

Осми тест

22.05.2017 година

1. Природните броеви $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ се такви што $a_j - a_i$ е делител на a_j за $i < j$. Докажи, дека $ia_j < ja_i$.
2. Точката P лежи на опишаната кружница околу квадратот $ABCD$. Нека P_1, P_2, P_3 и P_4 се симетричните точки на P во однос на правите AB, BC, CD и DA , соодветно. Докажи дека симетричните точки на P во однос на правите P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4 и P_4P_1 лежат на една права која минува низ центарот на квадратот $ABCD$.
3. Растојание меѓу две единечни полиња на бесконечна шаховска табла го нарекуваме минималниот број чекори потребни кралот да стигне од едното до другото поле. На таблата се означени три полиња, такви што растојанието меѓу секои две од нив е еднакво на 100. Определи го бројот на полињата кои од обележените полиња се наоѓаат на растојание еднакво на 50.
4. Овошна 50×50 градина е поделена на 1×1 области. Во некои 1×1 области се засадени јаболкови, портокалови и праскини дрва. Познато е дека секое портокалово дрво е соседно со барем едно јаболково дрво, секое праскино дрво е соседно со барем едно јаболково дрво и едно портокалово дрво и секое празно место е соседно со барем едно јаболково дрво, едно портокалово и едно праскино дрво. Докажи, дека бројот на празните области е помал или еднаков на 1000.
5. Секое од 1000 цудиња има капа, која е сина однадвор и црвена однатре или обратно. Цуцето кое носи црвена (однадвор) капа може само да лаже, а цуцето со сина (однадвор) капа може само да ја говори вистината. Во текот на еден ден секое цуце на секое друго цуце му кажало: "Ти си со црвена капа!", после што некои цудиња ја превртеле капата наопаку во текот на тој ден. Определи го минималниот број превртувања на капите.