Петнаесетти тест

05.06.2017 година

1. Нека $a_1, a_2, \ldots$ е низа цели броеви, која содржи бесконечно многу и позитивни и негативни броеви. Познато е дека за секој природен број n броевите $a_1, a_2, \ldots, a_n$ даваат различни остатоци при делење со n. Докажи, дека во оваа низа секој цел број се појавува точно по еднаш.

2. Нека n е непарен природен број поголем од 1 и нека $k_1, k_2, \ldots, k_n$ се цели броеви. За секоја пермутација $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на множеството $\{1, 2, \ldots, n\}$ нека

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i \ .$$

Докажи, дека постојат различни пермутации b и c такви што $n!$ е делител на бројот $S(b) - S(c)$.

3. Во триаголникот ABC важи $\measuredangle CAB = 60^\circ$. Симетралата на аголот BAC ја сече страната BC во точка P, а симетралата на аголот ABC ја сече страната CA во точка Q. Ако $\overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AQ} + \overline{QB}$, определи ги аглите на триаголникот ABC.