Четиринаесетти тест

31.05.2017 година

1. Определи ги сите парови прости броеви p и q за кои $p^2 \mid q^3+1$ и $q^2 \mid p^6-1$.

2. Докажи, дека за секои позитивни реални броеви a,b,c,d е точно неравенството
$$\frac{a^4}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b^4}{b^3+b^2c+bc^2+c^3}+\frac{c^4}{c^3+c^2d+cd^2+d^3}+\frac{d^4}{d^3+d^2a+da^2+a^3}\geq\frac{a+b+c+d}{4}.$$

3. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle ACB=2\measuredangle ABC$. Точката M припаѓа на страната AC и важи $\overline{CM}=\overline{BC}$. Определи ги аглите на триаголникот ABC ако $\overline{BM}=\overline{AC}$.

4. Дадени се различни природни броеви $a_1,a_2,...,a_{10}$ кои се поголеми или еднакви на 3, чиј збир е еднаков на 678. Дали постои природен број n таков што збирот на остатоците при делењето на бројот n со броевите $a_1,a_2,...,a_{10}, 2a_1,2a_2,...,2a_{10}$ да е еднаков на 2012?

5. На почетокот на масата се поставени 111 парчиња пластелин со еднакви тежини. Во еден чекор можеме да избереме неколку групи (може и една) со еднаков број парчиња во секоја група и од секоја група со слепување на парчињата кои се во неа да формираме ново парче пластелин. Определи го најмалиот број чекори за да се добијат 11 парчиња пластелин, кои по парови имаат различна тежина.