

Втор тест

21.12.2016 година

1. За $\triangle ABC$ со ортоцентар H важат равенствата

$$\overline{AH}^2 + \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2 = 7 \text{ и } \overline{AH} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{CH} = 3.$$

а) Определи го радиусот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

б) Определи ги страните на $\triangle ABC$ со максимална плоштина.

2. Даден е цел број $n \geq 3$. Нека ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 се границите на три конвексни n -аголници во рамнината такви да пресекот на секои две од нив е конечно множество точки. Определи го најголемиот можен број точки на $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3$.

3. Дали постои низа позитивни броеви $a_1, a_2, \dots$ кои ги задоволуваат условите

1) $\sum_{i=1}^n a_i \leq n^2$, за секој $n \in \mathbb{N}$ и

2) $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq 2008$, за секој $n \in \mathbb{N}$.

4. Нека c е природен број. Низата $a_1, a_2, \dots$ е дефинирана со $a_1 = c, a_{n+1} = a_n^2 + a_n + c^3$, за секој природен број n . Определи ги сите вредности на c за кои постојат природни броеви $k \geq 1$ и $m \geq 2$ такви што бројот $a_k^2 + c^3$ е еднаков на m -тиот степен на некој природен број.