односно $n$ = 33, 39, 45, 51, 57, 63, се потребни 4 отварања за овој трик. Зошто е тоа така и која е математичката задпина на трикот ќе видиме во следните разгледувања.

*Математичко објаснување*

Ќе го разгледаме случајот за $n$ = 9, 15, 21, 27 карти. Во првото отворање само се определува во која колона е картата и таа колона се става во средина. Со овој прераспоред на $n$-те карти, каде $n=3(2k+1)$, замислената карта ќе биде една од средните $2k+1$ – на карта. Во следното отворање, овие карти ќе се сместат во:

- средната редица, со реден број $2=[\frac{2k+1}{2}]+1$, за $k$ = 1,

односно во

- трите средни редици, со редни бореви

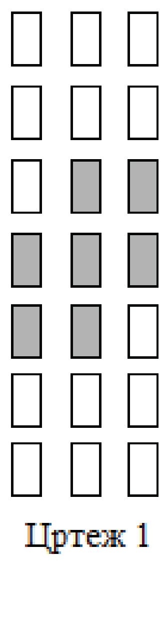
$$[\tfrac{2k+1}{2}],[\tfrac{2k+1}{2}]+1,[\tfrac{2k+1}{2}]+2 \text{, за } k\in\{2,3,4\}.$$

(Функцијата $f(x)=[x]$ на секој реален број $x$ му го придружува најголемиот цел број, кој е помал или еднаков на $x$. На пример,

$$[3]=3,\ [\tfrac{3}{2}]=1,[\tfrac{-5}{3}]=-2\text{ .)}$$

Во второто отворање, замислената карта може да биде една од сиво обоените карти на цртеж 1(за илустрација го користиме случајот со 21-на карта, поточно $n$ = 21, $k$ = 3).

Соговорникот и овој пат кажува во која колона е не-

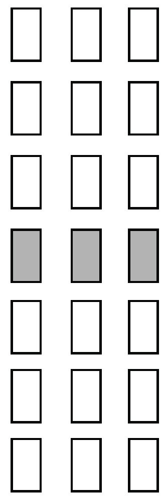


Цртеж 1

говата карта, по што таа колона повторно се става во средина. Сега, замислената карта ќе биде $l$-та карта по ред во купчето од $n$ карти, каде што $l$ може да биде

$$[\frac{3(2k+1)}{2}] \text{ или } [\frac{3(2k+1)}{2}]+1 \text{ или } [\frac{3(2k+1)}{2}]+2,$$

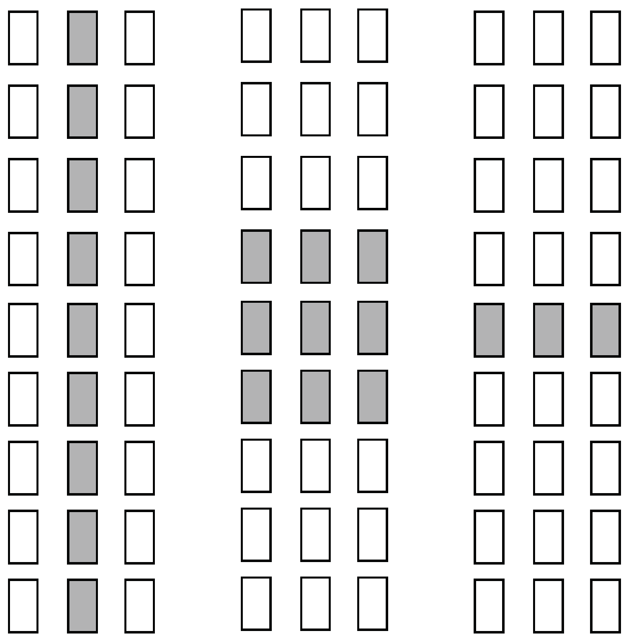
што значи дека замислената карта е една од средните 3 карти во купчето од $n$ карти. На крај се прави и третото отворање, по кое замислената карта ќе биде во средната редица, како што е илустрирано на цртеж 2.



Цртеж 2

Соговорникот само треба да ја каже колоната, и замислената карта се наоѓа во средината на таа колона.

За $k=4$, т.е. $n = 3(2k + 1) = 27$, шематскиот приказ на горното објаснување е даден на цртеж 3:



Цртеж 3

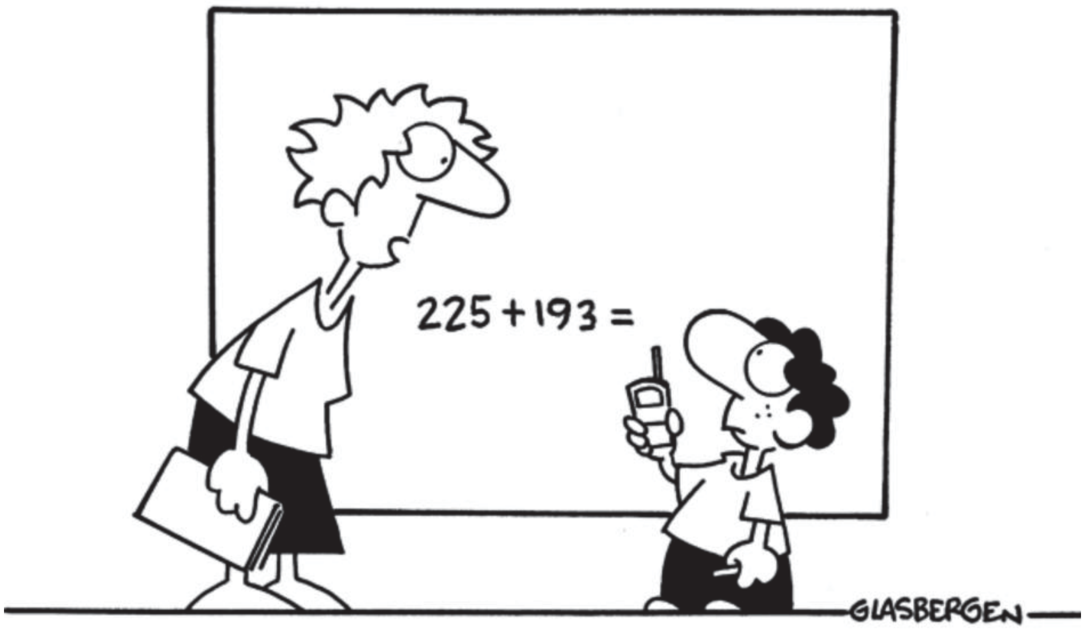
После првото отворање, замислената карта е во средната колона (на цртежот 3 левиот блок карти). Во следното отворање замислената карта е една од сиво обоените карти (на цртежот средниот блок карти), а во третото отворање, замислената карта е една од сиво обоените карти (на цртежот 3 десниот блок карти). Соговорникот треба само да ја каже колоната.

Со едноставни зборови, со опишаното распоредување на картите, замислената карта во секој чекор напредува кон средината на редиците.

Што мислите, колку отворања се потребни за на ваков начин да се открие замислената карта кога има $n = 93$ карти ($k = 15$)?

*Епилог*

Ова е крајот на магичното патешествие кое го организиравме за вас. Се разбира, овие неколку трикови се само мал дел од тоа што можете сами да го истражите, а нашата цел, покрај тоа да ве запознаеме со тајната врска меѓу магијата и математиката, е да ве мотивираме секогаш да гледате зад тоа што се гледа. Затоа, доколку некогаш сте убедени дека сведочите на вистинска магија или паранормален феномен ве охрабруваме да размислите и да дадете логично објаснување за истиот. Се разбира, не очекуваме секој да биде експерт по математика, но не заборавајте, методите зад многу илузии се кријат и во другите науки освен во математиката, како на пример во: физиката, хемијата, статистиката, логиката, психологијата, социологијата, па дури и во биологијата, итн. Се надеваме дека ве инспирираме да ги проучите и презентирате триковите, како и да ја сфатите вистинската магија која што ги прави истите возможни.




„Мораш да ја решиш задачата сам.
Не може да повикаш техничка поддршка.“

**Зоран Штерјов**
**Пробиштип**

# МЕТРИЧКИ РЕЛАЦИИ ВО ТЕТИВЕН ЧЕТИРИАГОЛНИК

Во неколку претходни изданија: Сигма бр. 49, Сигма бр. 54 и Сигма бр. 56 наведени се доволни услови за да еден четириаголник биде впишан во кружница, како и неколку суштински својства на тетивните четириаголници. Во овој напис ќе наведеме, со доказ, неколку метрички релации карактеристични за тетивните четириаголници. Секој четириаголник околу кој може да се опише кружница се нарекува тетивен четириаголник. Притоа:

- *четириаголникот е тетивен ако и само ако симетралите на три негови страни се сечат во една точка*;
- *четириаголникот е тетивен ако и само ако неговите спротивни агли се суплементни, т.е. нивниот збир изнесува* $180^\circ$.

Во кружница може да се впише квадрат, правоаголник и рамнокрак трапез, додека делтоидот е тетивен ако има два прави агли.

## Должина на дијагоналите во тетивен четириаголник

Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник со страни $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{CD}=c$ и $\overline{AD}=d$ и агли $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$. Притоа $\alpha+\gamma=180^\circ$ и $\beta+\delta=180^\circ$. Дијагоналите во четириаголникот ќе ги означиме со $e=\overline{AC}$ и $f=\overline{BD}$. Според косинусната теорема, од триаголникот $\Delta ABC$ имаме дека

$$\overline{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos\beta \qquad (1)$$

а од триаголникот $\Delta ADC$,

$$\overline{AC}^2=c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-\beta)=c^2+d^2+2cd\cos\beta \qquad (2)$$

Со изедначување на равенствата $(1)$ и $(2)$ добиваме

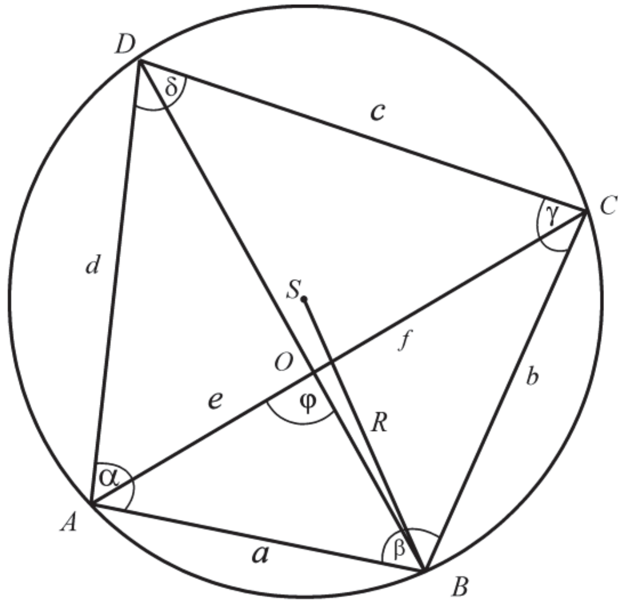
$$a^2+b^2-2ab\cos\beta=c^2+d^2+2cd\cos\beta,$$

односно

$$\cos\beta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

и, со замена во $(1)$, добиваме

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = a^2 + b^2 - 2ab\,\tfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$
$$= \frac{(a^2+b^2)(ab+cd)-ab(a^2+b^2-c^2-d^2)}{ab+cd} = \frac{(a^2cd+d^2ab)+(c^2ab+b^2cd)}{ab+cd}$$
$$= \frac{ad(ac+bd)+bc(ac+bd)}{ab+cd} = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}.$$




Значи должината на дијагоналата $e=\overline{AC}$ е еднаква на

$$e=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}\ .$$

На сличен начин добиваме дека

$$f=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}\ .$$

***Забелешка***. Ако ги помножиме должините на дијагоналите добиваме $ef = ac+bd$, односно со ова е докажана теоремата на Птоломеј:

*Во секој четириаголник, впишан во кружница, производот од должините на неговите дијагонали е еднаков на збирот од производите на должините на неговите спротивни страни*.

***Забелешка***. Ако четириаголникот $ABCD$ е рамнокрак трапез со основи $a$ и $c$, тогаш $b=d$, а неговите дијагонали се еднакви, т.е. $e=f$. Од равенството $ef = ac+bd$ добиваме дека $e^2 = ac+b^2$, односно $ac = e^2 - b^2$. Со ова е докажана следнава теорема:

*Производот од должините на основите на рамнокрак трапез е еднаков на разликата меѓу квадратот на една дијагонала и квадратот на должината на една од непаралелните страни*.

### Должина на радиусот на кружница опишана околу тетивен четириаголник

Радиусот на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$ е еднаков со радиусот на опишаната кружница околу триаголникот $\Delta ABC$ (или околу $\Delta BCD$, $\Delta CDA$, $\Delta DAB$) односно $R=\frac{e}{2\sin\beta}$. Пресметуваме

$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)^2$$
$$= \left(1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)$$
$$= \frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{2(ab+cd)}\cdot\frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{2(ab+cd)}$$
$$= \frac{(c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)^2}.$$

Ќе означиме со $s=\frac{a+b+c+d}{2}$. Тогаш

$$\sin^2\beta = \frac{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)}{4(ab+cd)^2}$$
$$= \frac{4(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{(ab+cd)^2},$$

односно

$$\sin\beta = \frac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\ .$$

За радиусот на опишаната кружница добиваме

$$R=\frac{e}{2\sin\beta}=\sqrt{\frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}}\cdot\frac{ab+cd}{4\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}\ ,$$

односно

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ad+bc)(ac+bd)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}\ .$$

При истите ознаки, за радиусот на опишаната кружница околу рамнокрак трапез $ABCD$ (за $b=d$) добиваме

$$R=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cb)(ab+bc)(ac+b^2)}{(s-a)(s-b)^2(s-c)}}=\frac{b(a+c)}{2(2s-2b)}\sqrt{\frac{ac+b^2}{(s-a)(s-c)}}$$
$$=\frac{b(a+c)}{2s-2b}\sqrt{\frac{ac+b^2}{4(s-a)(s-c)}}=\frac{b(a+c)}{2s-2b}\sqrt{\frac{ac+b^2}{(2s-2a)(2s-2c)}}$$
$$=\frac{b(a+c)}{a+2b+c-2b}\sqrt{\frac{ac+b^2}{(2s-2a)(2s-2c)}}=b\sqrt{\frac{ac+b^2}{(2b+c-a)(2b+a-c)}}$$
$$=b\sqrt{\frac{ac+b^2}{4b^2-(a-c)^2}}.$$

***Забелешка***. Значи, радиусот на опишаната кружница околу рамнокрак трапез $ABCD$ со основи $a$ и $b$ и крак $c$ се пресметува по формулата

$$R=c\sqrt{\frac{ab+c^2}{4c^2-(a-b)^2}}\ .$$

## Плоштина на тетивен четириаголник

Со $P_{ABCD}$ ќе ја означиме плоштината на тетивниот четириаголник $ABCD$. Тогаш

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= P_{\Delta ABC} + P_{\Delta ADC} \\ &= \tfrac{1}{2}ab\sin\beta + \tfrac{1}{2}cd\sin\delta = \tfrac{1}{2}ab\sin\beta + \tfrac{1}{2}cd\sin(180^\circ - \beta) \\ &= \tfrac{1}{2}ab\sin\beta + \tfrac{1}{2}cd\sin\beta = \tfrac{1}{2}(ab+cd)\sin\beta \\ &= \tfrac{1}{2}(ab+cd)\tfrac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \end{aligned}$$

Значи плоштината на тетивен четириаголник може да се пресмета по формулата на Брамагупта $P_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, каде што $s = \frac{a+b+c+d}{2}$.

## Агол меѓу дијагоналите на тетивен четириаголник

Нека $\phi = \measuredangle AOB$ е аголот меѓу дијагоналите $e$ и $f$. Тогаш

$$P_{ABCD} = \tfrac{1}{2}ef\sin\phi .$$

Според теоремата на Птоломеј $ef = ac + bd$, па затоа

$$P_{ABCD} = \tfrac{1}{2}(ac+bd)\sin\phi .$$

Значи $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} = \frac{1}{2}(ac+bd)\sin\phi$, а оттука

$$\phi = \arcsin\left(\tfrac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}\right).$$

## Тетивен четириаголник со заемно нормални дијагонали

*а)* Нека $\phi = \measuredangle AOB = 90^\circ$. Тогаш $\sin\phi = 1$, па плоштината на тетивниот четириаголник со заемно нормални дијагонали е еднаква на

$$P_{ABCD} = \tfrac{1}{2}(ac+bd).$$

*б)* Триаголниците $\Delta ABC$, $\Delta BCD$, $\Delta CDA$ и $\Delta DAB$ се впишани во истата кружница, па според синусната теорема имаме дека

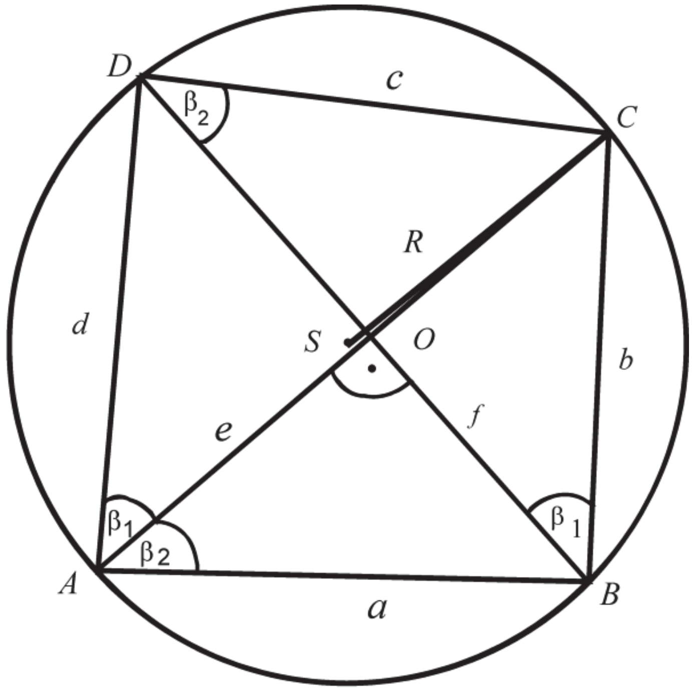
$$2R = \frac{a}{\sin\measuredangle ADB} = \frac{b}{\sin\measuredangle CDB} = \frac{c}{\sin\measuredangle CBD} = \frac{d}{\sin\measuredangle ABD} \qquad (3)$$

Нека $\beta_1 = \measuredangle CBD$ и $\beta_2 = \measuredangle CDB$. Тогаш

$$\measuredangle BAC = \measuredangle CDB = \beta_2,$$

како агли над ист кружен лак. Бидејќи $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, следува дека

$$\measuredangle ABD = 90^\circ - \beta_2.$$




Аналогно добиваме дека

$$\measuredangle CAD = \measuredangle CBD = \beta_1 \text{ и}$$

$$\measuredangle ADB = 90^\circ - \beta_1.$$

Сега од релацијата (3) добиваме дека

$a = 2R\sin(90^\circ - \beta_1) = 2R\cos\beta_1$

, $b = 2R\sin\beta_2$,

$$c = 2R\sin\beta_1 \text{ и } d = 2R\sin(90^\circ - \beta_2) = 2R\cos\beta_2.$$

Со собирање на квадратите на овие равенства го добиваме равенството

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 8R^2.$$

Оттука добиваме дека радиусот на кружницата опишана околу тетивен четириаголник со заемно нормални дијагонали е еднаква на

$$R = \tfrac{1}{4}\sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}.$$

***Забелешка***. Од истите равенства добиваме дека $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ и оваа релација е задоволена за секој тетивен четириаголник со заемно нормални дијагонали.

Литература


1. Сигма бр. 49, Сигма бр. 54 и Сигма бр. 56, СМ на Република Македонија:
2. Foaie matematica, 5/1995, Romania.

**Билјана Златановска**
**Штип**

# ДИНАМИКА НА ЛИНЕАРНОТО ПРЕСЛИКУВАЊЕ $f(x)=bx+c$ НА $\mathbf{R}$

Нека $X$ е непразно множество и $f:X\to X$ е пресликување. За дадена точка $x$ од $X$, нека

$$x=x_0=f^0(x), x_1=f(x_0), x_2=f(x_1)=f^2(x),..., x_{n+1}=f(x_n)=f^{n+1}(x),...$$

Низата $x_0,x_1,...,x_{n+1},...$ се вика *траекторија* на $f$ со почеток во $x$. Множеството од сите слики $f^n(x)=f(f(...(f(x))...))$ на $x$ кои се добиваат итеративно со $f$ се вика *орбита* на $x$ и се означува со

$$orb(x)=\{z \mid z=f^n(x), n\in\mathbf{N}_0\}.$$

Точката $x$ е *неподвижна* (*фиксна*) *точка* на пресликувањето $f$ ако $f$(x)=x ($orb(x)=\{x\}$). Точката $x$ од $X$ се вика *периодична точка* за $f$ ако постои природен број $n>1$ така што $f^n(x)=x$ и $f^{n-1}(x)\neq x$. Најмалиот природен број $n$ со даденото својство се вика *основен период* на $x$. Во тој случај $orb(x)$ има точно $n$ точки и $orb(x)$ се вика *периодична орбита*. Пресликувањето на точката $x$ од $X$ со $f$ се нарекува *движење* или *динамика* на точката $x$ кон $f(x)$, $f(x)$ кон $f(f(x))$ итн. Диференцната (рекурентна) равенка $x_{n+1}=f(x_n)$ определува *дискретен динамички систем* $(X,f)$ ($X$ е непразно множество и $f:X\to X$ е пресликување).

Линеарното пресликување на $\mathbf{R}$, $f(x)=bx+c$ го разгледуваме како диференцна равенка $x_{n+1}=f(x_n)=bx_n+c$. Комплетната класификација на динамиката на линеарното пресликување на $\mathbf{R}$, $f(x)=bx+c$ наједноставно може да се изврши е неговото однесување во неподвижните точки (доколку истите постојат), како и егзистенцијата на периодични точки.

Генерално, однесувањето на пресликувањето $f(x)=bx+c$ можеме да го испитаме со графички и аналитички метод.

**Графички метод.** Во $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ се цртаат графиците на $f(x)$ и $y=x$. Нивниот пресек ја дава неподвижната точка на пресликувањето $f(x)$. Избираме произволна точка $x$ од $x$-оската и повлекуваме права паралелна со $y$-оската до пресек со графикот на $f(x)$. Ова е првата итерација на $f(x)$.

Од $f(x)$ повлекуваме права паралелна со *x*-оската до пресек со $y = x$. Од таму се повторно се повлекува права паралелна со *y*-оската до пресек со графикот на $f(x)$ и се добива втората итерација $f^2(x)$. Оваа процедура ја повторуваме повеќе пати ( $f^k(x)$ е *k*-тата итерација на пресликувањето $f(x)$). Така се добива и орбитата $orb(x)$ на точката *x*. Ако со оваа постапка се доближуваме до неподвижната точка, тогаш неподвижната точка игра улога на привлечна точка (*атрактор* или *стабилна* точка). Доколку се оддалечуваме од неподвижната точка тогаш неподвижната точка игра улога на *одбивна* точка (*репелер* или *нестабилна* точка).

**Аналитички метод.** Аналитичкиот метод се состои од наоѓање на апсолутната вредност на првиот извод на $y = f(x)$ (ако тој постои) во неподвижната точка:

1. Ако $|f'(x)| > 1$ тогаш *x* е одбивна точка;
2. Ако $|f'(x)| < 1$ тогаш x е привлечна точка.

Да се вратиме на линеарното пресликување $f(x) = bx + c$ на **R**. Ја наоѓаме неподвижната точка на $f(x) = bx + c$:

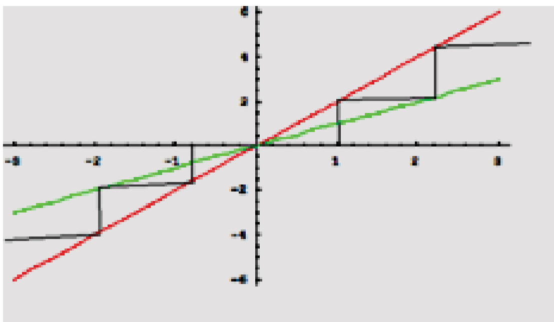
$$f(x) = x \Rightarrow bx + c = x \Rightarrow x = \tfrac{c}{1-b}, b \neq 1.$$

Првиот извод на $f(x) = bx + c$ е $f'(x) = b$, што повлекува дека однесувањето на линеарното пресликување $f(x) = bx + c$ на **R** во неподвижната точка $x = \tfrac{c}{1-b}, b \neq 1$ зависи од коефициентот *b*. Ќе разгледаме повеќе случаи:

**Случај 1.** За $b \neq 0$ и $c = 0$, се добива пресликувањето $f(x) = bx$ со извод $|f'(x)| = |b|$.

**1.** За $b > 0$ и $b \neq 1$ се добиваат два случаи каде неподвижната точка е $x = \tfrac{c}{1-b} = \tfrac{0}{1-b} = 0$.

*i)* За $b > 1$, $f(x) = bx$ со извод $|f'(x)| = |b| > 1$, неподвижна точка $x = 0$ е одбивна точка за сите точки од $f(x) = bx$.

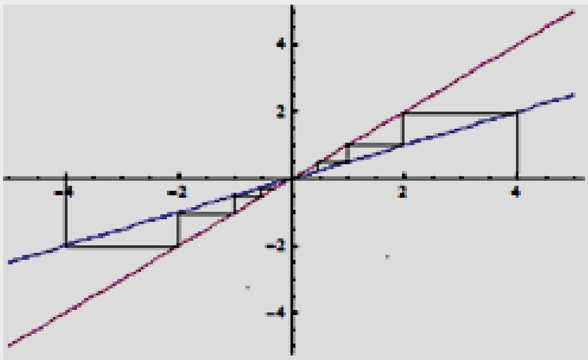

Цртеж 1. $f(x)=2x$, $orb(1)$, $orb(-0.8)$

**Пример 1.** За $f(x) = 2x$ со прв

извод $|f'(x)|=2>1$, неподвижната точка $x=0$ е одбивна точка за сите точки од $f(x)=2x$ (цртеж 1).

*ii)* За $0<b<1$ , $f(x)=bx$ со извод $|f'(x)|=|b|<1$, неподвижната точка $x=0$ е привлечна точка за сите точки од $f(x)=bx$.

**Пример 2.** За $f(x)=\frac{x}{2}$ со извод $|f'(x)|=\frac{1}{2}<1$, неподвижната точка $x=0$ е привлечна точка за сите точки од $f(x)=\frac{1}{2}x$ (цртеж 2).

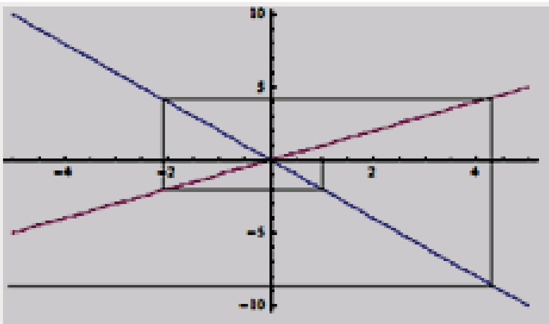


Цртеж 2. f(x)=x/2, *orb*(4), *orb*(-4)

**2.** За $b<0$, се добиваат три случаи каде се јавува истата неподвижна точка $x=\frac{c}{1-b}=\frac{0}{1-b}=0$.

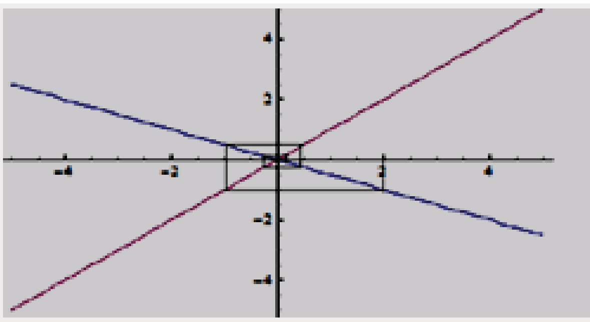
*i)* За $b<-1$, $f(x)=bx$ со извод $|f'(x)|=|b|>1$, неподвижнта точка $x=0$ е одбивна точка за сите точки од $f(x)=bx$.

**Пример 3.** За $f(x)=-2x$ со извод $|f'(x)|=2>1$, неподвижната точка $x=0$ е одбивна точка за сите точки од $f(x)=-2x$ (цртеж 3).



Цртеж 3. *f*(x)=-2x, *orb*(1)

*ii)* За $-1<b<0$, $f(x)=bx$ со извод $|f'(x)|=|b|<1$, неподвижната точка $x=0$ е привлечна точка за сите точки од $f(x)=bx$.

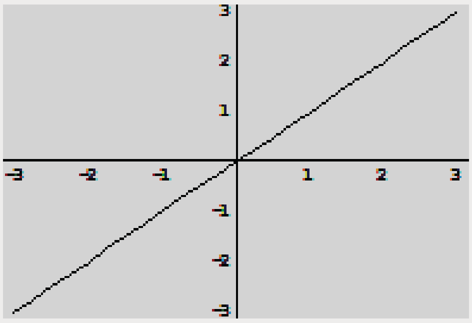


Цртеж 4. *f*(x)=-x/2, *orb*(2)

**Пример 4.** За $f(x)=-\frac{1}{2}x$ со извод $|f'(x)|=\frac{1}{2}<1$, неподвижната точка $x=0$ е привлечна точка на сите точки од $f(x)=-\frac{1}{2}x$ (цртеж 4).

*iii)* За $b=-1$ , $f(x)=-x$ има извод $|f'(x)|=1$. Ако ја земеме втората итерација на $f(x)=-x$, $f^2(x)=f(f(x))=x$ забележуваме дека таа се поклопува со $f(x)=x$. Ова ни покажува дека сите точки од $f(x)=-x$, освен 0 се периодични со период 2.

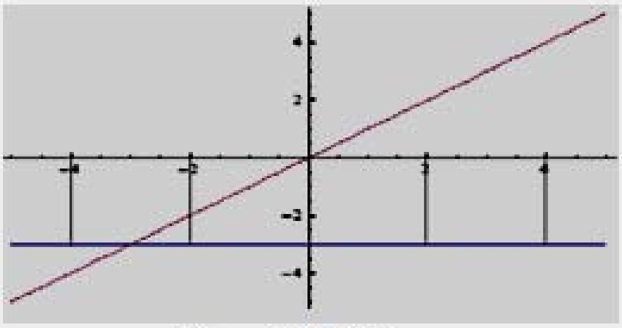
**3.** За $b=1$ се добива $f(x)=x$, со прв извод $|f'(x)|=1$. Ова е случај кога сите точки од правата се неподвижни (цртеж 5).



Цртеж 5. $f(x)=x$

**Случај 2.** За $b=0$ и $c=0$ се добива $f(x)=0$, т.е $x$-оската. Овде сите точки од функцијата $f(x)=0$ одат во 0 после првата итерација.

**Случај 3.** За $b=0, c\neq 0$ имаме $f(x)=c$ со прв извод $f'(x)=0$. Неподвижна точка е $x=\frac{c}{1-b}=\frac{c}{1}=c$. Сите точки од $f(x)=c$ одат во $c$ после првата итерација и таа е привлечна точка за сите точки од $f(x)=c$.



Цртеж 6. $f(x)=-3$

**Пример 5**: За $f(x)=-3$ имаме неподвижна точка $x=-3$. Сите точки од $f(x)=-3$ одат во $x=-3$ по првата итерација (цртеж 6).

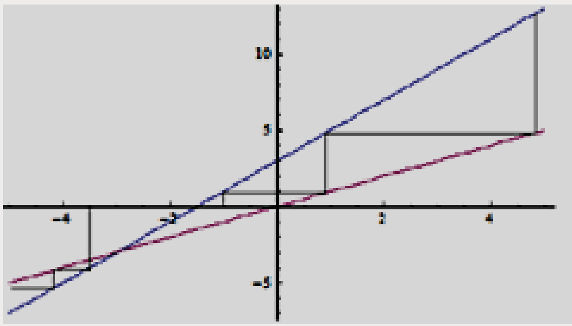
**Случај 4.** За $b\neq 0, c\neq 0$ имаме $f(x)=bx+c$ со извод $|f'(x)|=|b|$. Неподвижна точка е $x=\frac{c}{1-b}=-\frac{c}{b-1}$ за $b\neq 1$.

*i)* За $b>1$ и $b<-1$, $f(x)=bx+c$ со прв извод $|f'(x)|=|b|>1$, неподвижната точка $x=-\frac{c}{b-1}$ е одбивна точка за сите точки од $f(x)=bx+c$.

**Пример 6.** За $f(x)=2x+3$ со прв извод $|f'(x)|=2>1$, неподвижната точка

$$x=-\frac{c}{b-1}=-\frac{3}{2-1}=-3$$

е одбивна точка за сите точки од $f(x)=2x+3$ (цртеж 7).



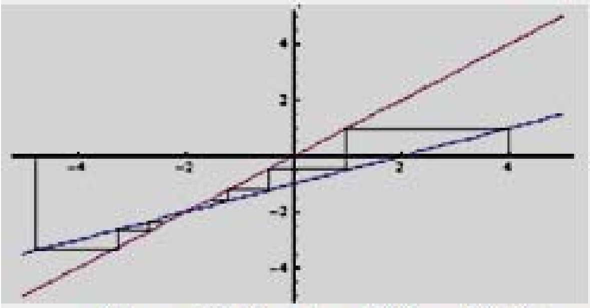
Цртеж 7. $f(x)=2x+3$, $orb(-1)$, $orb(-3.5)$

*ii)* За $0<b<1$ и $-1<b<0$, $f(x)=bx+c$ со прв извод $|f'(x)|=|b|<1$, неподвижната точка $x=-\frac{c}{b-1}$ е привлечна точка за сите точки од $f(x)=bx+c$.

**Пример 7.** За $f(x)=\frac{1}{2}x-1$ со прв извод $|f'(x)|=\frac{1}{2}<1$, неподвижната точка

$$x=-\frac{c}{b-1}=-\frac{-1}{\frac{1}{2}-1}=-\frac{-1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

е привлечна точка за сите точки од $f(x)=\frac{1}{2}x-1$ (цртеж 8).



Цртеж 8. $f(x)=x/2$, $orb(4)$, $orb(-4.5)$

*iii)* За $b=-1$, $c\neq 0$, $f(x)=-x+c$ со прв извод $|f'(x)|=|-1|=1$, неподвижна точка $x=-\frac{c}{-1-1}=\frac{c}{2}$ и втора итерација

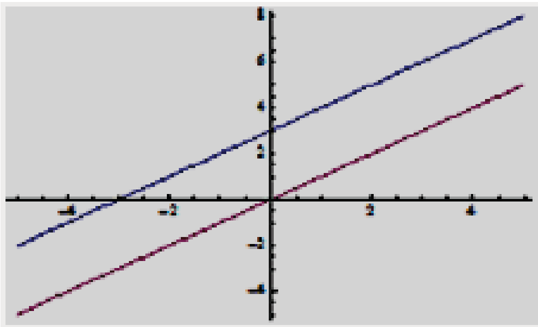
$$f^2(x)=f(f(x))=f(-x+c)=-(-x+c)+c=x.$$

Овој случај се сведува на истиот случај како и за $f(x)=-x$, каде сите точки од $f(x)=-x+c$, освен $c$ се периодични со период 2.

**Случај 5.** За $b=1$, $c\neq 0$, имаме $f(x)=x+c$ со прв извод

$$|f'(x)|=|b|=1,$$

чиј график е паралелен со $f(x)=x$. Ова е случај кога $f(x)=x+c$ и $y=x$ немаат пресечни точки и тогаш нема ниту неподвижни точки, ниту периодични точки.



Цртеж 9. $f(x)=x+3$

**Пример 10.** За $f(x)=x+3$ со извод $|f'(x)|=|b|=1$ нема ниту неподвижни точки, ниту периодични точки (цртеж 9).

**Заклучок.** Од дадената анализа може да констатираме дека покомплексна слика за динамиката на линеарната функција $f(x)=bx+c$ на **R** ни даваат $f(x)=-x$ и $f(x)=-x+c$, каде се појавуваат и периодични точки со период 2. Како и да е, може да се заклучи дека динамиката на линеарното пресликување на **R** е многу едноставна.

## ЕФЕКТ НА ПЕПЕРУТКА

После демобилизацијата од Воздушниот корпус на Американската армија, американскиот метереолог Lorens Edvard (Norton) бил еден од првите кој развивал нумерички модели на атмосферата и кој за временска прогноза користел компјутери. Тој ја докажал внатрешната неможност за долгорочна временска прогноза и помогнал да се втемели проучувањето на хаосот.

Lorens забележал дека мали разлики во почетните услови на неговите нумерички модели на атмосферата можат, после релативно кратко време, да доведат до радикално различни исходи. Сватил дека диференцијалните равенки кои се користат во опишувањето на атмосферата, иако се детерминистички, исто така многу зависат од почетните услови, и со тоа употребливоста за практични временски прогнози се ограничува на околу една седмица. Оваа појава е позната како ефект на пеперутка, мало движење на воздухот, предизвикано од движењето на крилата на пеперутката на еден дел од земјината топка, теориски после неколку недели може да биде циколн оддалечен илјадници миљи.

Тој продолжил да истражува други примери на хаотично однесување и во 1963 година докажал дека и многу едноставни детерминистички системи можат да покажуваат хаотично однесување. Еден од неговите примери е движењето на воденичарското тркало, станува непредвидливо и со тенденција на случајни менувања на правецот, кога брзината на водениот тек ја надмине граничната вредност. За да ја илустрира хаотичната динамика на таквите системи, Lorens го моделирал таканаречениот Lorens-ov атрактор, тридимензионална крива во која положбата на точката претставува движење на динамички систем во фазен простор. Кривата покажува како движењето на системот непериодично осцилира меѓу две прави и никогаш не се смирува во усталена положба.

Од статијата: *Lorens, Edvard (Norton)* во книгата: Dejvid, Jan, Džon i Margaret Milar, *Kembrički rečnik – Naučnici*, Dereta, Beograd 2003. str. 335.

Подготвил: проф. д-р Борислав Чабриќ

## XXXVII РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА, 15.II-2014

### I година

**1АБ.** Докажи дека збирот од квадратите на пет последователни цели броеви не може да биде полн квадрат.

**Решение.** Нека се тоа броевите $n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2.$ Тогаш нивниот збир е

$$S=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5n^2+10=5(n^2+2)$$

што значи дека $5\,|\,S$. Ако бројот $S$ е полн квадрат, тогаш треба $5\,|\,(n^2+2).$ Ова не е можно за ниту еден број $n\in\mathbb{Z}.$ Имено ако $n=5k$, тогаш $n^2+2=5A+2,$ ако $n=5k\pm1$, тогаш $n^2+2=5B+3,$ ако $n=5k\pm2$, тогаш $n^2+2=5C+1.$ Оттука следува дека овој број не може да биде полн квадрат.

**2А.4Б.** Докажи дека дадената равенка нема решение во множеството на цели броеви:

$$xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)=1\,.$$

**Решение.** Имаме

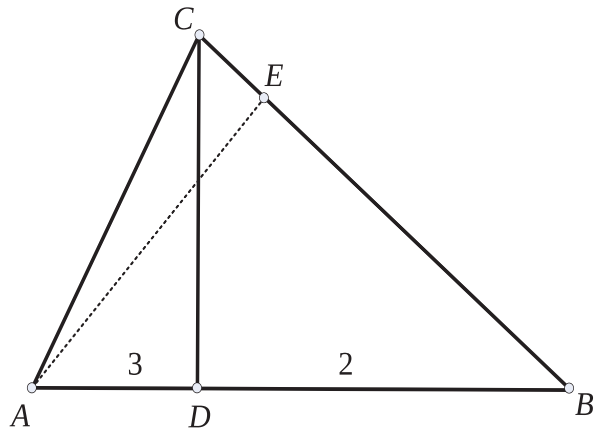
$$xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-x^2)=xy(x^2-y^2)+yz(y^2-z^2)+zx(z^2-y^2-x^2+y^2)$$
$$=(xy-zx)(x^2-y^2)+(yz-zx)(y^2-z^2)=x(y-z)(x^2-y^2)-z(x-y)(y^2-z^2)$$
$$=(x-y)(y-z)(x^2+xy-zy-z^2)=(x-y)(y-z)(x-z)(x+z+y)\,.$$

Значи, дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(x-y)(y-z)(x-z)(x+z+y)=1$$

и оттука $x-y,y-z,z-x\in\{-1,1\}$. Значи, $(x-y)+(y-z)+(z-x)\neq0$ што е невозможно и затоа равенката нема решение во множеството на цели броеви.

**2Б.** Во остроаголен триаголник $ABC$ висината од врвот $C$ ја дели спротивната страна на два дела $\overline{AD}$ и $\overline{DB}$ со должини $\overline{AD}=3cm$ и $\overline{DB}=2cm$. Аголот при темето $A$ изнесува $60^\circ$. Одреди ги должините на страните на триаголникот $ABC$ како и должината на висината на триаголникот $ABC$ спуштена од темето $A$.




**Решение.** Јасно, $\overline{AB}=5cm$. Бидејќи аголот кај темето $A$ изнесува $60^\circ$ и бидејќи триаголникот $ADC$ е правоаголен имаме дека аголот $\angle DCA$ изнесува $30^\circ$ од каде пак се добива дека $\overline{AC}=2\overline{AD}=6sm$. Од Питагоровата теорема кај триаголникот $ADC$ имаме

$$\overline{DC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AD}^2}=\sqrt{6^2-3^2}=5cm$$

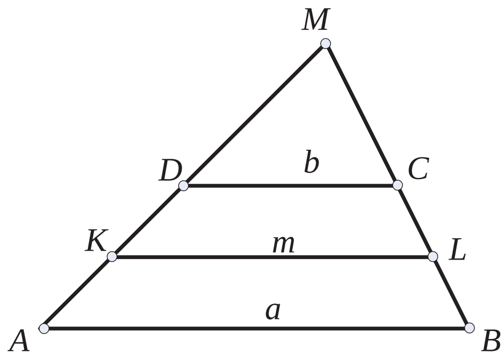
Од Питагоровата теорема кај триаголникот $BDC$ имаме

$$\overline{BC}=\sqrt{\overline{DC}^2+\overline{BD}^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{29}cm\,.$$

Следно, за плоштината на триаголникот $ABC$ имаме $P_{ABC}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{2}=\frac{5\cdot 5}{2}=\frac{25}{2}$. Од друга страна $P_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AE}}{2}$, па затоа $\frac{25}{2}=\frac{\sqrt{29}\cdot\overline{AE}}{2}$. Конечно, висината од темето $A$ изнесува $\overline{AE}=\frac{25}{\sqrt{29}}cm$.

**3А.** Трапезот $ABCD$ е поделен со права $p$, таква што $p\,||\,AB\,||\,CD$, на два дела со еднакви плоштини. Определи ја должината на отсечката чиишто крајни точки се пресечните точки на правата $p$ и краците на трапезот, ако се дадени дожините на основите $a$ и $b$.

**Решение.** Ги продолжуваме краците $AD$ и $BC$ до нивниот пресек $M$. Нека $KL=p$. Тогаш, $\triangle ABM\sim\triangle KLM\sim\triangle DCM$ и при тоа




$P_{\triangle ABM}:P_{\triangle KLM}:P_{\triangle DCM}=a^2:m^2:b^2$, т.е.

$P_{\triangle ABM}=ka^2$, $P_{\triangle KLM}=km^2$, $P_{\triangle DCM}=kb^2$,

каде што $k$ е коефициент на пропорционалност. Од условот на задачата,

$$P_{ABLK}=P_{KLCD}$$

$$\Rightarrow\ P_{\triangle ABM}-P_{\triangle KLM}=P_{\triangle KLM}-P_{\triangle DCM}$$

$$ka^2-km^2=km^2-kb^2$$

$$m^2=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)$$

$$m=\overline{KL}=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a^2+b^2)}.$$

**3Б.** На почеток на три плочки се наоѓаат броевите 2012, 2014 и 2016. Марко во секој чекор броевите на плочката ги означува со $a,b$ и $c$ по некој редослед, а потоа ги заменува со броевите $3a-b, 3b-c$ и $3c-a$. Дали може Марко со последователна примена на оваа постапка во некој момент на трите плочки да има три еднакви броеви?

**Решение.** Ако претпоставиме дека во некој момент може да се добијат сите три броеви да се исти, имаме дека $3a-b=3b-c=3c-a=t$. Од овој систем добиваме дека

$$b=3a+t,\qquad c=3b-t=9a-4t,\qquad a=3c-t=27a-13t$$

Од последната равенка $26a=13t\Rightarrow a=\frac{t}{2}$. Ако се вратиме и замениме, добиваме дека $b=\frac{t}{2}$ и $c=\frac{t}{2}$, односно $a=b=c=\frac{t}{2}$. Од оваа дискусија се заклучува дека три еднакви броја во некој чекор би добиле ако во претходниот чекор сме имале три исти броеви. Но, бидејќи се тргнува од броевите 2012, 2014 и 2016, следува дека не е можно да се добијат три исти броја.

**4А.** Најди ги сите парови заемно прости природни броеви $a$ и $b$ такви што $a+b$ е делител на $a^4+b^4$.

**Решение** Користиме $a^4-b^4=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$ од каде $a+b$ е делител на $a^4-b^4$. Добиваме дека $a+b$ е делител на $(a^4+b^4)+(a^4-b^4)=2a^4$ и $a+b$ е делител на $(a^4+b^4)-(a^4-b^4)=2b^4$ или $(a+b)\,\Big|\,$НЗД$(2a^4,2b^4)$. Од НЗД$(a,b)=1$ следува НЗД$(a^4,b^4)=1$ односно $(a+b)\,\Big|\,$НЗД$(2a^4,2b^4)=2$. Конечно $a=1, b=1$.

## II година

**1 АБ.** Најди ги целобројните вредности на параметарот $a$, за кои решенијата на системот:

$$\begin{cases} a(x+y-1)=x-2y-1 \\ a(x-y-3)=x+2y-3 \end{cases}$$

се целобројни.

**Решение.** Дадениот систем е еквивалентен со: $\begin{cases}(a-1)x+(a+2)y=a-1\\(a-1)x-(a+2)y=3a-3\end{cases}$.

Имаме $\begin{cases}2(a-1)x=4a-4\\2(a+2)y=-2a+2\end{cases}$. Ако $a\neq 1$, тогаш $x=2$, а ако $a=1$, тогаш $x\in\mathbf{R}$. Ако $a=-2$ тогаш нема решение за $y$ па и за системот. Ако $a\neq -2$, имаме $y=\frac{-a+1}{a+2}=-1+\frac{3}{a+2}$. Бидејќи решенијата треба да бидат целобројни, следува дека $a+2$ треба да е делител на 3 и затоа $a+2=\pm1,\pm3$. Оттука, $a=-5,-3,-1,1$. Добиваме: $a=-5: x=2$, $y=-2$; $a=-3: x=2$, $y=-4$; $a=-1: x=2$, $y=2$; $a=1: x\in\mathbf{R}$, $y=0$.

**2 АБ.** Нека $a,b,c$ се реални боеви за кои важат: $ab-a=b+119$, $bc-b=c+59$, $ca-c=a+71$. Пресметај ги сите можни вредности на $a+b+c$.

**Решение.** Од првата равенка имаме

$$a(b-1)=(b-1)+120\text{, т.е. }(a-1)(b-1)=120.$$

Слично, втората е еквивалентна со $(b-1)(c-1)=60$ и третата со $(c-1)(a-1)=72$. Оттука, $\frac{a-1}{c-1}=2$, $a-1=2(c-1)$ и заменето во третата добиваме $2(c-1)^2=72$. Добиваме, $c_1=7$, $c_2=-5$ и оттука $a_1=13, a_2=-11$ и $b_1=11, b_2=-9$. Затоа, можните вредности за $a+b+c$ се: $13+11+7=31$ и $-11-9-5=-25$.

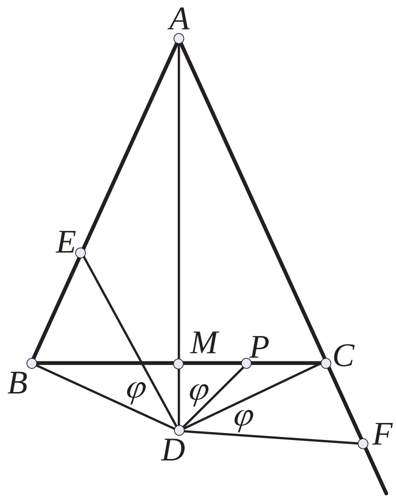
**3 А.** Реши ја равенката: $(x^2-8)(x+1)^2+x^2=0$.

**Решение.** $-1$ не е решение на равенката па затоа таа е еквивалентна со: $x^2-8+\frac{x^2}{(x+1)^2}=0$. Ја трансформираме во $(x-\frac{x}{x+1})^2+2\frac{x^2}{x+1}-8=0$, односно во $(\frac{x^2}{x+1})^2+2\frac{x^2}{x+1}-8=0$. Ја воведуваме смената $t=\frac{x^2}{x+1}$ и добиваме $t^2+2t-8=0$, чиишто решенија се 2 и $-4$. Од $\frac{x^2}{x+1}=2$ ги добиваме $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$, а од $\frac{x^2}{x+1}=-4$ добиваме $x_3=-2$.

**4 А.** Над отсечката $BC$, како основа, во различните полурамнини конструирани се рамнокраките триаголници $ABC$ и $DCB$, притоа $\angle DBA = 90°$. Нека $M$ е средината на основата $BC$. Нека $E$ е точка од страната $AB$, $P$ е на отсечката $MC$ и $F$ е на полуправата $AC$ така што $C$ е меѓу $A$ и $F$, притоа

$$\measuredangle EDB = \measuredangle PDA = \measuredangle FDC .$$

Докажи дека $P$ е средина на отсечката $EF$ и $DP$ и $EF$ се заемно нормални.




**Решение.** Нека $\measuredangle EDB = \measuredangle PDA = \measuredangle FDC = \phi$. Триаголниците $EBD$, $PMD$ и $FCD$ се правоаголни и оттука: $\cos\phi = \frac{\overline{BD}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{FD}}$. Тогаш, од $\overline{BD} = \overline{CD}$ следува дека $\overline{ED} = \overline{FD}$, па триаголникот $DFE$ е рамнокрак. Уште, $\measuredangle FDE = \measuredangle FDC + \measuredangle CDE = \measuredangle EDB + \measuredangle CDE = \measuredangle CDB$, па триаголниците $DCB$ и $DFE$ се слични, со коефициент на сличност $\cos\phi$.

Од $\measuredangle PDE = \measuredangle PDM + \measuredangle MDE = \measuredangle EDB + \measuredangle MDE = \measuredangle MDB$, следува дека $DP$ е симетрала на аголот $FDE$, па затоа $DP$ и $EF$ се заемно нормални. Од тоа што $DM$ е висина во триаголникот $DCB$, $DP$ е симетрала на аголот $FDE$ и $\cos\phi = \frac{\overline{MD}}{\overline{PD}}$, следува дека $DP$ е висината во триаголникот $DFE$ па затоа $P$ е средина на отсечката $EF$.

**3 Б.** Најди ги сите реални броеви $c$ такви што равенката

$$(x^2 - 4x - c)^2 - 8x^2 + 32x + 8c = 0$$

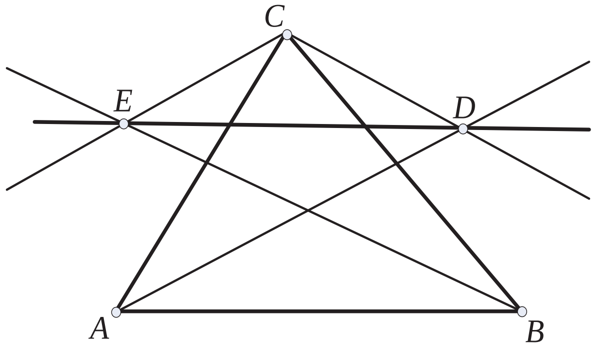
има точно две реални решенија.

**Решение.** Равенката е еквивалентна со $(x^2 - 4x - c)^2 - 8(x^2 - 4x - c) = 0$. Ако $t = x^2 - 4x - c$, добиваме $t^2 - 8t = 0$ и оттука $x^2 - 4x - c = 0$ или $x^2 - 4x - c = 8$. Дискриминантата на првата равенка е $D_1 = 4(c+4)$, а на втората равенка е $D_2 = 4(4+c+8) = 4(c+12)$. Равенката има точно две реални решенија ако:

$$1)\ \begin{cases} D_1 > 0 \\ D_2 < 0 \end{cases} \text{ или } 2)\ \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2 = 0 \end{cases} \text{ или } 3)\ \begin{cases} D_1 < 0 \\ D_2 > 0 \end{cases}.$$

Решение има третиот систем т.е. $c \in (-12, -4)$.

**4Б.** Во остроаголниот триаголник $ABC$ повлечени се симетралите на внатрешните агли во темињата $A$ и $B$. Од темето $C$ се повлечени прави паралелни со овие симетрали кои нив ги сечат во точките $D$ и $E$, соодветно. Ако правата $DE$ е паралелна со $AB$ докажи дека триаголникот $ABC$ е рамнокрак.



**Решение.** Бидејќи $AD$ е симетрала на $\measuredangle A$, користејќи ја паралелноста $AB \parallel ED$ и $AD \parallel EC$ добиваме $\measuredangle CAD = \measuredangle BAD = \measuredangle DEC$. Од ова добиваме дека точките $A$, $D$, $C$ и $E$ лежат на иста кружница. Слично, добиваме дека точките $B$, $D$, $C$ и $E$ лежат на иста кружница. Значи $A$, $B$, $D$, $C$ и $E$ лежат на иста кружница. Од паралелноста $AD \parallel EC$ и $BE \parallel CD$ следи $\measuredangle DAC = \measuredangle DEC = \measuredangle EDA = \measuredangle ABE$, од каде го следува тврдењето во задачата .

## III година

**1АБ.** Најди ги решенијата на системот:

$$\begin{cases}(x+3)^3 = 3-2y \\ z^2+4y^2 = 8y \\ (2z-x)(x+3) = 5x+16\end{cases} \quad \text{за кои } z \geq 0.$$

**Решение.** Ако ја разгледаме втората равенка од системот како квадратна во однос на $y$, нејзината дискриминанта е $D = 64-16z^2$. Од $64-16z^2 \geq 0$, добиваме дека $|z| \leq 2$ .Од условот $z \geq 0$ имаме $0 \leq z \leq 2$. Да ја претставиме третата равенка на системот како квадратна во однос на $x$: $x^2-2(z-4)x-6z+16=0$. За нејзината дискриминанта $D$ имаме $\frac{1}{4}D = (z-4)^2+6z-16 \geq 0$. Оттука, имајќи предвид дека $z \geq 0$, добиваме $z \in \{0\} \cup [2,\infty)$. Но $0 \leq z \leq 2$, па $z=0$ и $z=2$. Решенијата се $(-4,2,0)$ и $(-2,1,2)$ .

**2АБ.** Нека $a,b$ и $c$ се должини на страни на триаголник. Определи го аголот спроти страната со должина $c$, ако е исполнето равенството $\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} = c^2$.

**Решение.** Даденото равенство ќе го запишеме во обликот

$$a^3+b^3+c^3 = c^2(a+b+c) \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 = c^3+c^2(a+b)$$
$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2-ab+b^2) = c^2(a+b)$$

Бидејќи $a$ и $b$ се должини на страни во триаголник, имаме $a+b \neq 0$, па затоа $c^2 = a^2-ab+b^2$. Од косинусната теорема имаме дека $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$. Од последните две равенства следува $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, односно $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

**3А.** Ако за аглите во триаголник $\alpha$ и $\beta$ важи релацијата

$$\sin^{2014}(\tfrac{\alpha}{2})\cos^{2015}(\tfrac{\beta}{2}) = \sin^{2014}(\tfrac{\beta}{2})\cos^{2015}(\tfrac{\alpha}{2}),$$

тогаш $\alpha = \beta$. Докажи!

**Решение.** Бидејќи $\alpha$ и $\beta$ се агли во триаголник, за нив важи $0 < \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2}$. На интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$, синусната функција е строго растечка, косинусната функција е строго опаѓачка и двете функции се позитивни.

а) Ако $\alpha > \beta$ тогаш $\frac{\alpha}{2} > \frac{\beta}{2}$ и важат неравенствата $\sin\frac{\alpha}{2} > \sin\frac{\beta}{2} > 0$, $0 < \cos\frac{\alpha}{2} < \cos\frac{\beta}{2}$. Оттука следува дека

$$\sin^{2014}(\tfrac{\alpha}{2}) > \sin^{2014}(\tfrac{\beta}{2}) > 0 \text{ и } 0 < \cos^{2015}(\tfrac{\alpha}{2}) < \cos^{2015}(\tfrac{\beta}{2}).$$

Од овие две неравенства (со нивно множење), се добива

$$\sin^{2014}(\tfrac{\alpha}{2})\cos^{2015}(\tfrac{\beta}{2}) > \sin^{2014}(\tfrac{\beta}{2})\cos^{2015}(\tfrac{\alpha}{2}).$$

б) Ако $\alpha < \beta$, аналогно како во а), се докажува дека важи

$$\sin^{2014}(\tfrac{\alpha}{2})\cos^{2015}(\tfrac{\beta}{2}) < \sin^{2014}(\tfrac{\beta}{2})\cos^{2015}(\tfrac{\alpha}{2}).$$

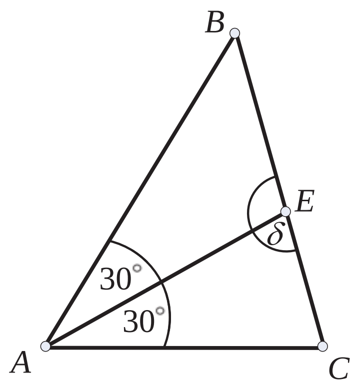
Значи, равенството е можно акко $\alpha = \beta$.

**4А.** Во тетраедарот $ABCD$, со врв $A$ важи $\measuredangle BAC = \measuredangle CAD = \measuredangle DAB = 60^\circ$. Докажи дека важи неравенството

$$\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} \le \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{BD}.$$

**Решение.** Нека $AE$ е симетрала на аголот *A*, на страната *ABC*. Со примена на синусната теорема, на триаголниците *ABE* и *ACE*, добиваме

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(180^\circ - \delta)} = \frac{\overline{BE}}{\sin 30^\circ}; \frac{\overline{AC}}{\sin\delta} = \frac{\overline{CE}}{\sin 30^\circ}.$$




Оттука следува дека $2\overline{BE} = \frac{\overline{AB}}{\sin\delta}$; $2\overline{CE} = \frac{\overline{AC}}{\sin\delta}$. Со собирање на последните две еднаквости, добиваме

$$2(\overline{BE} + \overline{CE}) = 2\overline{BC} = \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\sin\delta} \ge \overline{AB} + \overline{AC}.$$

Значи

$$2\overline{BC} \ge \overline{AB} + \overline{AC} \qquad (1)$$

Аналогно се докажува дека

$$2\overline{BD} \ge \overline{AB} + \overline{AD} \qquad (2)$$

и

$$2\overline{CD} \ge \overline{AC} + \overline{AD} \qquad (3)$$

Со собирање на неравенствата (1), (2) и (3), се добива бараното неравенство.

**3Б.** Без користење на калкулатор, докажи дека важи неравенството

$$\log_2 \pi + \log_4 \pi < \frac{5}{2}.$$

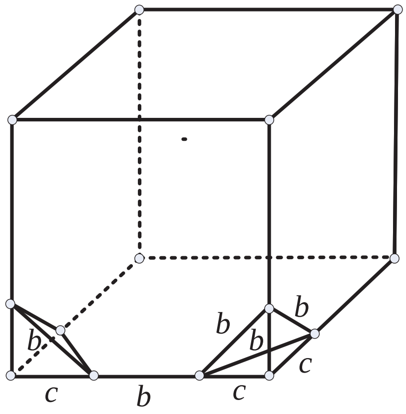
**Решение.** Бидејќи

$$\log_2 \pi + \log_4 \pi = \log_2 \pi + \frac{1}{\log_\pi 4} = \log_2 \pi + \frac{1}{2\log_\pi 2} = \log_2 \pi + \frac{\log_2 \pi}{2} = \frac{3\log_2 \pi}{2},$$

доволно е да докажеме дека $3\log_2 \pi < 5$, т.е. $\pi^3 < 2^5$

Ова неравенство лесно се докажува со користење на тривијалното неравенство $\pi < 3{,}15$. Имено, $\pi^3 < 3{,}15^2 \cdot 3{,}15 < 10 \cdot 3{,}2 = 2^5$. Со тоа задачата е решена.

**4Б.** Од коцка со раб 3 см., отсечени се сите 8 темиња, така што новодобиеното тело има 24 темиња и сите негови рабови се со еднаква должина. Одреди го волуменот на новодобиеното тело.




**Решение.** Од равенките $b+2c=a=3$ и $b=c\sqrt{2}$, добиваме дека $c=\frac{3(2-\sqrt{2})}{2}cm$. Волуменот на секој од 8-те тетраедри е

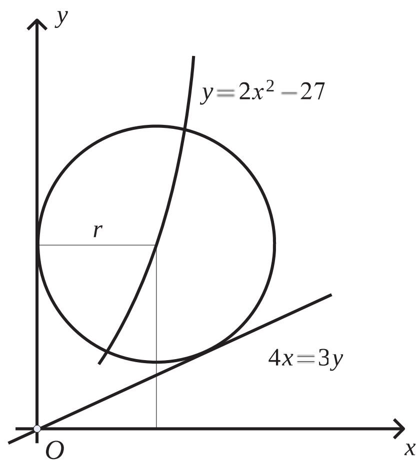
$$V_T=\frac{c^3}{6}=\frac{9(10-7\sqrt{2})}{8}cm^3$$

Волуменот на коцката е $V_K=a^3=27cm^3$. Конечно, волуменот на телото е

$$V=V_K-8V_T=63(\sqrt{2}-1)cm^3.$$

## IV година

**1АБ.** Правите $x=0$ и $4x=3y$ се тангенти на кружница која се наоѓа во првиот квадрант и има центар на кривата $y=2x^2-27$. Најди го радиусот на кружницата.




**Решение.** Нека $(a,b)$ се координатите на центарот на кружницата и $r$ е нејзиниот радиус. Да забележиме дека кружницата лежи во полурамнината определена со правата $4x=3y$ и точката $(0,1)$ (т.е. со позитивниот дел на $y$-оската), па важи $3a-4b>0$. Бидејќи кружницата се наоѓа во првиот квадрант, следува дека $a>0$ и $b>0$. Од тоа што $y$-оската е тангента следува дека $r=a$, а бидејќи центарот се наоѓа на параболата $y=2x^2-27$ следува дека $b=2a^2-27=2r^2-27$, па координатите на центарот се $(r,2r^2-27)$. Растојанието од центарот до $y$-оската е $r$ а до правата $4x=3y$ е $\frac{3(2r^2-27)-4r}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{6r^2-4r-81}{5}$. Бидејќи двете прави се тангенти, следува дека $r=\frac{6r^2-4r-81}{5}$, и оттука добиваме $6r^2-9r-81=0$. Решенија на последната равенка се $-3$ и $\frac{9}{2}$, па бараниот радиус е $\frac{9}{2}$.

**2АБ.** Аглите на конвексниот $n$- аголник се $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha$. Најди ги сите можни вредности за $n$ и соодветните вредности за $\alpha$.

**Решение.** Јасно е дека $n\geq 3$. Збирот на аглите во конвексниот $n$- аголник е $(n-2)\pi$ ($n$-аголникот можеме да го поделиме на $n-2$ триаголници). Од друга страна $\alpha+2\alpha+\ldots+n\alpha=\alpha(1+2+\ldots+n)=\frac{n(n+1)}{2}\alpha$.

Од равенката, $(n-2)\pi=\frac{n(n+1)}{2}\alpha$ добиваме $\alpha=\frac{2\pi(n-2)}{n(n+1)}$ и $n\alpha=\frac{2\pi(n-2)}{n+1}<\pi$. Но, тогаш $\frac{2(n-2)}{n+1}<1$, т.е. $n<5$. Сега за $n=3$ имаме $\alpha=\frac{\pi}{6}$, а за $n=4$ имаме $\alpha=\frac{\pi}{5}$.

**3А.** Најди $a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, ако $a_1 = 1$, $a_{n+1} a_n = 4(a_{n+1} - 1)$, за $n \geq 1$.

**Решение.** Бидејќи $a_{n+1} a_n = 4(a_{n+1} - 1)$, $a_{n+1} = \frac{4}{4 - a_n}$. Ако на двете страни одземеме $2$, имаме $a_{n+1} - 2 = \frac{4}{4 - a_n} - 2 = \frac{2(a_n - 2)}{4 - a_n}$. Оттука, $\frac{1}{a_{n+1} - 2} = \frac{4 - a_n}{2(a_n - 2)} = \frac{1}{a_n - 2} - \frac{1}{2}$. Па, низата $\{\frac{1}{a_n - 2}\}$ е аритметичка прогресија со почетен член $\frac{1}{a_n - 2} = -1$ и разлика $d = -\frac{1}{2}$. Значи, $\frac{1}{a_n - 2} = -1 + (n-1)(-\frac{1}{2}) = -\frac{n+1}{2}$, од каде $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Конечно,

$$a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = (2 \cdot \tfrac{1}{2})(2 \cdot \tfrac{2}{3})(2 \cdot \tfrac{3}{4}) \ldots (2 \cdot \tfrac{n}{n+1}) = \frac{2^n}{n+1}.$$

**4А.** Најди ги сите природни броеви $n$ така што $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k!}$ е цел број.

**Решение**. Бидејќи $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} = \frac{n! + n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 + \ldots + n(n-1) + n + 1}{n!} = \frac{(n-1)S + n + 1}{n!}$,

добиваме дека $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k!} = \frac{(n-1)S + (n+1)}{(n-1)!}$. За бројот $\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k!}$ да биде цел треба $(n-1)! \mid (n-1)S + n + 1$. Бидејќи $(n-1) \mid (n-1)!$ и $n-1 \mid (n-1)S$ следува дека мора $n-1 \mid n+1$.Јасно $n-1 \mid n-1+2$ па оттука $n-1 \mid 2$. Значи $n = 2$ и $n = 3$. **)**

**3Б.** Ако $x^2 = x + 1, n \geq 2$ тогаш докажи дека $x^n = F_n x + F_{n-1}$ каде $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ за секој природен број $n$.

**Решение.** Ќе докажеме со помош на математичка индукција по $n$. За $n = 2$ добиваме $x^2 = F_2 x + F_1 = x + 1$.

Сега, нека претпоставиме за $n > 2$ е исполнето $x^{n-1} = F_{n-1} x + F_{n-2}$. Имаме

$$x^n = x \cdot x^{n-1} = x(F_{n-1} x + F_{n-2}) = x^2 F_{n-1} + x F_{n-2} = (x+1) F_{n-1} + x F_{n-2}$$
$$= x(F_{n-1} + F_{n-2}) + F_{n-1} == x F_n + F_{n-1}.$$

**4Б.** Ако $n \mid a - b$ докажи дека $n^2 \mid a^n - b^n$. Дали важи обратното?

**Решение.** Бидејќи $n \mid a - b$ следува дека постои цел број $c$ така што $a = nc + b$. Од Биномната формула добиваме

$$a^n - b^n = (b + nc)^n - b^n = b^n + \binom{n}{1} b^{n-1} nc + \binom{n}{2} b^{n-2} n^2 c^2 + \ldots + \binom{n}{n} n^n c^n - b^n$$
$$= n^2 (b^{n-1} c + \binom{n}{2} b^{n-2} c^2 + \ldots + \binom{n}{n} n^n c^n).$$

Значи, $n^2 \mid (a^n - b^n)$.

Обратно не важи бидејќи $3^n \equiv 1^4 \pmod{4^2}$ но 3 и 1 немат ист остаток при делење со 4.

## МЕЃУНАРОДЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР
## КЕНГУР 2014 ГОДИНА

### I и II година

**<u>Секоја од задачите со реден број од 1 до 10 се вреднува со 3 поени</u>**

**1.** Датумот за одржување на меѓународниот натпревар Кенгур е третиот четврток во месец март.

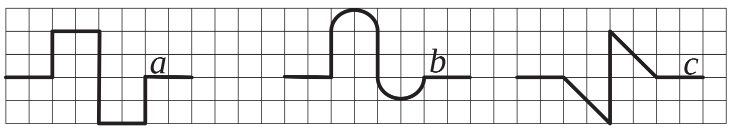
Кој е првиот можен датум за одржување на овој натпревар?

$(A)$ 14 $(B)$ 15 $(C)$ 20 $(D)$ 21 $(E)$ 22

**2.** Товарниот брод MSC Fibula го држи рекордот помеѓу товарните бродови кои влегле во заливот на Сан Франциско. Тој носел 12500 контејнери, кои ако се стават еден по друг по должина се добива низа контејнери долга 75 km. Колку е должината на еден контејнер?

$(A)$ 6 m $(B)$ 16 m $(C)$ 60 m $(D)$ 160 m $(E)$ 600 m

**3.** Нека $a, b, c$ се должини на линиите дадени на цртежот. Кој од следните одговори е точен?




$(A)$ $a<b<c$ $(B)$ $a<c<b$ $(C)$ $b<a<c$

$(D)$ $b<c<a$ $(E)$ $c<b<a$

**4.** Страната на поголемиот шестаголник е двапати поголем од страната на помалиот шестаголник дадени на цртежот. Малиот шестаголник има плоштина 4cm. Колку е плоштината на големиот шестаголник?

$(A)$ 16 cm$^2$ $(B)$ 14 cm$^2$ $(C)$ 12 cm$^2$ $(D)$ 10 cm$^2$ $(E)$ 8 cm$^2$

**5.** Кој број е средна вредност на $\frac{2}{3}$ и $\frac{4}{5}$?

$(A)$ $\frac{11}{15}$ $(B)$ $\frac{7}{8}$ $(C)$ $\frac{3}{4}$ $(D)$ $\frac{6}{15}$ $(E)$ $\frac{5}{8}$

**6.** Во бројот 2014 последната цифра е поголема од збирот на претходните три цифри. Пред колку години се случило истото?

$(A)$ 1 $(B)$ 3 $(C)$ 5 $(D)$ 7 $(E)$ 11

**7.** Која е негацијата на исказот: ”Сите решија повеќе од 20 задачи”.

$(A)$ Никој не реши повеќе од $20$ задачи

$(B)$ Некој реши помалку од $21$ задача

$(C)$ Сите решија помалку од $21$ задача

$(D)$ Некој реши точно $20$ задачи

$(E)$ Некој реши повеќе од $20$ задачи

**8.** Во еден координатен систем Марко нацртал квадрат. Едната негова дијагонала лежи на $x$ -оската, а нејзини крајни точки се $(-1,0)$ и $(5,0)$. Која одследните точки е теме на квадратот?

$(A)$ $(2,0)$ $(B)$ $(2,3)$ $(C)$ $(2,-6)$ $(D)$ $(3,5)$ $(E)$ $(3,-1)$

**9.** Во едно село односот меѓу возразни мажи возрасни жени е $2:3$, а односот меѓу возрасни жени и деца е $8:1$. Колку е односот меѓу возрасните (мажи и жени) и децата?

$(A)$ $5:1$ $(B)$ $10:3$ $(C)$ $13:1$ $(D)$ $12:1$ $(E)$ $40:3$

**10.** Големото тркало на еден велосипед има периметар $4,2$ метри. Малото тркало има периметар $0,9$ метри. Во еден момент вентилите на двете тркала се во најниска точка(најблиску до земјата). По колку метри вентилите на двете тркала првпат повторно во исто време ќе бидат најблиску до земјата?

$(A)$ $4,2\,\mathrm{m}$ $(B)$ $6,3\,\mathrm{m}$ $(C)$ $12,6\,\mathrm{m}$ $(D)$ $25,2\,\mathrm{m}$ $(E)$ $37,8$ m

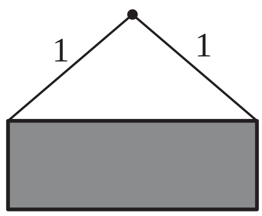
**Секоја од задачите со реден број од 11 до 20 се вреднува со 4 поени**

**11.** Оваа година збирот на годините на бабата, нејзината ќерка и нејзината внука е $100$.

Која година е родена внуката ако нивните години се степен на бројот $2$ ?

$(A)$ 1998 $(B)$ 2006 $(C)$ 2010 $(D)$ 2012 $(E)$ 2013

**12.** На шајки заковани на ѕид на $2,5$ m од подот, Мартин обесил слики на конци со должина $2$ m (види цртеж). Која од следните слики е најблиску до подот(димензиите на сликите се во сантиметри)?

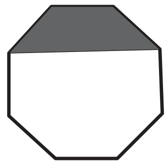



$(A)$ $60\times40$ $(B)$ $120\times50$ $(C)$ $120\times90$

$(D)$ $160\times60$ $(E)$ $160\times100$

**13.** Шест девојки седат во ист стан кој има две купатила. Наутро точно во $07:00$ часот тие почнуваат да ги користат купатилата, и влегуваат во нив една по една, секоја девојка влегува еднаш во едно од купатилата. Кога последната девојка ќе излезе од купатило, тие седнуваат заедно да доручковаат. Во купатило тие се задржуваат $9,11,13,18,22,23$ минути соодветно. Кога најрано тие може да седнат да доручковаат?

$(A)$ $07:48$ $(B)$ $07:49$ $(C)$ $07:50$ $(D)$ $07:51$ $(E)$ $08:03$



**14.** На цртежот е даден правилен осумаголник. Осенчениот негов дел има плоштина $3\ \text{cm}^2$.

$(A)$ $8+4\sqrt{2}$ $(B)$ $9$ $(C)$ $8\sqrt{2}$ $(D)$ $12$ $(E)$ $14$

**15.** Во Африка е откриен нов вид на крокодили. Должината на неговата опашка е една третина од вкупната негова должина. Неговата глава е долга $93\ \text{cm}$ и нејзината должина е една четвртина од должината на неговото тело без неговата опашка. Колку е должината на крокодилот во $\text{cm}$?

$(A)$ $558$ $(B)$ $496$ $(C)$ $490$ $(D)$ $372$ $(E)$ $186$


**16.** На цртежот е дадена специјална коцка. Збировите на броевите на нејзините спротивни страни се еднакви меѓу себе. Броевите кои не ги гледаме се прости броеви. Кој број е спротивен на бројот $14$?

$(A)$ $11$ $(B)$ $13$ $(C)$ $17$ $(D)$ $19$ $(E)$ $23$

**17.** Ана треба да помини растојание од $8\ \text{km}$ и кога оди нејзината брзина е $4\ \text{km/h}$. Кога трча нејзината брзина е $8\ \text{km/h}$. Колку време таа треба да трча за да просечната брзина со која ќе го помине даденото растојание е $5\ \text{km/h}$?

$(A)$ $15$ min $(B)$ $24$ min $(C)$ $30$ min $(D)$ $36$ min $(E)$ $40$ min

**18.** Шахистот Боби на еден шаховски турнир одиграл $40$ партии и освоил $25$ поени(за победа се добива еден поен, за нерешено се добива половина поен а за пораз се добиваат нула поени). Во колку повеќе партии тој победил одошто изгубил на турнирот?

$(A)$ $5$ $(B)$ $7$ $(C)$ $10$ $(D)$ $15$ $(E)$ $12$

**19.** Јана, Даниела и Хана сакале да купат исти капи. Но на Јана и недостигала $\frac{1}{3}$ од цената на капата, на Даниела $\frac{1}{4}$ од цената на капата и на

Хана и недостигала $\frac{1}{5}$ од цената на капата. Во сезонскиот попуст цената на капата се намалила за $9,40\ EUR$. Тие ги здружиле своите пари и имале доволно да си купат по една капа. Едно евро им останало.

Колку е цената на капата пред намалувањето?

$(A)$ 12 EUR $(B)$ 16 EUR $(C)$ 28 EUR
$(D)$ 36 EUR $(E)$ 112 EUR

**<u>Секоја од задачите со реден број од 21 до 30 се вреднува со 5 поени</u>**

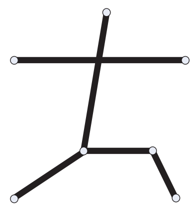
**20.** Нека $p,q,r$ се позитивни цели броеви такви што $p+\frac{1}{q+\frac{1}{r}}=\frac{25}{19}$. Колку изнесува производот $pqr$?

$(A)$ 6 $(B)$ 10 $(C)$ 18 $(D)$ 36 $(E)$ 42

**21.** Во равенката $N\times U\times(M+B+E+R)=33$, на различни букви одговараат различни цифри, и на различни цифри одговараат различни букви. Колку решенија има оваа равенка?

$(A)$ 12 $(B)$ 24 $(C)$ 30 $(D)$ 48 $(E)$ 60

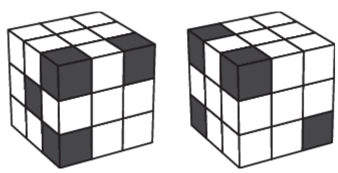
**22.** На цртежот Марко сака да доцрта отсечки, така што секоја од точките да има ист број на врски со останатите точки.



Кој е најмалиот број на отсечки кои Марко мора да ги доцрта?

$(A)$ 4 $(B)$ 5 $(C)$ 6 $(D)$ 9 $(E)$ 12

**23.** На цртежот се дадени два различни погледи на една иста коцка. Таа е составена од 27 единечни коцкички, од кои некои се бели а некои се црни.



Колку најмногу единечни коцки може да бидат црни?

$(A)$ 5 $(B)$ 7 $(C)$ 8 $(D)$ 9 $(E)$ 10

**24.** На еден остров имало два вида на жаби: зелени и сини. Бројот на сини жаби се зголемил за $60\%$ а бројот на зелени жаби се намалил за $60\%$. По промената односот на сини жаби наспрема зелени жаби е ист како пред промената но во обратен редослед.

За кој процент се променил бројот на жаби на островот?

$(A)$ 0% $(B)$ 20% $(C)$ 30% $(D)$ 40% $(E)$ 50%

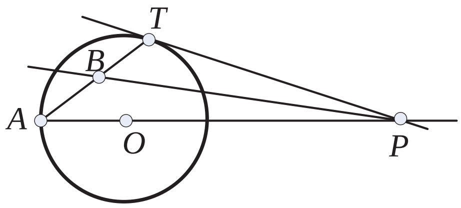
**25.** Мартина на табле запишал повеќе позитивни цели броеви, кои не се поголеми од $100$. Кој е најголениот број на броеви што тој може да ги има напишано на таблата?

($A$) 5 ($B$) 17 ($C$) 68 ($D$) 69 ($E$) 90

**26.** Секои три темиња на една коцка формираат триаголник. Кој е бројот на триаголници чии темиња се темиња на коцката што не лежат на една негова страна?

($A$) 16 ($B$) 24 ($C$) 32 ($D$) 40 ($E$) 48

**27.** На цртежот $PT$ е тангента на кружницата $k$ со центар $O$ а $PB$ е симетрала на аголот $\measuredangle TPA$. Колку е аголот $\measuredangle TPB$?




($A$) $30^\circ$ ($B$) $45^\circ$ ($C$) $60^\circ$

($D$) $75^\circ$ ($E$) зависи од изборот на точката $P$

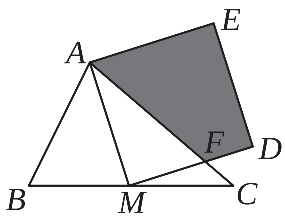
**28.** Мартин на табла во растечки редослед ги запишал сите седумцифрени броеви запишани со цифрите $1,2,3,4,5,6$ и $7$ така што во секој запишан број секоја цифра се јавува по еднаш.

Кој е најголемиот број од првата половина од запишаните броеви?

($A$) 1234567 ($B$) 3765421 ($C$) 4123567

($D$) 4352617 ($E$) 4376521

**29.** Во триаголникот $ABC$, $\overline{AB}=6$ cm, $\overline{AC}=8$ cm и $\overline{BC}=10$ cm, а $M$ е средина на страната $BC$. Четириаголникот $AMDE$ е квадрат при што $MD$ ја сече $AC$ во точката $F$. Определи ја плоштината на четириаголникот $AFDE$ во $\text{cm}^2$.




($A$) $\frac{124}{8}$ ($B$) $\frac{125}{8}$ ($C$) $\frac{126}{8}$ ($D$) $\frac{127}{8}$ ($E$) $\frac{128}{8}$

**30.** Во еден ред стојат $2014$ лица. Секој од нив е или лажго или витез. Лажговците секогаш лажат, а витезите секогаш ја зборуваат вистината. Секој од нив вели: "Постојат повеќе лажговци од мене лево од витези од мене десно". Колку лажговци има во редот?

($A$) 0 ($B$) 1 ($C$) 1007 ($D$) 1008 ($E$) 2014

## РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД РУБРИКА ЗАДАЧИ ОД СИГМА 104

**1366.** Природниот број $n$ е полн квадрат. Кој е најмалиот природен број кој е поголем од $n$ и е полн квадрат?

**Решение.** Ако $n$ е полн квадрат, тогаш постои природен број $k$ таков што $n=k^2$. Најмалиот природен број кој е полн квадрат и е поголем од $k^2$ е $(k+1)^2$, т.е. $(\sqrt{n}+1)^2$.

**1367.** Ако $a,b,c$ се попарно различни рационални броеви, тогаш

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}$$

е полн квадрат на рационален број. Докажи!

**Решение.** Бидејќи $a,b$ и $c$ се попарно различни рационални броеви, добиваме дека $a-b,b-c,c-a,\frac{1}{c-a},\frac{1}{a-b},\frac{1}{b-c},\frac{1}{(a-b)^2},\frac{1}{(b-c)^2},\frac{1}{(c-a)^2}$ се исто така рационални броеви. Со елементарни трансформации дадениот израз можеме да го запишеме во облик:

$$\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}=(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})^2-2(\frac{1}{(c-a)(a-b)}+\frac{1}{(a-b)(b-c)}+\frac{1}{(b-c)(c-a)})$$

$$=(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})^2-2\frac{a-b+b-c+c-a}{(a-b)(b-c)(c-a)}=(\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c})^2$$

Бидејќи $\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}$ е рационален број, тврдењето од задачата е докажано.

**1368.** Определи ги вредностите на збирот $x+y+u+v$ каде $x,y,u,v$ се попарно различни броеви, такви што

$$\frac{x+u}{x+v}=\frac{y+v}{y+u}.$$

**Решение.** Од условот на задачата имаме $x\neq y\neq u\neq x$, $x\neq u\neq v\neq x$ и $y\neq v$. Дадениот израз можеме да го запишеме во облик

$$(x+u)(y+u)=(x+v)(y+v)$$

$$xy+xu+yu+u^2=xy+xv+yv+v^2$$

$$xu-xv+yu-yv+u^2-v^2=0$$

$$x(u-v)+y(u-v)+(u-v)(u+v)=0$$

$$(u-v)(x+y+u+v)=0.$$

Од условот на задачата $u-v\neq 0$, па според тоа $x+y+u+v=0$, што требаше да се определи.

**1369.** Нека $a,b,c,d$ се ненегативни броеви. Докажи дека следниве искази се еквивалентни:

$p_1(x)$: $a^2-b^2+c^2-d^2=0$ и $a-b+c-d=0$, и $p_2(x)$: $a^k-b^k+c^k-d^k=0$ за секој $k\in\mathbb{Z}$.

**Решение.** Импликацијата $p_2(x) \Rightarrow p_1(x)$ е очигледна. Ако $p_2(x)$ е исполнет за произволен $k \in Z$, тогаш за $k=2$ и $k=1$ се добива $p_1(x)$.

Ќе ја покажеме импликацијата $p_1(x) \Rightarrow p_2(x)$. Имаме

$$p_1(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=d-c \\ a^2-b^2=d^2-c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-d=b-c \\ (a-b)(a+b)=(d-c)(d+c) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-d=b-c \\ (a-b)(a+b-d-c)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \vee \begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^k=b^k \\ c^k=d^k \end{cases} \vee \begin{cases} a^k=d^k \\ b^k=c^k \end{cases} \Rightarrow a^k-b^k+c^k-d^k=0 \Leftrightarrow p_2(x),$$

што требаше да се докаже.

**1370.** Во множеството реални броеви да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x^2 & - & y & = & z^2 \\ y^2 & - & z & = & x^2 \\ z^2 & - & x & = & y^2 \end{cases}.$$

**Решение.** Ако трите равенки ги собереме, непосредно добиваме дека

$$x+y+z=0.$$

Ако од добиената равенка го изразиме $z$ и го замениме во првата равенка од системот, добиваме

$$x^2-y=x^2+2xy+y^2,$$

$$y(y+2x+1)=0.$$

Сега се можни два случаи.

**Случај 1.** $y=0$. Тогаш $z=-x$, па од втората равенка на системот добиваме дека $x(x-1)=0$. Нејзини решенија се $x=0$ и $x=1$. Ако $x=0$, тогаш $z=0$, па решение на почетниот систем е $x=y=z=0$. Ако $x=1$, тогаш $z=-1$, па решение на системот е $x=1, y=0, z=-1$.

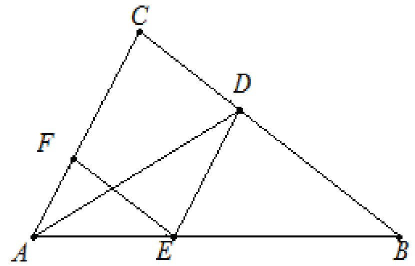
**Случај 2.** $y=-2x-1$. Тогаш $z=x+1$. Ако замениме во третата равенка на почетниот систем, добиваме $x(x+1)=0$. Решенија на последната равенка се $x=0$ и $x=-1$. За $x=0$, добиваме $y=-1, z=1$ и решение на системот е $(x,y,z)=(0,-1,1)$. За $x=-1$, добиваме $y=1$ и $z=0$, па решение во овој случај е $(x,y,z)=(-1,1,0)$.

Конечно, множество на решенија на системот е

$$\{(0,0,0),(1,0,-1),(-1,1,0),(0,-1,1)\}.$$

**1371.** Во триаголникот $ABC$, симетралата на аголот $BAC$ ја сече страната $BC$ во точка $D$, правата низ $D$ која што е паралелна со $AC$ ја сече $AB$ во точка $E$ и правата низ $E$ која што е паралелна со $BC$ ја сече $AC$ во точка $F$. Докажи дека $\overline{AE}=\overline{FC}$.

**Решение.** Од паралелноста на $DE$ и $AC$ следува дека $\measuredangle DAC = \measuredangle EDA$. Од тоа што $AD$ е симетрала на аголот $BAC$, следува дека $\measuredangle DAC = \measuredangle DAE$ па затоа $\measuredangle EDA = \measuredangle DAE$. Оттука, триаголникот $AED$ е рамнокрак и затоа $\overline{AE} = \overline{DE}$, а од паралелограмот $EDCF$ следува дека $\overline{DE} = \overline{FC}$. Затоа, $\overline{AE} = \overline{FC}$.




**1372.** Низ точката $A$ се повлечени две прави кои ја допираат кружницата $k$ со радиус $R$ во точките $B$ и $C$, така што триаголникот $ABC$ е рамностран. Да се пресмета плоштината на триаголникот $ABC$.

**Решение.** Нека $O$ е центар на кружницата $k$. Тогаш триаголникот $BOC$ е рамнокрак со основа $BC$ и крак со должина $R$. Нека $S$ е подножје на висината спуштена од $O$ кон страната $BC$ во триаголникот $BOC$.

Да забележиме дека $\measuredangle OBA = \measuredangle OCA = 90^\circ$ (како агли меѓу тетива и тангента во кружница). Според тоа $\measuredangle BOC = 120^\circ$. Сега е јасно дека $\measuredangle COS = \measuredangle BOS = 60^\circ$ од каде добиваме дека $\overline{OS} = \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{OC} = \frac{R}{2}$. Сега од Питагорина теорема јасно е дека $\overline{BS} = \overline{CS} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, па според тоа $a = \overline{BC} = 2\overline{BS} = 2\frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$. Значи, страната на рамностраниот триаголник $ABC$ е $a = R\sqrt{3}$, па неговата плоштина е

$$P_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 3\sqrt{3}}{4}.$$

**1373.** Зададени се 15 квадратни триноми $x^2 - p_i x + q_i$, $i \in \{1,2,3,...,15\}$, чии коефицинти се различни и припаѓаат на множеството $\{1,2,3,...,30\}$ (еден број не е коефициент во два триноми). Корен на квадратен трином го нарекуваме “добар” ако тој е поголем од 20. Колку најмногу “добри” корени може да имаат зададените 15 квадратни триноми?

**Решение.** Нека $x^2 + px + q$ е еден од зададените квадратни триноми. Тој може да има најмногу еден добар корен. Навистина, ако претпоставиме дека и $x_1$ и $x_2$ се добри корени, тогаш $p = x_1 + x_2 > 20 + 20 > 30$, што е спротивно на условите од задачата ( $p \in \{1,2,3,...,30\}$ ).

Согласно изборот на $p$ една равенка, т.е. квадратен трином има добар корен, ако $p > 20$. Навистина, ако претпоставиме дека $p \le 20$ и триномот има добар корен, тогаш од корените $x_{1/2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$ е коренот $x_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, т.е. $\frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} > 20$. Последната неравенка можеме да ја запишеме во облик

$$\sqrt{p^2 - 4q} > 40 - p$$
$$4q < 80p - 1600$$
$$q < 20p - 400 < 20 \cdot 20 - 400 = 0,$$

што е спротивно на изборот на $q$.

Во множеството $\{1,2,3,...,30\}$ има $10$ броеви поголеми од $20$ кои може да бидат вредности за $p$ а тие се $21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29$ и $30$.

Треба да покажеме дека за секој од овие броеви постои трином кој има добар корен. Ќе направиме избор $p_k = 20+k$, $q_k = k$, $k=1, 2, 3,..., 10$. Тогаш

$$D_k = p_k^2 - 4q_k = (20+k)^2 - 4k = 400+40k+k^2-4k > 400-40k+k^2 = (20-k)^2$$

при што имаме

$$x_k^{\max} = \frac{p_k+\sqrt{D_k}}{2} > \frac{20+k+\sqrt{(20-k)^2}}{2} = \frac{20+k+20-k}{2} = 20.$$

**1374.** Нека $ABC$ е впишан триаголник во параболата $y=x^2$. Броевите $a,b,c$ се апсциси на средните точки на неговите страни.

Определи го радиусот на опишаната кружница околу триаголникот .

**Решение.** Нека $A(l,l^2)$, $B(m,m^2)$ и $N(n,n^2)$ се темиња на триаголникот $ABC$. Тогаш од условот на задачата имаме

$$c=\tfrac{1}{2}(m+l),\ b=\tfrac{1}{2}(l+n),\ a=\tfrac{1}{2}(n+m),$$

а според формулата за пресметување на плоштина на триаголник зададен во координати имаме

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} m-l & m^2-l^2 \\ n-l & n^2-l^2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|(m-n)(n-l)(l-m)|.$$

Од друга страна, според формулата за растојание меѓу точки, имаме

$$\overline{AB} = \sqrt{(m-l)^2+(m^2-l^2)^2} = |m-l|\sqrt{1+(m+l)^2} = |m-l|\sqrt{1+4c^2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(n-m)^2+(n^2-m^2)^2} = |n-m|\sqrt{1+(n+m)^2} = |n-m|\sqrt{1+4a^2}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(l-n)^2+(l^2-n^2)^2} = |l-n|\sqrt{1+(l+n)^2} = |l-n|\sqrt{1+4b^2}$$

Сега радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ќе го пресметаме по формулата

$$R = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}{4P_{ABC}} = \frac{1}{2}\sqrt{(1+4a^2)(1+4b^2)(1+4c^2)}.$$

**1375.** Да се пресмета вредноста на изразот

$$\operatorname{tg}5^\circ\cdot\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}65^\circ+\operatorname{tg}65^\circ\cdot\operatorname{tg}5^\circ.$$

**Решение.** Со помош на тригонометриски идентитети добиваме

$$\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}65^\circ+\operatorname{tg}65^\circ\operatorname{tg}5^\circ = \operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}(90^\circ-25^\circ)+\operatorname{tg}(90^\circ-25^\circ)\operatorname{tg}5^\circ$$

$$=\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{ctg}25^\circ(\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}5^\circ) = \frac{\sin5^\circ\sin20^\circ}{\cos5^\circ\cos20^\circ}+\frac{\cos25^\circ}{\sin25^\circ}\left(\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}+\frac{\sin5^\circ}{\cos5^\circ}\right)$$

$$=\frac{\sin5^\circ\sin20^\circ}{\cos5^\circ\cos20^\circ}+\frac{\cos25^\circ}{\sin25^\circ}\frac{\sin20^\circ\cos5^\circ+\sin5^\circ\cos20^\circ}{\cos20^\circ\cos5^\circ} = \frac{\sin5^\circ\sin20^\circ}{\cos5^\circ\cos20^\circ}+\frac{\cos25^\circ}{\sin25^\circ}\frac{\sin25^\circ}{\cos20^\circ\cos5^\circ}$$

$$=\frac{\sin5^\circ\sin20^\circ}{\cos5^\circ\cos20^\circ}+\frac{\cos25^\circ}{\cos20^\circ\cos5^\circ} = \frac{\sin5^\circ\sin20^\circ+\cos25^\circ}{\cos20^\circ\cos5^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\cos15^\circ-\cos25^\circ)+\cos25^\circ}{\frac{1}{2}(\cos15^\circ+\cos25^\circ)} = \frac{\frac{1}{2}(\cos15^\circ+\cos25^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos15^\circ+\cos25^\circ)} = 1$$

**1376.** Нека $a, b, c$ и $d$ се цели броеви. Докажи дека производот

$$P = (a-b)(c-a)(d-a)(d-c)(d-b)(c-b)$$

е делив со 12.

**Решение.** Од четири природни т.е. цели броеви, два броја можеме да избереме на $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ начини, и тие се $ab, ac, ad, bc, bd, cd$. Сега е јасно дека од разликите на броевите во секој пар одвоено е формиран производот $P$. Од друга страна, бројот 12 можеме да го запишеме во облик $12 = 2^2 \cdot 3$. Според тоа, доволно е да докажеме дека $4 | P$ и $3 | P$.

Да забележиме дека два од броевите $a, b, c$ и $d$ при делење со 3 имаат ист остаток (тврдењето следува од Принципот на Дирихле). Според тоа, нивната разлика е делива со 3, и истата е делител на $P$, т.е. $3 | P$. Навистина, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a = 3k + r$ и $b = 3p + r$, па тогаш од $b - a | P$, добиваме дека $3(p-k) | P$, т.е. $3 | P$.

Од друга страна при делење со 4 на дадените четири броја, се добиваат четири остатоци $r_1, r_2, r_3, r_4$, т.е. можни се четири остатоци. Тие припаѓаат на множеството $\{0,1,2,3\}$. Сега, можни се два случаи.

**Случај 1.** Постојат два остатоци кои се еднакви меѓу себе.

Нека два од броевите $a, b, c, d$ се од облик $4k_1 + r$ и $4k_2 + r$. Тогаш нивната разлика $(4k_1 + r) - (4k_2 + r) = 4(k_1 - k_2)$ е делива со 4, т.е. $4 | P$.

**Случај 2.** Сите четири остатоци се различни меѓу себе.

Со други зборови $r_i \neq r_j$ ако $i \neq j$, $i, j \in \{0,1,2,3\}$. Тогаш еден од броевите е од облик $4k_i + 1$ а друг е од облик $4k_j + 3$. Нивната разлика е делива со 2. Преостанатите два броја се од облик $4k_l + 2$ и $4k_m$ и нивната разлика е исто така делива со 2, а не е делива со 4. Значи, два од множителите на $P$ се деливи со 2 (не се деливи со 4), па нивниот производ е делив со 4.

Од целата претходна дискусија $4 | \mathrm{P}$, па според тоа $12 | P$ што требаше да се докаже.

**1377.** Квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$ има корени во интервалот $[0,1]$. Определи го максимумот на изразот

$$\frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}. \qquad (*)$$

**Решение.** Нека $u$ и $v$ се корени на равенката $ax^2 + bx + c = 0$, при што без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $0 \leq u \leq v \leq 1$. Од Виетовите врски имаме $u + v = -\frac{b}{a}$ и $uv = \frac{c}{a}$, т.е. $b = -a(u+v)$, $c = auv$.

Ако замениме во изразот $(*)$, добиваме

$$\frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = \frac{[a+a(u+v)][2a+a(u+v)]}{a[a+a(u+v)+auv]} = \frac{a(1+u+v)a(2+u+v)}{a^2(1+u+v+uv)} =$$

$$= \frac{(1+u+v)(2+u+v)}{(1+u)(1+v)} = 2 + \frac{u}{1+v} + \frac{v}{1+u} \leq 2 + \frac{u}{1+u} + \frac{1}{1+u} = 3.$$

Јасно е дека равенство се достигнува кога $u=v=1$(во тој случај равенката има двоен корен $1$, при што таа е од облик $a(x-1)^2=0$).

**1378.** Да се реши равенката
$$\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+...+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}=3,$$
во множеството цели броеви.

**Решение.** Бидејќи $x\neq 0$ (дефинициона област на равенката), ако ја помножиме со $x$ таа го добива обликот
$$(x-1)+(x-2)+(x-3)+....+3+2+1=3x.$$
Левата страна на равенката е аритметичка прогресија, која е опаѓачка, со прв член $a_1=x-1$, со разлика $d=-1$ и $a_n=1$. Бидејќи $n=\frac{a_n-a_1}{d}+1=\frac{1-x+1}{-1}+1=x-1$, добиваме $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n=\frac{x-1+1}{2}(x-1)=3x$, т.е. $x^2=7x$. Бидејќи $x\neq 0$, решение на равенката е $x=7$.

**1379.** Нека $a,b,c$ се произволни реални броеви. Докажи дека барем еден од броевите $(a+b+c)^2-9ab,\ (a+b+c)^2-9bc,\ (a+b+c)^2-9ca$ е ненегативен.

**Решение:** Да претпоставиме спротивно, т.е. дека сите три броја се негативни. Тогаш имаме
$$(a+b+c)^2-9ab<0,\ (a+b+c)^2-9bc<0,\ (a+b+c)^2-9ca<0.$$
Собирајќи ги овие неравенства и со средување добиваме
$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca<0, \text{т.е. } \tfrac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]<0.$$
Но, сума на квадрати на три реални броеви не може да биде негативна, па заклучуваме дека барем еден од разгледуваните три броја е ненегативен, што требаше да се докаже.

**1380.** Нека $a$, $b$, $c$ се цели броеви така да $a$ е парен, $b$ непарен. Докажи дека за секој природен број $n$, постои природен број $x$, така да
$$2^n \mid ax^2+bx+c.$$

**Решение.** Тврдењето ќе го покажеме со помош на принципот на математичка индукција. За $n=0$, $x_0\in\mathbb{N}$, јасно е дека $2^0 \mid ax_0{}^2+bx_0+c$. За $k\geq 0$, нека $x_k\in\mathbb{N}$ е таков да $2^k \mid ax_k{}^2+bx_k+c=P(x_k)$. Ќе го избереме $x_{k+1}\in\mathbb{N}$ така да $2^{k+1}\mid P(x_{k+1})$. Ако $2^{k+1}\mid P(x_k)$ тогаш $x_{k+1}=x_k$. Во спротивно $P(x_k)=2^k\cdot d$, $d\in\mathbb{Z}$, каде $d$ е непарен број. Па,
$$P(x)-P(x_k)=(x-x_k)(a(x+x_k)+b),$$
каде $a(x+x_k)+b$ е непарен , за $x\in\mathbb{N}$. Нека $x_{k+1}=x_k+2^k\cdot h$, $h\in\mathbb{N}$ е непарен. Оттука
$$P(x_{k+1})=P(x_k)+2^k h(a(x_{k+1}+x_k)+b)=2^k(d+h(a(x_{k+1}+x_k)+b)).$$
Бидејќи $d+h(a(x_{k+1}+x_k)+b)$ е парен, $2^{k+1}\mid P(x_{k+1})$, па согласно принципот на математичка индукција тврдењето важи.

## РЕШЕНИЕ НА НАГРАДНАТА ЗАДАЧА ОД СИГМА 104

Нека $p$ е природен број, таков што $2^p-1$ е прост број. Докажи дека збирот на позитивните делители на бројот $n=2^{p-1}(2^p-1)$ кои се помали од $n$ е еднаков на $n$.

**Решение.** Ќе воведеме ознака $q=2^p-1$. Бидејќи $n=2^{p-1}q$ и $q$ е прост број, делители на бројот $n$ кои се помали од него се

$$1,2,...,2^{p-1}$$

$$q,2q,...,2^{p-2}q$$

Збирот на броевите од првата (горната редица) е

$$A=1+2+3+...+2^{p-1}=(2-1)(1+2+3+...+2^{p-1})=2^p-1=q\ ,$$

а збирот на броевите од долната редица е

$$B=q+2q+...+2^{p-2}q=q(2-1)(1+2+...+2^{p-2})=q(2^{p-1}-1)=q2^{p-1}-q\ .$$

За нивниот збир имаме $A+B=q+n-q=n$, што требаше да се докаже.

## РЕШЕНИЕ НА ЗАДАЧА НА БРОЈОТ, СИГМА 104

Нека $a,b$ се природни броеви такви што

$$\frac{NZS(a,b)}{NZD(a,b)}=a-b\ . \qquad (*)$$

Докажи дека $NZS(a,b)=[NZD(a,b)]^2$.

**Решение.** Нека $a$ и $b$ се природни броеви кои го исполнуваат условот од задачата, и нека $NZD(a,b)=d$. Постојат единствени $x$ и $y$ такви што $NZD(x,y)=1$ и $a=dx, b=dy$. Но тогаш

$$NZS(a,b)=NZS(dx,dy)=d\cdot NZS(x,y)=dxy\ .$$

Сега равенството (*) го добива обликот $\frac{dxy}{d}=dx-dy$, т.е.

$$xy=dx-dy\ . \qquad (1)$$

Нека $NZD(d,y)=k$. Постојат единствени $u$ и $v$ такви што $NZD(u,v)=1$ и $d=ku$, $y=kv$. Бидејќи $NZD(x,y)=1$ и $v\,|\,y$, добиваме дека $NZD(x,v)=1$ и $NZD(x,k)=1$. Но, сега (1) го добива обликот

$$xkv=kux-kukv$$

$$v(x+ku)=ux$$

Од $NZD(v,u)=NZD(v,x)=1$ и $v\,|\,ux$, добиваме $v=1$ односно

$$x+ku=ux$$

$$ux-x-ku+k=k$$

$$x(u-1)-k(u-1)=k$$

$$(x-k)(u-1)=k.$$

Но, бидејќи $NZD(x,k)=1$, добиваме $x-k=1$ и $u-1=k$, т.е. конечно $x=k+1$, $u=k+1$, $y=k$, $d=k(k+1)$, односно

$$a=k(k+1)^2,\ b=k^2(k+1)$$

и

$$NZS(a,b)=k^2(k+1)^2=[k(k+1)]^2=d^2=[NZD(a,b)]^2,$$

што требаше да се докаже.

## РЕШЕНИЈА НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ОД СИГМА 104

**277.** За реалните броеви $a, b$ и $c$ се исполнети неравенствата $|a|\geq|b+c|$, $|b|\geq|c+a|$ и $|c|\geq|a+b|$. Докажи дека $a+b+c=0$.

**Решение.** Ако дадените равенства ги квадрираме добиваме

$$a^2\geq(b+c)^2,\qquad b^2\geq(a+c)^2,\qquad c^2\geq(a+b)^2.$$

Ако добиените неравенства ги собереме добиваме

$$a^2+b^2+c^2\geq(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2,$$

кое е еквивалентно со

$$0\geq(a+b+c)^2. \qquad (*)$$

Да забележиме дека (*) е точно ако и само ако во него е исполнето равенство. Равенство е исполнето ако и само ако $a+b+c=0$, што требаше и да се докаже.

**278.** Дали постојат попарно различни природни броеви $x, y, u, v$ такви што

$$(x+u)(y+v)=(y+u)(x+v)? \qquad (*)$$

**Решение.** Нека $x,y,u,v$ се попарно различни броеви, т.е. $x,y,u,v\in\mathbb{N}$ и $x\neq y\neq u\neq v\neq x\neq u$. Равенството (*) можеме да го запишеме во облик

$$xy+xv+uy+uv=xy+vy+xu+uv$$
$$y(u-v)-x(u-v)=0$$
$$(y-x)(y-v)=0.$$

Значи, $y-x=0$ или $u-v=0$, т.е. $x=y$ или $u=v$, што е во спротивност со претпоставката дека броевите се попарно различни. Според тоа, не постојат природни броеви за кои е исполнето равенството (*).

**279.** За реалните броеви $x$ и $y$ е исполнето равенството

$$\frac{x+y}{x+2y}+\frac{x-y}{x-2y}=4. \qquad (1)$$

Докажи дека $x^2-y^2\neq 0$ и определи ги можните вредности на изразот $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$.

**Решение.** Ако за реалните броеви $x$ и $y$ е исполнето равенството (1), тогаш $x+2y\neq 0$ и $x-2y\neq 0$. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека $x^2-y^2=0$. Тогаш $(x-y)(x+y)=0$ од каде добиваме дека $x-y=0$ или $x+y=0$. Двата случаи ќе ги разгледаме одделно.

**Случај 1.** $x-y=0$. Во овој случај равенството (1) го добива обликот $\frac{x+y}{x+2y}=4$, од каде добиваме дека $3x+7y=0$. Но, на тој начин го добиваме системот $x^2=6y^2$ од

$\begin{cases} x - y = 0 \\ 3x + 7y = 0 \end{cases}$, за кој детерминантата на системот е $\Delta = 10 \neq 0$. Хомогениот систем има едно единствено решение $x = y = 0$. Но, тогаш $x + 2y = 0 + 2 \cdot 0 = 0$ што не е можно.

**Случај 2.** $x + y = 0$. Во овој случај равенството (1) го добива обликот $\frac{x-y}{x-2y} = 4$ од каде ја добиваме равенката $3x - 7y = 0$. Но, на тој начин го добиваме системот

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 3x - 7y = 0 \end{cases},$$

за кој детерминантата на системот е $\Delta = -10 \neq 0$. Хомогениот систем има едно единствено решение $x = y = 0$. Но тогаш $x - 2y = 0 - 2 \cdot 0 = 0$, што не е можно.

Заради претходно добиените две контрадикции, добиваме дека $x - y, x + y \neq 0$, т.е. $x^2 - y^2 \neq 0$. Сега, изразот (1) можеме да го запишеме во облик

$$\frac{(x+y)(x-2y)+(x-y)(x+2y)}{(x-2y)(x+2y)} = 4$$

$$2x^2 - 4y^2 = 4x^2 - 16y^2 .$$

Конечно, $x^2 = 6y^2$ од каде што добиваме

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \frac{6x^2+x^2}{6x^2-x^2} = \frac{7}{5} .$$

**280.** Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy + y^2 = 3 \\ x^2 + 2xy - 2y^2 = 6 \end{cases},$$

во множеството реални броеви.

**Решение.** Очигледно е дека $x \neq 0$. Во спротивен случај би го добиле системот

$$\begin{cases} y^2 = 3 \\ y^2 = -3 \end{cases}$$

кој очигледно нема решение. Во тој случај оправдана е смената $y = tx$ со која системот го добива обликот

$$\begin{cases} x^2(1 - 3t + t^2) = 3 \\ x^2(1 + 2t - 2t^2) = 6 \end{cases}. \qquad (1)$$

Ако првата равенка на системот ја поделиме со втората равенка на системот, ја добиваме равенката $\frac{1-3t+t^2}{1+2t-2t^2} = \frac{1}{2}$. Се разбира, последната равенка е определена за $t \neq \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Истата го добива обликот $4t^2 - 8t + 3 = 0$, а нејзини решенија се $t_1 = \frac{1}{2}$ и $t_2 = \frac{3}{2}$. Двете решенија ќе ги разгледаме како одделни случаи.

**Случај 1.** $t_1 = \frac{1}{2}$. Од првата равенка на системот (1) добиваме $x^2 = 4$, па според тоа $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Соодветно $y_1 = 1$ и $y_2 = -1$, не е тешко да се провери дека паровите $(x_1, y_1) = (2,1)$ и $(x_2, y_2) = (-2,-1)$ се решенија на системот.

**Случај 2.** $t_2 = \frac{3}{2}$. Од првата равенка на системот (1) добиваме $x^2 = -12$, па според тоа, во овој случај системот нема решение.

Конечно, единствени решенија се $(x_1, y_1) = (2,1)$ и $(x_2, y_2) = (-2,-1)$.

**281.** Да се реши равенката

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x + \frac{1}{(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x} - 6 = 0$$

**Решение.** Воведуваме смена $y = (\sqrt{3+\sqrt{8}})^x$ и равенката го добива обликот

$$y + \frac{1}{y} - 6 = 0 \text{, т.е. } y^2 - 6y + 1 = 0 .$$

Решенија на последната квадратна равенка се $y_1 = 3+\sqrt{8}$ и $y_2 = 3-\sqrt{8}$. Не е тешко да се провери дека $y_1 = \frac{1}{y_2}$. Добиените решенија ги заменуваме во смената, при што ќе добиеме

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x = 3+\sqrt{8} \text{, т.е. } x = 2 .$$

Од друга страна,

$$(\sqrt{3+\sqrt{8}})^x = 3-\sqrt{8} = \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}} = (3+\sqrt{8})^{-1} \text{, т.е. } x = -2 .$$

Не е тешко да се провери дека $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$ се решенија на почетната равенка.

**282.** Во ромб со страна $a$ и остар агол $60^\circ$ е впишана кружница. Да се најде плоштината на четириаголникот чии темиња се допирните точки на кружницата со страните на ромбот.

**Решение.** Нека допирните точки на впишаната кружница $k$ во ромбот $ABCD$ ги означиме со $M,N,P,Q$. Јасно е дека висината на ромбот е $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, па според тоа, радиусот на впишаната кружница во ромбот е $R = \frac{h}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. Сега, според задача 1372-Рубрика задачи, добиваме дека страната на рамностраниот триаголник $AMQ$ е $x = R\sqrt{3} = \frac{3a}{4}$. Значи, должината на едната страна на четириаголникот $MNPQ$ е $x = \frac{3a}{4}$.

Од друга страна, должината на краците $DP$ и $DQ$ на рамнокракиот триаголник $PDQ$ е $\overline{DP} = \overline{DQ} = \frac{a}{4}$. Неговите агли имаат големини $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$, па не е тешко да се пресмета дека должината на неговата основа е

$$y = 2 \cdot \frac{a}{4}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} .$$

Четириаголникот $MNPQ$ е правоаголник, па според тоа неговата плоштина е

$$P = xy = \frac{3a}{4}\frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} ,$$

што требаше да се пресмета.

**283.** Докажи дека од произволни четири броја од интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$ може да се изберат два ( $x$ и $y$ ) такви што

$$8\cos x\cos y\cos(x-y) + 1 > 4(\cos^2 x + \cos^2 y) .$$

**Решение.** Неравенството $8\cos x\cos y\cos(x-y) + 1 > 4(\cos^2 y + \cos^2 x)$ можеме да го запишеме во обликот

$$8\cos x\cos y(\cos x\cos y + \sin x\sin y) - 4\cos^2 y - 4\cos \quad x + 1 > 0$$

Користејќи алгебраски трансфромации и тригонометриски идентитети левата страна на последното неравенство го добива обликот

$$2(2\cos^2 x - 1)(2\cos^2 y - 1) + 2\sin 2x\sin 2y - 1 > 0 ,$$

$$2\cos 2x\cos 2y + 2\sin 2x\sin 2y - 1 > 0$$

$$2\cos(2x-2y)>1$$
$$\cos(2x-2y)>\tfrac{1}{2}\,.$$

Сега интервалот $(0,\frac{\pi}{2})$ ќе го разделиме на три дела со еднаква должина на следниот начин $(0,\frac{\pi}{6}],(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}],(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$. Според Принципот на Дирихле, два од четирите броја припаѓаат на еден од овие интервали. Нека тие броеви се $x$ и $y$. Тогаш $|x-y|<\frac{\pi}{6}$, т.е. $|2x-2y|<2\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$, па сега од парноста на функцијата $y=\cos x$, добиваме дека
$$\cos(2x-2y)>\cos\tfrac{\pi}{3}=\tfrac{1}{2}\,,$$
што требаше да се докаже.

**284.** Параболата $y=ax^2+bx+c$ минува низ точките $A(-2,1)$ и $B(2,9)$, и нема заеднички точки со апсцисната $Ox$-оска.

Кои вредности може да ги има апсцисата на темето на параболата?

**Решение.** Од условот дека параболата минува низ точките $A(-2,1)$ и $B(2,9)$ добиваме
$$\begin{cases}4a - 2b + c = 1\\ 4a + 2b + c = 9\end{cases}.$$
Ако од втората равенка ја одземеме првата равенка на системот, добиваме $b=2$ и потоа $4a+c=5$.

Од условот на задачата, параболата нема заеднички точки со $Ox$-оската, па според тоа нема реални корени. Значи, нејзината дискриминанта е негативна, т.е.
$$D=b^2-4ac=4-4a(5-4a)<0\,.$$
Со решавање на последната неравенка добиваме $\frac{1}{4}<a<1$. Од друга страна, параболата можеме да ја запишеме во облик
$$f(x)=ax^2+b+c=ax^2+2x+5-4a=a(x^2+2\tfrac{1}{a}x+\tfrac{1}{a^2})-\tfrac{1}{a}+5-4a$$
$$=a(x+\tfrac{1}{a})^2-\tfrac{4a^2-5a+1}{a}.$$
Сега, апсцисата на темето на праболата е $x_T=-\frac{1}{a}$, па од претходно добиените неравенства за $a$ имаме $-4<x_T<-1$, што се бараните вредности.

**285.** За кои вредности на параметарот $m$ сите решенија на равенката
$$mx^4-mx^2+m+1=0\,,$$
се наоѓаат во интервалот $(-1,1)$.

**Решение.** Со смената $y=x^2$, равенката го добива обликот
$$my^2-my+m+1=0\,. \qquad (*)$$
Ако $x$ е решение на почетната равенка што се наоѓа меѓу реалните броеви $-1$ и $1$, тогаш $y$ е решение на (*) што се наоѓа меѓу реалните броеви $0$ и $1$. Равенката (*) од друга страна не може да има само едно решение меѓу $0$ и $1$. Во тој случај би било исполнето $f(0)\cdot f(1)<0$, каде $f(y)=my^2-my+m+1$, односно $(m+1)^2<0$ што не е можно.

Да забележиме дека (*) има две решенија кои се меѓу $0$ и $1$ ако се исполнети следните услови

а) $D\geq 0$, т.е. $m^2-4m(m+1)\geq 0$. Последната неравенка е исполнета за $m\in[-\frac{4}{3},\infty)$.

б) $mf(0) > 0$, т.е. $m(m+1) > 0$. Последната неравенка е исполнета за $m \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$.

в) $mf(1) > 0$, т.е. $m(m+1) > 0$. Последната неравенка е исполнета за $m \in (-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$.

г) $f'(1) f'(0) < 0$, т.е. $-m^2 < 0$. Последната неравенка е исполнета $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Сите четири услови се исполнети за $m \in [-\frac{4}{3},-1)$. За вака определените вредности на $m$ имаме $0 < y_1 < y_2 < 0$, односно

$$-1 < -\sqrt{y_2} < -\sqrt{y_1} < 0 < \sqrt{y_1} < \sqrt{y_2} < 1,$$

што требаше да се докаже.

**286.** Нека $x, y$ и $z$ се позитивни реални броеви такви што $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Докажи дека $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq \sqrt{3}$.

**Решение.** Јасно е дека $S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 0$. Сега,

$$S^2 = (\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y})^2 = (\frac{xy}{z})^2 + (\frac{yz}{x})^2 + (\frac{zx}{y})^2 + 2\frac{xy}{z}\frac{yz}{x} + 2\frac{yz}{x}\frac{zx}{y} + 2\frac{xy}{z}\frac{zx}{y}$$
$$= (\frac{xy}{z})^2 + (\frac{yz}{x})^2 + (\frac{zx}{y})^2 + 2(x^2 + y^2 + z^2).$$

Од друга страна од точноста на неравенството $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, кое е исполнето за било кои реални броеви, добиваме

$$(\frac{xy}{z})^2 + (\frac{yz}{x})^2 + (\frac{zx}{y})^2 \geq \frac{xy}{z}\frac{yz}{x} + \frac{yz}{x}\frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\frac{zx}{y} = x^2 + y^2 + z^2,$$

па според тоа

$$S^2 \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3$$
$$S \geq \sqrt{3}.$$

Равенство се достигнува ако и само ако $\frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y}$, т.е. $x^2 = y^2 = z^2$. Бидејќи $x, y$ и $z$ се позитивни, равенство важи ако и само ако $x = y = z$.

**287.** Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се реални броеви. Докажи дека

$$\sqrt[3]{a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3} \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}.$$

**Решение.** Ако $0 \leq x \leq 1$, тогаш $x^{\frac{3}{2}} \leq x$. Притоа, равенство се достигнува за $x = 0$ и $x = 1$.

Нека во конечната низа $a_1, a_2, ..., a_n$ има ненулти елемент, т.е. постои $k \in \{1, 2, ..., n\}$ така што $a_k \neq 0$. Тогаш

$$x_s = \frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^{n} a_p^2}, \ s = 1, 2, ..., n$$

се такви што $0 \leq x_s \leq 1$. Според забелешката на почетокот на решението на задачата имаме $x_s^{\frac{3}{2}} \leq x_s$, т.е.

$$(\frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^{n} a_p^2})^{\frac{3}{2}} \leq \frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^{n} a_p^2}, \ s = 1, 2, ..., n.$$

Но, тогаш

$$\sum_{s=1}^{n}\Big(\frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^{n}a_p^2}\Big)^{\frac{3}{2}} \le \sum_{s=1}^{n}\frac{a_s^2}{\sum_{p=1}^{n}a_p^2} = \frac{\sum_{s=1}^{n}a_s^2}{\sum_{p=1}^{n}a_p^2} = 1 \Leftrightarrow \sum_{s=1}^{n}\frac{a_s^3}{(\sum_{p=1}^{n}a_p^2)^{\frac{3}{2}}} \le 1 \Leftrightarrow \sum_{s=1}^{n}a_s^3 \le (\sum_{p=1}^{n}a_p^2)^{\frac{3}{2}} .$$

Сега, јасно е дека $(\sum_{p=1}^{n}a_p^3)^{\frac{1}{3}} \le (\sum_{p=1}^{n}a_p^2)^{\frac{1}{2}}$ .

Ако пак сите $a_s,\ s=1,2,...,n$ се еднакви на нула, тогаш важи знакот за равенство.

**288.** Нека $m=30030=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$ и $M$ е множеството од сите позитивни делители на $m$ кои се производ на два прости делители на $m$. Определи го најмалиот природен број $n$ со следното својство: од било кои $n$ различни броеви од $M$ може да се изберат три чиј производ е $m$.

**Решение.** Јасно е дека множеството $M$ има $\binom{6}{2}=15$ елементи, односно

$$M=\{2\cdot3,\ 2\cdot5,\ 2\cdot7,\ 2\cdot11,\ 2\cdot13,\ 3\cdot5,\ 3\cdot7,\ 3\cdot11,\ 3\cdot13,\ 5\cdot7,\ 5\cdot11,\ 5\cdot13,\ 7\cdot11,\ 7\cdot13,\ 11\cdot13\} .$$

Од друга страна, ако избереме 5 од 6-те прости делители на бројот $m$, може да направиме $\binom{5}{2}=10$ елементи од множеството $M$. Производот на било кои три од нив не може да е бројот $m$. Значи, $n\ge11$

Ќе покажеме дека $n=11$. Елементите на множеството $M$ ќе ги разделиме на пет попарно дисјунктни подмножества од $M$ при што производот на елементите од секое од тие множества одделно е бројот $m$. Една таква поделба е

$$\{2\cdot3, 5\cdot13, 7\cdot11\}$$
$$\{2\cdot5, 3\cdot7, 11\cdot13\}$$
$$\{2\cdot7, 3\cdot13, 5\cdot11\}$$
$$\{2\cdot11, 3\cdot5, 7\cdot13\}$$
$$\{2\cdot13, 3\cdot11, 5\cdot7\} .$$

Ако избереме 11 елементи од множеството $M$, според принципот на Дирихле три елементи ќе бидат од едно исто множество, од претходните делбени множества. Нивниот производ е бројот $m$.

## РЕШЕНИЈА НА ПОДГОТВИТЕЛНИТЕ ЗАДАЧИ, ОЛИМПИСКИ ТЕМИ, ОД СИГМА 104

**Тема:** Функционални равенки, полиноми, низи
**Подготвил:** Алекса Малчески

**1.** Функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ги задоволува условите:

$$|f(a)-f(b)|\le|a-b| \text{ и } f(f(f(0)))=0$$

Докажи дека $f(0)=0$.

**Решение.** Заради поедноставување на означувањето, ќе ја користиме ознаката

$$f^k(x)=\underbrace{f(f(...f}_{k-\text{пати}}(x)....)) .$$

Со вака воведената ознака, со користење на условите од задачата добиваме

$$|f(0)|=|f(0)-0|\ge|f^2(0)-f(0)|\ge|f^3(0)-f^2(0)|=|f^2(0)|$$

и

$$|f^2(0)|=|f^2(0)-0|\geq|f^3(0)-f(0)|=|f(0)|.$$

Од последните две неравенства добиваме $|f(0)|=|f^2(0)|$.

Сега имаме два случаи.

**Случај 1.** $f(0)=f^2(0)$. Тогаш $0=f(0)-f^2(0)\geq|f^2(0)-f^3(0)|=|f^2(0)|$, па според тоа $f(0)=f^2(0)=0$.

**Случај 2.** $f(0)=-f^2(0)$. Тогаш, од условите на задачата имаме

$$|f(0)|=|f(0)-0|\geq|f^2(0)-f(0)|=2|f(0)|.$$

Од последното неравенство едноставно се гледа дека $|f(0)|\leq 0$, т.е. $f(0)=0$.

Од случаите 1 и 2 добиваме дека $f(0)=0$.

**2.** Определи ги сите реални функции $f(x)$ такви што

$$\tfrac{1}{2}f(xy)+\tfrac{1}{2}f(xz)-f(x)\cdot f(yz)\geq\tfrac{1}{4},$$

за секои реални броеви $x,y,z$.

**Решение.** Ако во неравенството замениме $x=y=z=0$, со алгебарски трансформации добиваме

$$(f(0))^2-f(0)+\tfrac{1}{4}\leq 0$$

$$(f(0)-\tfrac{1}{2})^2\leq 0.$$

Од особините на реални броеви добиваме дека $f(0)-\frac{1}{2}=0$, т.е $f(0)=\frac{1}{2}$.

Сега, ако во почетната неравенка избереме $y=z=0$ го добивме неравенството

$$4f(0)-4f(x)f(0)\geq 1.$$

Со алгебарски трансформации и ако го искористиме равенството $f(0)=\frac{1}{2}$, добиваме $f(x)\leq\frac{1}{2}$.

Ако во почетното неравенство замениме $x=y=z=1$, добиваме дека

$$f(1)-f^2(1)\geq\tfrac{1}{4}$$

$$(f(1)-\tfrac{1}{2})^2\leq 0.$$

Повторно од особините на реални броеви, добиваме дека $f(1)-\frac{1}{2}=0$, т.е $f(1)=\frac{1}{2}$.

Со замена $y=z=1$ во почетната равенка, добиваме дека $f(x)-f(x)f(1)\geq\frac{1}{4}$, и ако го искористиме равенството $f(1)=\frac{1}{2}$, добиваме дека $f(x)\geq\frac{1}{2}$.

Од целата претходна дискусија јасно е дека единствена функција која го задоволува неравенството е $f(x)=\frac{1}{2}$.

**3.** Определи ги сите реални функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секои реални броеви $x$ и $y$ важи $f(xf(y)+x)=xy+f(x)$.

**Решение.** За $x=1$ имаме $f(f(y)+1)=y+f(1)$. За било кој реален број $a$ , и за реалниот број $y=a-f(1)$ имаме

$$f(f(y)+1)=y+f(1)=a-f(1)+f(1)=a,$$

па според тоа функцијата е *сурјективна*.

Специјално, постои $b\in\mathbb{R}$ таков што $f(b)=-1$.

Нека $c, d \in \mathbb{R}$ се такви што $f(c) = f(d)$. Но тогаш

$$c + f(1) = f(f(c)+1) = f(f(d)+1) = d + f(1),$$

односно $c = d$. Според тоа, $f$ е *инјективна* функција.

За $x = 1$ и $y = 0$ добиваме $f(f(0)+1) = f(1)$. Бидејќи $f$ е инјективна функција добиваме дека $f(0)+1=1$, т.е. $f(0)=0$.

За $x \neq 0$ определуваме $y = -\frac{f(x)}{x}$. Тогаш

$$f(xf(y)+x) = x(-\tfrac{f(x)}{x}) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0 = f(0),$$

па повторно од инјективноста на $f$ имаме $xf(y)+x=0$, т.е.

$$f(y) = -1$$

$$f(-\tfrac{f(x)}{x}) = f(b),$$

$$-\tfrac{f(x)}{x} = b$$

$$f(x) = -bx,$$

за сите реални броеви $x \neq 0$.

Сега, со замена во почетната равенка, добиваме дека $b^2 = 1$, т.е. $b = \pm 1$, со што ги добиваме функциите $f(x) = -x$ и $f(x) = x$.

Не е тешко да се провери дека истите ја задоволуваат почетната равенка.

**4.** Определи ги сите функци $f$, определени на множеството реални броеви, за кои се исполнети неравенствата $f(x) \leq x$ и $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, за секои реални броеви $x$ и $y$.

**Решение.** Од неравенството $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, за $x = y = 0$ добиваме

$$f(0) = f(0+0) \leq f(0) + f(0),$$

т.е. $0 \leq f(0)$. Ако пак во $f(x) \leq x$ замениме $x = 0$ добиваме $f(0) \leq 0$. Според тоа, $f(0) = 0$.

Понатаму, за секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$0 = f(x+(-x)) \leq f(x) + f(-x) \leq x + (-x) = 0$$

$$f(x) + f(-x) = 0$$

$$f(-x) = -f(x).$$

Од произволноста на реалниот број $x$ добиваме дека $f(x)$ е непарна функција.

Бидејќи за произволен $x \in \mathbb{R}$ е исполнето $f(-x) \leq -x$, т.е. $x \leq -f(-x)$, ако ја искористиме непарноста на функцијата, добиваме

$$x \leq -f(-x) = f(x) \leq x,$$

па според тоа $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

Не е тешко да се докаже дека $f(x) = x$, го задоволува даденото неравенство. Од претходната дискусија непосредна последица е единственоста.

**5.** За полиномот $P$ кој има степен $n$, се исполнети равенствата $P(k) = 2^k$ за $k = 0, 1, 2, ..., n$. Определи го $P(n+1)$.

**Решение.** За било кој природен број $r$, $0 \leq r \leq n$ полиномот

$$\binom{x}{r} = \frac{x(x-1)(x-2)...(x-r+1)}{r!}$$

е полином од $r$-ти степен. Ќе го разгледаме полиномот

$$Q(x) = \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + ... + \binom{x}{n},$$

кој според претходната забелешка е полином од $n$ -ти степен. Според Биномната формула, имаме

$$Q(k) = \binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + ... + \binom{k}{n} = (1+1)^k = 2^k,$$

за секој $k = 0,1,2,...,n$ . Според тоа, $P(x) = Q(x)$ за секој $x \in \mathbb{R}$ , од каде што добиваме

$$P(n+1) = Q(n+1) = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + ... + \binom{n+1}{n} = 2^{n+1} - 1,$$

што требаше да се определи.

**6.** Определи ги сите реални функции $f(x)$ , такви што за секој реален број $x$ е исполнето равенството

$$x^2 f(x) + f(1-x) = 2x - x^4. \qquad (1)$$

**Решение.** Ако во (1) направиме трансформација $x \to 1-x$ , тогаш равенката го добива обликот

$$(1-x)^2 f(1-x) + f[1-(1-x)] = 2(1-x) - (1-x)^4$$

$$(1-x)^2 f(1-x) + f(x) = 2(1-x) - (1-x)^4, \qquad (2)$$

за секој реален број $x$ .

Од почетната равенка имаме

$$f(1-x) = 2x - x^4 - x^2 f(x).$$

Ако замениме во (2), со помош на алгебарски трансформации добиваме

$$f(x)(x^2 - x - 1)(x^2 - x + 1) = (1-x)(1+x^3)(x^2 - x - 1).$$

Од неравенството $x^2 - x + 1 > 0$ , кое е исполнето за секој $x \in \mathbb{R}$ добиваме дека

$$f(x)(x^2 - x - 1) = (1-x^2)(x^2 - x - 1). \qquad (3)$$

Од равенството (3) непосредно добиваме дека $f(x) = 1 - x^2$ , за $x \neq \alpha, \beta$ , каде $\alpha$ и $\beta$ се решенија на равенката $x^2 - x - 1 = 0$ . Според Виетовите правила, за $\alpha$ и $\beta$ се исполнети равенствата $\alpha\beta = -1$ и $\alpha + \beta = 1$ . Заменувајќи во равенката (1) добиваме

$$\begin{cases} \alpha^2 f(\alpha) & + & f(1-\alpha) & = & 2\alpha - \alpha^4 \\ \beta^2 f(\beta) & + & f(1-\beta) & = & 2\beta - \beta^4 \end{cases},$$

т.е.

$$\begin{cases} \alpha^2 f(\alpha) & + & f(\beta) & = & 2\alpha - \alpha^4 \\ \beta^2 f(\beta) & + & f(\alpha) & = & 2\beta - \beta^4 \end{cases}.$$

Решение на овој систем е

$$f(\alpha) = k \text{ и } f(\beta) = 2\alpha - \alpha^4 - \alpha^2 k,$$

каде $k$ е произволен реален број.

Конечно, решение на (1) е

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{ako} \quad x = \alpha \\ 2\alpha - \alpha^4 - \alpha^2 k & \text{ako} \quad x = \beta \\ 1 - x^2 & \text{ako} \quad x \neq \alpha, \beta \end{cases},$$

каде $\alpha$ и $\beta$ се решенија на равенката $x^2 - x - 1 = 0$ . Од претходната дискусија јасно е дека овие функции се единствените решенија на (1).

**7.** Нека $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ е функција која ги исполнува следните услови:

- $f$ е строго растечка
- $f(x)>-\frac{1}{x}$ за секој реален број $x>0$
- $f(x)f(f(x)+\frac{1}{x})=1$ за секој реален број $x>0$.

Определи ја вредноста $f(1)$.

**Решение.** Нека е $f(1)=t$. За $x=1$, од третата особина која ја задоволува функцијата имаме $tf(t+1)=1$, па според тоа $t\neq 0$ и $f(t+1)=\frac{1}{t}$. Ако замениме $x=t+1$, добиваме

$$f(t+1)f(f(t+1)+\tfrac{1}{t+1})=1,$$

па според тоа

$$f(\tfrac{1}{t}+\tfrac{1}{t+1})=t=f(1).$$

Бидејќи $f$ е строго монотоно растечка функција, добиваме дека $\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}=1$, т.е. бараната вредност за $t$ е решение на равенката $t^2-t-1=0$. Нејзини решенија се $t_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Ако е $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>0$, тогаш би имале

$$1<t=f(1)<f(1+t)=\tfrac{1}{t}<1.$$

Заради добиената контрадикција $f(1)=t=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Да забележиме дека $f(x)=\frac{1-\sqrt{5}}{2x}$ е функција која ги задоволува условите од задачата.

**8.** Дадена е низата реални броеви $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, таква што за секои $m,n\in\mathbb{N}_0$, $m\geq n\geq 0$ е исполнето равенството

$$a_{m+n}+a_{m-n}=\tfrac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n}). \tag{1}$$

Определи го $a_{2015}$, ако $a_1=1$.

**Решение.** За $m=n$ имаме $a_{2m}+a_0=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2m})=a_{2m}$, па според тоа $a_0=0$.

Ако во (1) замениме $n=0$, добиваме $a_m+a_m=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_0)$, односно $a_{2m}=4a_m$.

Ако во (1) замениме $m=n+2$, добивме

$$a_{2n+2}+a_2=\tfrac{1}{2}(a_{2n+4}+a_{2n})=\tfrac{1}{2}(4a_{n+2}+4a_n)=2a_{n+2}+2a_n. \tag{2}$$

Но бидејќи $a_{2n+2}=a_{2(n+1)}$, имаме $a_{2n+2}=4a_{n+1}$. Бидејќи $a_2=4a_1=4$, добиваме

$$a_{2n+2}+a_2=4a_{n+1}+4a_1=4(a_{n+1}+1). \tag{3}$$

Сега, од (2) и (3) добиваме дека

$$2a_{n+2}+2a_n=4(a_{n+1}+1),$$

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2. \tag{4}$$

Притоа исполнети се равенствата $a_0=0$ и $a_1=1$. Не е тешко да се провери дека $a_2=4, a_3=9$. Тоа ни дава повод да провериме дали $a_n=n^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Тврдењето е точно за $n=0,1,2,3$. Понатаму ќе продолжиме со помош на принципот на математичка индукција. Нека тврдењето е точно за сите природни броеви помали од $n+2$, т.е. $a_n=n^2$ и $a_{n+1}=(n+1)^2$. Тогаш од (4) добиваме

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2=2(n+1)^2-n^2+2=n^2+4n+4=(n+2)^2.$$

Сега тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

Не е тешко да се провери дека низата го задоволува равенството (1). При тоа

$$a_{2015} = 2015^2 .$$

**9.** Низата $a_1, a_2, ...$ е определен со

$$a_1 = 2, a_2 = 5 \text{ и } a_{n+2} = (2-n^2)a_{n+1} + (2+n^2)a_n \text{ за секој } n \geq 1.$$

Дали постојат природни броеви $p, q$ и $r$ такви што $a_p a_q = a_r$ ?

**Решение.** Членови на дадената низа се $2, 5, 11, 8, 65, -766, ...$ редоследно. Да забележиме дека разликата меѓу било кои два соседни членови на низата е делива со 3. Ќе докажеме повеќе, т.е. доволно е да се докаже дека $a_n \equiv 2 \pmod 3$. Јасно е дека $a_1, a_2 \equiv 2 \pmod 3$ (непосредна проверка). Тврдењето ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција. Нека тврдењето е точно за секој природен број помал од $n+2$, т.е. $a_{n+1,} a_n \equiv 2 \pmod 3$. Тогаш, од особините на конгруенции, имаме

$$a_{n+2} \equiv (2-n^2) \cdot 2 + (2+n^2) \cdot 2 = 8 \equiv 2 \pmod 3 .$$

Според принципот на математичка индукција $a_n \equiv 2 \pmod 2$.

Тогаш, за произволни природни броеви $p, q, r$ имаме $a_p a_q \equiv 2 \cdot 2 \equiv 1 (\text{mod } 3)$ и $a_r \equiv 2 \pmod 3$. Според тоа, за произволни $p, q, r \in \mathbb{N}$ имаме $a_p \cdot a_q \neq a_r$.

Значи, одговорот е не постојат такви природни броеви.

**10.** Низата $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ е определена со

$$a_0 = a_1 = a_2 = 1 \text{, и } a_{n+3}a_n - a_{n+2}a_{n+1} = n! \text{ за } n \geq 0 .$$

Докажи дека $a_n \in \mathbb{Z}$ за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

**Решение.** Ќе ја разгледаме низата $(v_n)_{n=1}^{\infty}$ зададена со $v_0 = 1$, $v_1 = 1$ и $v_n = (n-1)v_{n-2}$ за секој $n \geq 2$. Од самата дефинција на $v_n$ е јасно дека сите членови на низата $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ се цели броеви. Со помош на принципот на математичка индукција ќе покажеме дека $v_n v_{n+1} = n!$ за секој $n \geq 0$.

За $n = 0$ имаме $v_0 v_1 = 1 \cdot 1 = 1 = 0!$, т.е. тврдењето е точно. Нека $v_{n-1}v_n = (n-1)!$. Бидејќи $v_{n+1} = nv_{n-1}$, добиваме

$$v_n v_{n+1} = nv_{n-1}v_n = n(n-1)! = n! .$$

Со тоа е докажано дека тврдењето е точно за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

Повторно со индукција ќе покажеме дека $a_n = v_n$. Јасно е дека за $n \in \{0,1,2,\}$ е исполнето равенството $v_n = a_n$. Нека за $n \geq 3$ е исполнето $a_{n-3} = v_{n-3}$, $a_{n-2} = v_{n-2}$, $a_{n-1} = v_{n-1}$. Тогаш

$$(n-3)! = a_n a_{n-3} - a_{n-1}a_{n-2} ,$$

па според тоа

$$\begin{aligned} a_n &= \tfrac{(n-3)! + a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n-3}} = \tfrac{(n-3)! + v_{n-1}v_{n-2}}{v_{n-3}} \\ &= \tfrac{v_{n-3}v_{n-2} + (n-2)v_{n-3}v_{n-2}}{v_{n-3}} = v_{n-2} + (n-2)v_{n-2} \\ &= (n-1)v_{n-2} = v_n \end{aligned}$$

Според принципот на математичка индукција, $a_n = v_n$ за секој $n \geq 0$, па според тоа сите членови на низата $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$ се цели броеви.

# ТЕСТОВИ

## *Наставен тест за I година*

*Тематски тест:* **Основни бројни множества**

*Изготвил* : **Мариче Лазаровска**, СОУ “Гимназија Кочо Рацин” – Велес

**Прашања на заокружување (заокружи го точниот одговор)**

1. Бројниот израз $(-4)^2 - 3\cdot\left(2-(-5)\right)$ има вредност:

   а) -7 б) 25 в) -5 г) 37 (4 б)

2. За која вредност на k се еднакви дропките $\frac{-25}{15} = \frac{-k}{3}$:

   а) -5 б) -4 в) 4 г) 5 (4 б)

3. Децималниот број 2,35 запишан како нескратлива дропка е:

   а) $\frac{235}{10}$ б) $\frac{47}{20}$ в) $\frac{235}{50}$ г) $\frac{47}{50}$ (4 б)

4. Множеството $M = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 \le x\}$ може да се запише како:

   а) $(-\infty, -2]$ б) $(-\infty, -2)$ в) $[-2, \infty)$ г) $(2, \infty)$ (4 б)

**Задачи на дополнување**

5. НЗД (216, 180) =________________________________________ (6 б)
6. До точното трдење стави Т, а до неточното $\perp$

   а) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{N}$ ___ б) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ ___ в) $I \subseteq \mathbb{R}$ ______ (6 б)

7. Стави знак за <, = или >

   а) $\frac{3}{4}$ ◯ $\frac{5}{7}$ б) 1,23(4) ◯ 1,2345 в) -3,(3) ◯ -3,3 (6 б)

8. Кој остаток при делење со 5 го даваат броевите од облик:

   а) 5k + 2, $k \in N_0$ ___________ б) 5k -2, $k \in N$ __________ (6 б)

**Задачи од отворен тип: Реши ги задачите**

9. Претстави го како нескратлива дропка децималниот број 0,2(41). (12 б)
10. Пресметај: $\dfrac{\frac{3}{4} - \frac{24}{5} : 4}{1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}} : \left(\frac{2}{3} + 1\right)$ (16 б)
11. Определи ги цифрите x и y така што бројот x1984y да е делив со 6. (16 б)
12. Дадени се множествата

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 < x \le 1\} \text{ и } B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -2 \le x \le 4\}$$

Одреди ги $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ и претстави ги на бројна права. (16 б)

*Предлог критериум за оценување*

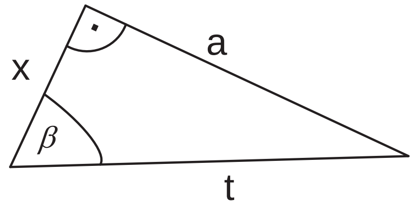
| бодови | 0-32 | 33-50 | 51-68 | 69-85 | 86-100 |
|---|---|---|---|---|---|
| оценка | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

## ***Наставен тест за II година***

*Тематски тест:* ***Тригонометриски функции од остар агол***

*Изготвил* : **Зоран Трифунов**, СОУ “Гимназија Кочо Рацин” – Велес

*Дополни според цртежот:*




1. Според цртежот: (6)

$\sin\beta =$

$tg\beta =$

$\cos\beta =$

$ctg\beta =$

*Реши ги задачите и заокружи го точниот одговор:*

2. $tg48^0 =$

а) $ctg38^0$ б) $ctg42^0$ в) $tg42^0$ г) друга вредност (6)

3. Користејќи калкулатор, пресметај $\cos 39^0 24'$

а) 0,77273 б) 0,77450 в) 0,77931 г) друга вредност (6)

4. Ако $tg\alpha = \frac{21}{20}$, тогаш $\cos\alpha$ е:

а) $\frac{21}{20}$ б) $\frac{21}{29}$ в) $\frac{20}{29}$ г) друга вредност (6)

*Реши ги задачите:*

5. Спореди ги броевите (без калкулатор): $ctg36^0$ или $tg35^0$ (10)

6. Упрости го изразот $\frac{2\sin 20^0 + tg20^0 + 3\cos 70^0}{6ctg70^0 + 10\sin 20^0 - 4tg20^0}$ (12)

7. Реши го правоаголниот триаголник, ако $a = 20$ и $\beta = 35^0$. (12)

8. Упрости го изразот $\frac{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2 - \sin^2\alpha} =$ (14)

9. Провери дали важи идентитетот $tg^2\alpha + ctg^2\alpha + 2 = \frac{1}{\cos^2\alpha \cdot \sin^2\alpha}$ (14)

10. Докажи го идентитетот $\frac{tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{ctg\alpha}{1+ctg^2\alpha}$ (14)

*Предлог критериум за оценување:*

| Бодови | 0-32 | 33-50 | 51-68 | 69-85 | 86-100 |
|---|---|---|---|---|---|
| оценка | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

## *Наставен тест за III година*

*Тематски тест:* ***Експоненцијална и логаритамска функција***

*Изготвил* : **Зоран Трифунов**, СОУ “Гимназија Кочо Рацин” – Велес

*Само еден од понудените одговори е точен, реши и заокружи го точниот одговор.*

1. Решението на равенката $3^x = 81$ е:
   а) 1 б) 4 в) 27 г) друга вредност (4)

2. $\log_5 \frac{1}{5}$ е: а) -1 б) 0 в) 1 г) 5 (4)

3. Решението на равенката $\log_x 2 = 1$ е:
   а) $\frac{1}{2}$ б) 1 в) 2 г) друга вредност (4)

4. Равенството $2^5 = 32$, запишано во вид на логаритам е:
   а) $\log_5 2 = 32$ б) $\log_{32} 2 = 5$ в) $\log_5 32 = 2$ г) $\log_2 32 = 5$
   (4)

*Допиши за да биде точно тврдењето.*

5. $\log_a xy =$ ______________________________, за $a, x, y > 0$ и $a \neq 1$. (4)

6. Дефиниционата област на функцијата $y = 4^{x-2}$ е ______________. (4)

7. $\log_a x - \log_a y =$ __________________________, за $a, x, y > 0$ и $a \neq 1$. (4)

8. Дефиниционата област на функцијата $y = \log_3(2x-10)$ е (4)

*Реши една од понудентре задачи, или под А) или под Б).*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9. Реши ја равенката. | | | |
| А) $2^{2x+1} = 8$ | (8) | Б) $11^{x^2-3x+1} = \frac{1}{11}$ | (12) |
| 10. Реши ја равенката. | | | |
| А) $\log_7(3x-5) = 2$ | (10) | Б) $\log x^5 + \frac{2}{\log x} = 7$ | (14) |
| 11. | | | |
| А) Најди ја дефиниционата област на функцијата $y = \log_2 x$. Која е нула на функцијата $y = \log_2 x$. | (8) | Б) Нацртај го графикот на функцијата $y = \log_2 x$ | (14) |
| 12. | | | |
| А) Преаметај ја вредноста на изразот $2 \cdot \log_2 8 + 5 \cdot \log_3 9$ | (10) | Б) Логаритмирај го изразот $x$ и претстави го како збир и разлика на логаритми: $x = \frac{2a^3c}{\sqrt[3]{b}}$ | (14) |

| 13. Реши ја равенката. | | | |
|---|---|---|---|
| А) $3^x + 3^{x+2} = 90$ | (10) | Б) $27^{2\sqrt{x}} - 4\cdot 3^{3\sqrt{x}} + 3 = 0$ | (14) |

*Предлог критериум за оценување:*

| Бодови | 0-32 | 33-50 | 51-68 | 69-85 | 86-100 |
|---|---|---|---|---|---|
| оценка | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

## ***<u>Наставен тест за IV година</u>***

*Тематски тест:* **Низи и прогресии**

*Изготвил* : **Мариче Лазаровска**, СОУ "Гимназија Кочо Рацин" – Велес

**Заокружи го точниот одговор:**

1. Со формулата $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ е зададена низата:

а) $-\frac{1}{1}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$ б) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4},$ в) $1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{-1}{4}, \ldots$ г) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

(3 б)

2. Која од следните низи монотоно расте?

а) $\frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, \ldots$ б) $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \ldots$ в) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$ г) $\frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \ldots$ (3 б)

3. Која од следниве низи претставува геометриска прогресија:

а) $-3, -1, 1, 3, \ldots$ б) $\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, \ldots$ в) $-10, -5, \frac{-5}{2}, \frac{-5}{4}, \ldots$ г) $3, 6, 8, 14, \ldots$ (3 б)

4. Ако 2, x, 72 се три последователни членови на една аритметичка прогресија тогаш вредноста на x е:

а) 35 б) 37 в) 8 г) 12 (3 б)

Задачи на дополнување:

5. Одреди ја разликата d на аритметичка прогресија, ако $a_1 = 7$ и $a_6 = -8$.

d = ________________________________________ (5 б)

6. Дадена е прогресијата $3, 6, 12, \ldots$ Одреди го:

а) Деветтиот член на прогресијата ________________.

б) Збирот на првите 9 члена на прогресијата ________________. (9 б)

7. Пресметај го збирот на геометрискиот ред $5 - \frac{5}{3} + \frac{5}{9} - \frac{5}{27} + \ldots$ (9б)

Реши ги задачите:

8. Пресметај ги границите: а) $\lim_{n\to\infty} \frac{3+n-n^2}{2+3n+5n^2}$ (8б) б) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$ (15б)

9. Претстави го бројот 1,414141.... во вид на дропка. (14б)

10. Збирот од првите три члена на една геометриска прогресија од осум члена е 49, а збирот од последните три члена е 1568. Како гласи прогресијата? (18б)

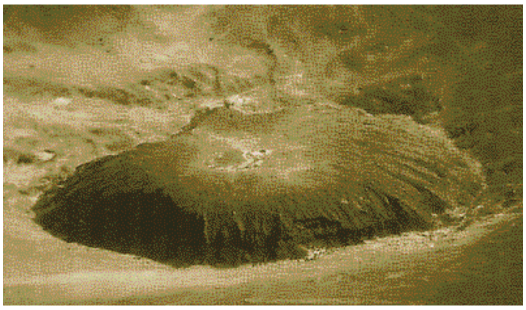
11. Докажи дека низата $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ е монотона и ограничена. Дали низата $a_n$ е конвергентна? (18б)

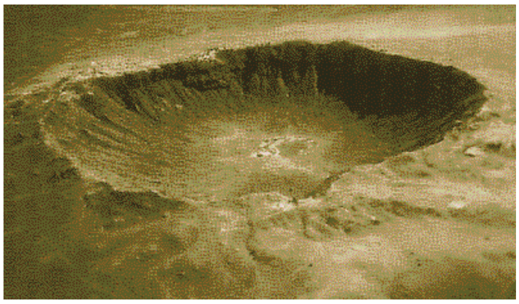
*Предлог критериум за оценување:*

| бодови | 0-32 | 33-50 | 51-68 | 69-85 | 86-100 |
|---|---|---|---|---|---|
| оценка | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

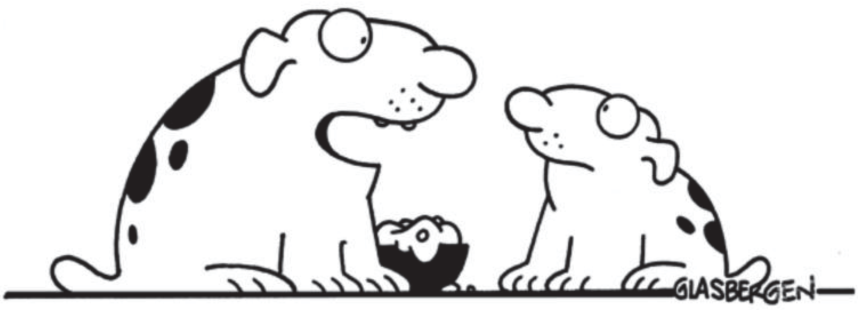

Што се можете да забележите на горната слика?

Сликите од десната страна се добиени со вртење за $180°$ на сликите од левата страна.





## математика
## за кучиња




„Ако јас имам 3 коски и
господинот Стојановски ми земе 2,
колку прсти ќе му останат?“

# РУБРИКА ЗАДАЧИ

**1381.** Темињата на даден квадрат се центри на кружници со радиуси колку што е половина од дијагоналата на квадратот. Докажи дека пресечните точки на кружниците со страните на квадратот се темиња на правилен осумаголник.

**1382.** Да се определат сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ така што

$$\overline{cda}-\overline{abc}=297 \text{ и } a+b+c=23.$$

**1383.** Една мравка се движи по линиите на квадратна шема од теме до теме на следниот начин: поаѓа од едно теме на квадратната шема и во секое теме на квадратната шема го менува правецот на движење за $90^\circ$. По посета на одреден број темиња од квадратната шема, мравката се вратила во темето од кое го почнала движењето.

Докажи дека бројот на темиња кои мравката ги посетила е делив со $4$.

**1384.** Докажи дека за секој природен број $n$ бројот $5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$ е делив со 23.

**1385.** Даден е паралелограм $ABCD$. Над страните $AB, BC, CD, DA$ се конструирани квадрати кои лежат во надворешноста на паралелограмот. Центарот на паралелограмот, средината на било која негова страна и центарот на квадратот конструиран над таа страна се темиња на триаголник.

а) Докажи дека четирите такви триаголници се складни,

б) Докажи дека четириаголникот чии темиња се центрите на конструираните квадрати се темиња на квадрат.

**1386.** Нека $a,b,c$ се позитивни реални броеви такви што $\frac{5}{a}=b+c$,

$\frac{10}{b}=c+a$ и $\frac{13}{c}=a+b$.

Определи го производот $abc$, а потоа и вредностите на $a,b$ и $c$.

**1387.** Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x - y = 2015 \\ [x]+[y]=2017 \end{cases},$$

(со $[\,\cdot\,]$ е означена функцијата $[\,\cdot\,]:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ цел дел).

**1388.** Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2(y-1)+y^2(x-1)=1.$$

**1389.** Во множеството реални броеви реши ја равенката $x^2+(\frac{x}{x-1})^2=8$.

**1390.** Докажи дека производот на корените на равенката

$$x^{\log_{2016}x}\sqrt{2016}=x^{2016},$$

е природен број. Која е цифрата на единиците на тој број?

**1391.** Определи ги сите решенија на системот равенки

$$\begin{cases} x^{\log y} + \sqrt{y^{\log x}} = 110 \\ xy = 1000 \end{cases}.$$

**1392.** Нека $a, b \in (0,1)$. Докажи дека $\log_a \frac{2ab}{a+b} \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 1$.

**1393.** Во триаголникот $ABC$ должината на висината $CH$ ($H \in AB$) е еднаква на половина од должината на страната $AB$, а аголот $\measuredangle BAC = 75^\circ$. Определи ја големината на аголот $\measuredangle ABC$.

**1394.** Докажи дека за низата определена со $x_1 = 19$, $x_2 = 27$, $x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}$, постои природен број $k$, таков што $x_k = 0$. Определи ја вредноста на $k$.

**1395.** Определи ја најголемата вредност на изразот

$$A = \sqrt{x+3} + \sqrt{y+3} + \sqrt{z+3},$$

ако $x, y, z$ се реални броеви такви што $x + y + z = \frac{1989}{3}$.

## КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ СИГМА 105

**I година**

**289.** Во триаголник $ABC$ со должини на страни $a, b, c$ впишани се три квадрати со должини на страни $x, y, z$, така што по две темиња на тие квадрати лежат на страните $AB, BC, CA$ соодветно. Ако $x = y = z$, тогаш $a = b = c$. Докажи!

**290.** За целите броеви $a, b$ и $c$ е исполнето равенството

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} = \frac{2c}{b+c}.$$

Докажи дека производот $bc$ е полн квадрат.

**291.** Нека $a, b, c$ се позитивни реални броеви поголеми од $1$. Докажи дека

$$abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a + b + c + \frac{1}{abc}.$$

**II година**

**292.** Даден е паралелограм $MNPQ$. На неговите страни $MN, NP, PQ, QM$ се избрани точки $A, B, C, D$ соодветно, така што плоштината на четириаголникот $ABCD$ е половина од плоштината на паралелограмот $MNPQ$. Докажи дека барем една дијагонала на четириаголникот $ABCD$ е паралелна со две страни на паралелограмот $MNPQ$

**293.** Разликата на нулите на квадратниот трином $x^2 + px + q$ е $a$. Определи го квадратниот трином за кој што $p + q$ има најмала вредност.

**294.** Правоаголникот $ABCD$ е поделен на 9 помали правоаголници, така што плоштините на четири од нив се $8, 10, 5, 12$ како што е прикажано на цртежот.

Определи ја најмалата можна вредност на плоштината на правоаголникот $ABCD$.

**III година**

**295.** Ако е исполнето равенството

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\varphi)}{b} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x+3\varphi)}{d},$$

докажи дека $\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}$.

**296.** Определи го триаголникот со најголема плоштина, ако должините на неговите страни $a, b, c$ го задоволуваат условот

$$1 < a \le 2 \le b \le 5 < c \le 6.$$

**297.** Даден е квадрат $ABCD$. Точката $P$ припаѓа на правата $AD$ при што $BP$ ја сече $CD$ во точката $T$. Ако збирот на плоштините на триаголниците $PDT$ и $BCT$ е минимален, докажи дека $\overline{AP} = \overline{BD}$.

**IV година**

**298.** Дадени се две хиперболи $H_1$ и $H_2$ со $y = \frac{1}{x}$ и $y = -\frac{1}{x}$ соодветно. Една права ја сече $H_1$ во точките $A$ и $B$, а хиперболата $H_2$ во точките $C$ и $D$. Нека $O$ е координатниот почеток.

Докажи дека триаголниците $OAC$ и $OBD$ имаат еднакви плоштини.

**299.** Производот на осум последователни природни броеви не може да биде четврти степен на природен број. Докажи!

**300.** а) Множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ е разбиено (разделено) на две дисјунктни подмножества $A$ и $B$. Докажи дека барем во едно од нив постојат три различни броја $x, y$ и $z$ такви што $x + y = z$.

б) Дали е точно тврдењето од задачата а) за множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

## ПОДГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ - ОЛИМПИСКИ ТЕМИ

**Тема:** Комбинаторика, множества, броеви
**Подготвил:** Алекса Малчески

**1.** Нека $n$ е природен број. Множеството $\{1, 2, 3, \ldots, 3n\}$ е поделено на три (по-парно дисјунктни) $n$- елементни множества $A, B, C$. Дали е можно секогаш да се изберат три броеви $x, y, z$, по еден од секое множество, такви што $x + y = z$.

**2.** Дали постои природен број $n > 1$ со следното својство: множеството природни броеви $\mathbb{N}$ може да се раздели на $n$ непразни подмножества така да збирот на било кои $n-1$ броеви од $n-1$ различни подмножества секогаш припаѓа на преостанатото делбено множество.

**3.** Од $n$-елементно подмножество $S$ се избрани $(n+1)$-но триелементни подмножества. Докажи дека меѓу избраните триелементни подмножества постојат две чиј пресек е едноелементно множество.

**4.** За множеството $S=\{1,2,3,....,n\}$ се направени две разбивања. Првиот пат е разбиено на $m$ непразни подмножества, а вториот пат е разбиено на $m+k$ ($k>1$) непразни подмножества. Докажи дека барем $k+1$ елемент од множеството $S$ при првото разбивање се наоѓа во побројно подмножество одколку при второто разбивање.

**5.** Дадени се природните броеви $a$ и $b$. Конечните подмножества $A,B\subset\mathbb{Z}$ се дисјунктни и го имаат својството: за секој $x\in A\cup B$ е исполнето $x+a\in A$ или $x-b\in B$. Докажи дека $a|A|=b|B|$ (со $|X|$ е означен бројот на елементи на множеството $X$).

**6.** Дадени се $12$ кутии, наредени во низа една до друга, и доволен број на црвени, сини и бели топчиња. Сакаме да ставиме по едно топче во секоја кутија, при што, за секое топче барем едно од соседните топчиња е со иста боја. На колку начини можеме ова да го направиме?

**7.** На тениски турнир учествуваат $14$ тенисери и секој со секој одиграл точно по еден меч. Тројката тенисери $(a,b,c)$ ја нарекуваме *триаголник* ако $a$ го победил $b$, $b$ го победил $c$ и $c$ го победил $a$. Кој е најголемиот можен број на триаголници на овој турнир?

**8.** Да ги разгледаме сите подмножества од множеството $\{1,2,3,...,n\}$ кои не содржат два последователни броја и за секое од нив да го пресметаме производот на неговите елементи. Збирот на квадратите на овие производи е еднаков на $(n+1)!-1$. Докажи!

**9.** Дадено е $8$-елементно подмножество $A$ од множеството $\{1,2,3,....,17\}$. Докажи дека постои $k>0$ такво што равенката $x-y=k$ има барем три решенија во $A$.

**10.** Докажи дека сите природни броеви може да се распоредат во $100$ непразни подмножества такви што не постојат три броеви $a,b,c$ од три различни подмножества за кои е исполнето $a+99b=c$.

### НАГРАДНА ЗАДАЧА НА БРОЈОТ, СИГМА 105

Да се најдат сите реални броеви $x\geq -1$ такви што неравенството

$$\frac{a_1+x}{2}\cdot\frac{a_2+x}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n+x}{2}\leq\frac{a_1a_2...a_n+x}{2}$$

е исполнето за секои $a_1,a_1,....,a_1\geq 1,$ каде $n\geq 2$.

### ЗАДАЧА НА БРОЈОТ, СИГМА 105

Определи ја вредноста на изразот

$$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2....}}}}-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+....}}}}$$

# С О Д Р Ж И Н А

UNION OF MATHEMATICIANS OF MACEDONIA

ISSN 1409-6803
UDC 51 (497.17)