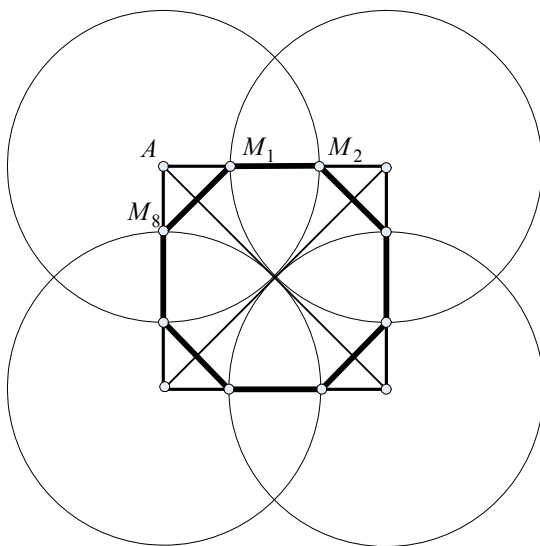


РУБРИКА ЗАДАЧИ_Сигма 105_решенија_за_Сигма_106

1381. Темињата на даден квадрат се центри на кружници со радиуси еднакви на половина од дијагоналата на квадратот. Докажи дека пресечните точки на кружниците со страните на квадратот се темиња на правилен осумаголник.



Решение. Пресечните точки на кружниците со страните на квадратот ќе ги означиме со $M_1, M_2, M_3, \dots, M_8$ (види цртеж). За да докажеме дека осумаголниот е правилен, доволно е да докажеме дека неговите страни се еднакви меѓу себе, и аголот меѓу две негови соседни страни е 135° .

Ако a е должина на страната на квадратот, тогаш $a\sqrt{2}$ е должината на неговата дијагонала, а $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ е должината на радиусот на кружниците. Но, тогаш

$$\overline{AM_1} = \overline{M_2B} = \overline{BM_3} = a - \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

па според тоа

$$\overline{M_1M_2} = a - 2\left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right) = a\sqrt{2} - a = a(\sqrt{2} - 1).$$

Од друга страна, триаголникот M_2BM_3 е рамнокрак правоаголен, па M_2M_3 е дијагонала на квадрат со страна $a - \frac{a\sqrt{2}}{2}$, т.е.

$$\overline{M_2M_3} = \left(a - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} = a(\sqrt{2} - 1).$$

Од причини на симетрија, имаме $\overline{M_1M_2} = \overline{M_3M_4} = \overline{M_5M_6} = \overline{M_7M_8}$ и $\overline{M_2M_3} = \overline{M_4M_5} = \overline{M_6M_7} = \overline{M_8M_1}$, односно страните на осумаголниот се еднакви меѓу себе.

Бидејќи $\angle BM_2M_3 = \angle BM_3M_2 = 45^\circ$, добиваме

$$\angle M_1M_2M_3 = \angle M_2M_3M_4 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

Понатаму, $\triangle M_2M_3B \cong \triangle M_4M_5C \cong \triangle M_6M_7D \cong \triangle M_8M_1A$, па затоа

$$\angle M_{i-1}M_iM_{i+1} = 135^\circ,$$

за $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, при што $M_0 = M_8$ и $M_9 = M_1$. Конечно, многуаголникот $M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8$ е правилен осумаголник.

1382. Да се определат сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297 \text{ и } a + b + c = 23.$$

Решение. Равенката $\overline{cda} - \overline{abc} = 297$ можеме да ја запишеме во облик

$$99(c-a)+10(d-b)=3\cdot 99.$$

Сега, според теоремите за деливост во множеството природни броеви $99|10(d-b)$. Бидејќи $d-b$ или $b-d$ се цифри, тоа е можно ако и само ако $10(d-b)=0$, т.е. $d=b$. Но тогаш $99(c-a)=3\cdot 99$, од каде добиваме $c-a=3$, т.е. $c=a+3$. Ако пак сега замениме во $a+b+c=23$ добиваме

$$a+b+a+3=23$$

$$b+2a=20$$

$$b=2(10-a).$$

Бидејќи b е цифра, $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$, па според тоа $10-a \leq 4$, т.е. $a \geq 6$. Бидејќи и c е цифра од равенството $c=a+3$, добиваме дека $c=6$. Сега е јасно дека $c=9$ и $b=8$.

Значи, единствен број кој го задоволува условот од задачата е бројот 6898.

1383. Една мравка се движи по линиите на квадратна шема од чвор (теме) до чвор (теме) на следниот начин: поаѓа од едно теме на квадратната шема и во секое теме на квадратната решетка го менува правецот на движење за 90° . По посета на одреден број на темиња од квадратната шема, мравката се вратила во темето од кој го почнала движењето.

Докажи дека бројот на темиња кои мравката ги посетила е делив со 4.

Решение. Движењата на мравката можеме да ги разделиме на четири вида: движење нагоре, движење надолу, движење во лево и движење во десно. Движењата нагоре и надолу ќе ги нарекуваме вертикални, а движењата налево и надесно ќе ги нарекуваме хоризонтални.

Нека мравката тргнала од некое теме и после посета на одреден број на темиња таа се вратила во почетното теме.

Бројот на темиња y кои ги посетила мравката движејќи се налево е еднаков на бројот на темиња кои посетила движејќи се на десно. Според тоа, таа движејќи се хоризонтално посетила $2y$ темиња. Бројот на темиња x кои мравката ги посетила движејќи се нагоре е еднаков на бројот на темиња кои мравката ги посетила движејќи се надолу. По посетата на теме движејќи се хоризонтално, таа продолжува да се движи вертикално и посетува теме кое се наоѓа вертикално. Според тоа $2x=2y$, т.е. $x=y$. Значи, бројот на темиња кои таа ќе ги посети е $2x+2y=2x+2x=2y+2y=4x=4y$, т.е. е делив со 4, што требаше да се докаже.

1384. Докажи дека за секој природен број n бројот $5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}$ е делив со 23.

Решение. За $n=1$ добиваме $5^{2n+1}+2^{n+4}+2^{n+1}=5^3+2^5+2^2=161=7\cdot 23$, т.е. тврдењето од задачата е исполнето.

Нека $n=k$ е природен број за кој што е исполнето тврдењето на задачата, т.е.

$$5^{2k+1}+2^{k+4}+2^{k+1}=23M, \text{ за некој } M \in \mathbb{N}. \text{ За } n=k+1 \text{ добиваме}$$

$$\begin{aligned} 5^{2(k+1)+1}+2^{(k+1)+4}+2^{(k+1)+1} &= 25 \cdot 5^{2k+1}+2 \cdot 2^{k+4}+2 \cdot 2^{k+1} \\ &= 23 \cdot 5^{2k+1}+2(5^{2k+1}+2^{k+4}+2^{k+1}) \\ &= 23(5^{2k+1}+2M), \end{aligned}$$

па затоа $23 \mid 5^{2(k+1)+1} + 2^{(k+1)+4} + 2^{(k+1)+1}$.

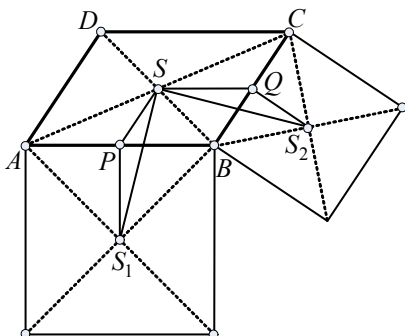
Конечно, од принципот за математичка индукција, следува дека

$$23 \mid 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}, \text{ за секој природен број } n \in \mathbb{N}.$$

1385. Даден е паралелограм $ABCD$. Над страните AB, BC, CD, DA се конструирани квадрати кои лежат во надворешноста на паралелограмот. Центарот на паралелограмот, средината на било која негова страна и центарот на квадратот конструиран на таа страна се темиња на триаголник.

а) Докажи дека четирите такви триаголници се складни,

б) Докажи дека четириаголникот чији темиња се центрите на конструираниите квадрати се темиња на квадрат.



Решение. Нека S е центарот на паралелограмот $ABCD$ (пресекот на дијагоналите), а P и Q се средини на неговите страни AB и BC , соодветно. Нека S_1 и S_2 се центри на квадратите конструирани над страните AB и BC , соодветно. Од условот на задачата следува

$$\overline{SQ} = \overline{PB} = \overline{PS_1}, \quad \overline{SP} = \overline{QB} = \overline{QS_2}$$

и

$$\begin{aligned} \angle SPS_1 &= \angle SPB + \angle BPS_1 \\ &= \angle SQB + \angle BQS_2 = \angle SQS_2. \end{aligned}$$

Според тоа, $\triangle SPS_1 \cong \triangle SQS_2$. Потполно аналогно се докажува дека било кои два триаголници кои се добиени со помош на две страни на паралелограмот кои имаат заедничко теме се складни.

б) Бидејќи триаголниците $\triangle SPS_1$ и $\triangle SQS_2$ се складни, добиваме дека $\overline{SS_1} = \overline{SS_2}$. Од друга страна

$$\begin{aligned} \angle S_1SS_2 &= \angle PSQ - \angle PSS_1 - \angle QSS_1 = \angle PSQ - \angle PSS_1 - \angle PS_1S \\ &= \angle PSQ - (\pi - \angle SPS_1) = \angle ADC - (\pi - (\frac{\pi}{2} + \angle SPB)) \\ &= \angle ADC - (\frac{\pi}{2} - \angle DAB) = \angle ADC + \angle DAB - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Значи $SS_1 \perp SS_2$.

Потполно аналогно се докажува дека $\overline{SS_3} = \overline{SS_4} = \overline{SS_1}$ и $SS_2 \perp SS_3$. Значи, S_1S_3 и S_2S_4 се дијагонали на четириаголникот кои се преполовуваат и се заемно нормални. Според тоа $S_1S_2S_3S_4$ е квадрат.

1386. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што

$$\frac{5}{a} = b + c, \quad \frac{10}{b} = c + a \quad \text{и} \quad \frac{13}{c} = a + b.$$

Определи го производот abc , а потоа и вредностите на a, b и c .

Решение. Дадените равенки можеме да ги запишеме во облик

$$\begin{cases} ab + ac = 5 \\ ab + bc = 10 \\ ac + cb = 13 \end{cases}$$

Сега, ако трите равенки ги собереме добиваме $2(ab + bc + ca) = 28$, односно $ab + bc + ca = 14$. Ако од последната равенка ја одземеме од првите две равенки на систем, добиваме $bc = 9, ac = 4, ab = 1$, од каде добиваме дека $(abc)^2 = 36$, т.е. $abc = 6$. Сега лесно се гледа дека $a = \frac{6}{9}, b = \frac{6}{4}, c = 6$.

1387. Да се реши системот равенки

$$\begin{cases} x - y = 2015 \\ [x] + [y] = 2017 \end{cases}$$

(со $[\cdot]$ е означена функцијата $[\cdot]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ цел дел).

Решение. За било кој реален број x е исполнето равенството $x = [x] + \{x\}$ (со $[x]$ е означен целиот дел од x а со $\{x\}$ е означен децималниот дел од x). Сега системот го добива обликот

$$\begin{cases} [x] + \{x\} - [y] - \{y\} = 2015 \\ [x] + [y] = 2017 \end{cases}$$

Од првата равенка на системот имаме $\{x\} - \{y\} = 2015 - [x] + [y] \in \mathbb{Z}$. Но, од друга страна $0 \leq \{x\}, \{y\} < 1$, т.е. $0 \leq \{x\} < 1$, $-1 < -\{y\} \leq 0$, па затоа $-1 < \{x\} - \{y\} < 1$. Според тоа $\{x\} - \{y\} = 0$, т.е. $\{x\} = \{y\}$. Сега системот го добива обликот

$$\begin{cases} [x] - [y] = 2015 \\ [x] + [y] = 2017 \end{cases}$$

а неговите решенија ги бараме во $\mathbb{Z}$. Не е тешко да се види дека негово решение е $[x] = 2016, [y] = 1$. Сега за решение на почетниот систем имаме

$$x = 2016 + \omega, \quad y = 1 + \omega, \quad \omega \in [0, 1),$$

односно системот има бесконечно многу решенија.

1388. Во множеството цели броеви да се реши равенката

$$x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1. \quad (1)$$

Решение. Ако воведеме смени $x = u + 1$ и $y = v + 1$ добиваме

$$(u+1)^2 v + (v+1)^2 u = 1.$$

Со средување на последната равенка добиваме

$$\begin{aligned} u^2 v + 2uv + v + v^2 u + 2uv + u &= 1 \\ uv(u+v) + 4uv + u + v &= 1 \\ uv(u+v+4) + (u+v+4) &= 5 \\ (u+v+u)(uv+1) &= 5. \end{aligned} \quad (2)$$

Бидејќи u, v се цели броеви, а 5 е прост број, ги имаме следните моноти

$$\begin{cases} u + v + 4 = 5 \\ uv + 1 = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} u + v + 4 = -5 \\ uv + 1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + v + 4 = -1 \\ uv + 1 = -5 \end{cases}, \quad \begin{cases} u + v + 4 = 1 \\ uv + 1 = 5 \end{cases}.$$

Според тоа,

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ uv = 0 \end{cases}, \begin{cases} u + v = -9 \\ uv = -2 \end{cases}, \begin{cases} u + v = -5 \\ uv = -6 \end{cases}, \begin{cases} u + v = -3 \\ uv = 4 \end{cases}.$$

Сега е јасно дека u и v се целобројни решенија на некоја од квадратните равенки:

$$t^2 - t = 0, \quad t^2 + 9t - 2 = 0, \quad t^2 + 5t - 6 = 0, \quad t^2 + 3t + 4 = 0.$$

Втората и четвртата равенка немаат целобројни решенија, додека првата има решенија $t_1 = 0, t_2 = 1$, а третата $t_3 = -6, t_4 = 1$.

Според тоа, за u и v постојат четири подредени пара кои се решенија на (2) и тоа $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(-6, 1)$ и $(1, -6)$, а за (x, y) решенија се подредените парови $(1, 2), (-5, 2), (2, 1), (2, -5)$.

1389. Во множеството реални броеви да се реши равенката $x^2 + (\frac{x}{x-1})^2 = 8$.

Решение. Ако равенката ја прошириме со додавање на $2x \cdot \frac{x}{x-1}$, иста последователно е еквивалентна со равенките

$$x^2 + 2x \frac{x}{x-1} + (\frac{x}{x-1})^2 - 2 \frac{x^2}{x-1} - 8 = 0$$

$$(x + \frac{x}{x-1})^2 - 2 \frac{x^2}{x-1} - 8 = 0$$

$$(\frac{x^2}{x-1})^2 - 2 \frac{x^2}{x-1} - 8 = 0.$$

Сега е јасно дека можеме да воведеме смена $\frac{x^2}{x-1} = t$, ја добиваме равенката $t^2 - 2t - 8 = 0$. Решенија на последната равенка се $t_1 = 4$ и $t_2 = -2$, па според тоа ги добиваме равенките $x^2 - 4x + 4 = 0$, $x^2 + 2x - 2 = 0$. Првата равенка има двоен корен $x_{1/2} = 2$, а решенија на втората се $x_{3/4} = -1 \pm \sqrt{3}$.

Значи решенија на почетната равенка се $2, -1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}$.

1390. Докажи дека производот на корените на равенката

$$x^{\log_{2016} x} \sqrt{2016} = x^{2016},$$

е природен број. Која е последната цифра на тој број?

Решение. Ако дадената равенка ја логаритмираме со логаритам со основа 2016, последователно добиваме

$$\log_{2016}[x^{\log_{2016} x} \sqrt{2016}] = \log_{2016} x^{2016}$$

$$(\log_{2016} x)^2 + \frac{1}{2} = 2016(\log_{2016} x).$$

Ако воведеме смена $t = \log_{2016} x$, ја добиваме равенката $t^2 - 2016t + \frac{1}{2} = 0$.

Според Виетовите правила, за збирот на корените t_1 и t_2 на последната равенка е исполнето $t_1 + t_2 = 2016$. Во тој случај решенија на почетната равенка се $x_1 = 2016^{t_1}$ и $x_2 = 2016^{t_2}$, а за нивниот производ добиваме

$$x_1 x_2 = 2016^{t_1} 2016^{t_2} = 2016^{t_1+t_2} = 2016^{2016},$$

кој секако е природен број.

Јасно, последната цифра на бројот 2016^{2016} е 6.

1391. Определи ги сите решенија на системот равенки

$$\begin{cases} x^{\lg y} + \sqrt{y^{\lg x}} = 110 \\ xy = 1000 \end{cases}.$$

Решение. Воведуваме ознаки $A = x^{\lg y}$ и $B = y^{\lg x}$. Ако последните две равенства ги логаритмираме и ги искористиме својствата на функцијата $\lg$, добиваме

$$\lg A = \lg x^{\lg y} = \lg y \cdot \lg x$$

$$\lg B = \lg y^{\lg x} = \lg x \cdot \lg y,$$

т.е. $\lg A = \lg B$. Бидејќи функцијата $\lg$ е монотono растечка, следува дека $A = B$.

Сега, ако во првата равенка на системот воведеме смена $t = \sqrt{y^{\lg x}}$, добиваме дека $t^2 = y^{\lg x}$, и заради претходно добиеното равенство имаме $t^2 = x^{\lg y}$.

Првата равенка од системот го добива обликот $t^2 + t - 110 = 0$. Нејзини решенија се $t_1 = -11$ и $t_2 = 10$. Бидејќи $t > 0$, добиваме дека единствено решение е $t_2 = 10$. Тогаш $x^{\lg y} = 100$, и ако логаритмираме добиваме $\lg x \cdot \lg y = 2$.

Ако пак втората равенка од системот ја логаритмираме, добиваме $\lg x + \lg y = 3$, односно го добиваме системот

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = 3 \\ \lg x \cdot \lg y = 2 \end{cases}$$

Според тоа, $u = \lg x$ и $v = \lg y$ се решенија на квадратната равенка $w^2 - 3w + 2 = 0$ а нејзини решенија се $w_1 = 1$ и $w_2 = 2$. Значи,

$$\begin{cases} \lg x = 1 \\ \lg y = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \lg y = 1 \\ \lg x = 2 \end{cases}.$$

Конечно, системот има две решенија $x = 10, y = 100$ или $x = 100, y = 10$, кои се решенија и на почетниот систем.

1392. Нека $a, b \in (0, 1)$. Докажи дека $\log_a \frac{2ab}{a+b} \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 1$.

Решение. Бидејќи $a, b < 1$, добиваме дека $ab < 1$. Не е тешко да се провери дека е исполнето неравенството

$$\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leq ab, \quad (*)$$

од каде што добиваме дека $k = \frac{2ab}{a+b} < 1$. Од својствата на логаритамската функција, со логаритмирање на (*) со основа k , добиваме

$$\log_k ab \leq \log_k \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 = 2 \log_k k = 2, \text{ т.е. } \frac{\log_k a + \log_k b}{2} \leq 1.$$

Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

Од условот на задачата имаме

$\overline{AB} = 2\overline{CH}$, па затоа $\overline{CH} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Сега, $\frac{1}{2}\overline{AB} = (2 + \sqrt{3})\overline{CH}$, т.е. $\overline{AH} = \frac{1}{4+2\sqrt{3}}\overline{AB}$.

Од друга страна $\overline{BH} = \overline{AB} - \overline{AH} = \overline{AB} - \frac{1}{4+2\sqrt{3}}\overline{AB} = \frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\overline{AB}$, па од правоаголниот

триаголник $\triangle BCH$ се добива: $\overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{CH}^2$, односно:

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\overline{AB}\right)^2 + \frac{1}{4}\overline{AB}^2 = \frac{4(21+12\sqrt{3})+28+16\sqrt{3}}{16(2+\sqrt{3})^2}\overline{AB}^2 \\ &= \frac{4(21+12\sqrt{3}+7+4\sqrt{3})}{16(2+\sqrt{3})^2}\overline{AB}^2 = \frac{16(2+\sqrt{3})^2}{16(2+\sqrt{3})^2}\overline{AB}^2 = \overline{AB}^2.\end{aligned}$$

Значи, $\overline{BC} = \overline{AB}$ односно триаголникот $\triangle ABC$ е рамнокрак и $\beta = 30^\circ$.

Трет начин. Од триаголникот $\triangle ACH$ имаме

$\alpha = 75^\circ$, $\angle AHC = 90^\circ$, па затоа $\angle ACH = \varphi = 15^\circ$. Во-

ведуваме ознаки $\overline{AH} = x$ и $\overline{CH} = d$. Тогаш $\overline{AB} = 2d$, а од триаголникот $\triangle ACH$ имаме

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{d}, \text{ т.е. } x = d \cdot \operatorname{tg} 15^\circ.$$

Од друга страна

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} 30^\circ}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})^2}{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{12 - 6\sqrt{3}}{6} = 2 - \sqrt{3}.$$

Од триаголникот $\triangle BCH$ имаме

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d}{2d - x} = \frac{d}{2d - d \operatorname{tg} 15^\circ} = \frac{1}{2 - (2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Бидејќи $\beta < 90^\circ$, добиваме дека $\beta = 30^\circ$, што требаше да се определи.

1394. Докажи дека за низата определена со $x_1 = 19$, $x_2 = 27$, $x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}$, постои природен број k , таков што $x_k = 0$. Определи ја вредноста на k .

Решение. Ако членовите на низата го исполнуваат равенството $x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}$, тогаш тие го задоволуваат и равенството $x_{n+1}x_{n+2} = x_nx_{n+1} - 1$. Според тоа, ако определиме низа $y_k = x_{k+1}x_k$, за $k \geq 1$, тогаш таа го задоволува условот $y_{n+1} = y_n - 1$ и $y_1 = x_2x_1 = 19 \cdot 27 = 513$. Сега е јасно дека $y_k = 0$ за $k = 1844$. Притоа $x_n \neq 0$ за $1 \leq n \leq 1844$. Но, $x_{1844} \cdot x_{1845} = y_{1844} = 0$, а од $x_{1844} \neq 0$, добиваме дека $x_{1845} = 0$. Значи, низата е конечна, и нејзини членови се $x_1, x_2, \dots, x_{1844}, x_{1845} = 0$. Бараната вредност за k е $k = 1845$.

1395. Определи ја најголемата вредност на изразот $A = \sqrt{x+3} + \sqrt{y+3} + \sqrt{z+3}$, ако x, y, z се реални броеви такви што $x + y + z = \frac{1989}{3}$.

Решение. *Прв начин.* Воведуваме смени $x+3=a, y+3=b, z+3=c$. Тогаш $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ и $a+b+c = x+3+y+3+z+3 = x+y+z+9 = \frac{1989}{3}+9 = \frac{2016}{3}$.

Изразот $A = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ е позитивен, па тој има најголема вредност ако и само ако неговиот квадрат има најголема вредност. За квадратот на A имаме

$$A^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = a + b + c + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} = \frac{2016}{3} + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac}.$$

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме

$$2\sqrt{ab} \leq a + b, \quad 2\sqrt{bc} \leq b + c, \quad 2\sqrt{ca} \leq c + a,$$

при што равенство се добива ако и само ако $a = b, b = c, c = a$, т.е. $a = b = c$. Но тогаш

$$A^2 \leq \frac{2016}{3} + 2(a + b + c) = \frac{2016}{3} + 2 \cdot \frac{2016}{3} = 3 \cdot \frac{2016}{3} = 2016,$$

при што $A^2 = 2016$ ако и само ако $a = b = c$. Значи, најголемата вредност за A е $\sqrt{2016}$.

Втор начин. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина за броевите $\sqrt{x+3}, \sqrt{y+3}, \sqrt{z+3}$, добиваме

$$A = 3 \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{y+3} + \sqrt{z+3}}{3} \leq 3 \sqrt{\frac{(\sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{y+3})^2 + (\sqrt{z+3})^2}{3}} = 3 \sqrt{\frac{x+y+z+9}{3}} = 3 \sqrt{\frac{1989}{3} + 9} = \sqrt{2016}.$$

Равенство се достигнува за $\sqrt{x+3} = \sqrt{y+3} = \sqrt{z+3}$, од каде што добиваме дека $x = y = z$. Од условот $x + y + z = \frac{1989}{3}$, добиваме $x = y = z = 221$. Бидејќи во задачата се бара најголемата вредност за A , добиваме $A = \sqrt{2016}$ и се достигнува за $x = y = z = 221$.

Трет начин. Изразот A ќе го запишеме во облик

$$A = 1 \cdot \sqrt{x+3} + 1 \cdot \sqrt{y+3} + 1 \cdot \sqrt{z+3}.$$

Ако го искористиме неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, добиваме

$$\begin{aligned} A &= 1 \cdot \sqrt{x+3} + 1 \cdot \sqrt{y+3} + 1 \cdot \sqrt{z+3} \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{(\sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{y+3})^2 + (\sqrt{z+3})^2} \\ &= \sqrt{3} \sqrt{x+y+z+9} = \sqrt{\frac{2016}{3}} \sqrt{3} = \sqrt{2016}. \end{aligned}$$

Во неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц равенство е исполнето ако и само ако

$$\frac{\sqrt{x+3}}{1} = \frac{\sqrt{y+3}}{1} = \frac{\sqrt{z+3}}{1}, \text{ т.е. } \sqrt{x+3} = \sqrt{y+3} = \sqrt{z+3}.$$

Со едноставни алгебарски трансформации, заради условите од задачата, добиваме $x = y = z$. Бидејќи $x + y + z = \frac{1989}{3}$, добиваме $x = y = z = 221$.

Конечно, A добива најголема вредност $\sqrt{2016}$ за $x = y = z = 221$.