

Втор тест

10.05.2017 година

1. Докажи, дека за секој реален број $M > 2$ постои строго растечка низа природни броеви $a_1, a_2, \dots$ за која се исполнети условите:

а) $a_i > M^i$ за секој $i \in \mathbb{N}$,

б) целиот број n е различен од нула ако и само ако постои природен број m и $b_1, b_2, \dots, b_m \in \{-1, 1\}$ такви што

$$n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_m b_m.$$

2. Докажи, дека за секои природни броеви m и n постојат бесконечно многу заемно прости природни броеви a и b такви што $a + b$ е делител на $am^a + bn^b$.

3. Докажи, дека

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

за секои позитивни реални броеви a, b, c .