СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2019

16.02.2019 година

Прва година

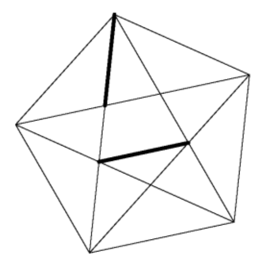
1АБ. (Сигма 112, зад. 361, стр. 41) Во множеството цели броеви реши ја равенката $a(a-b)=b$.

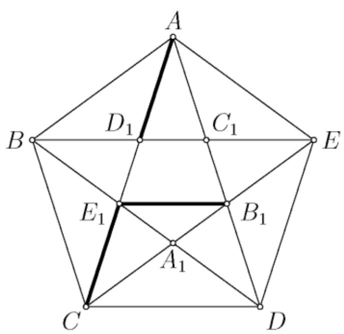
Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката $a^2=b(a+1)$. Од $\mathrm{NZD}(a,a+1)=1$ и $a+1|a^2$ следува $a+1=1$ или $a+1=-1$. Во првиот случај $a=0$ и $b=0$, а во вториот случај $a=-2$ и $b=-4$.

2А. Одреди ги сите трицифрени броеви со различни цифри кои се деливи со секој двоцифрен број кој се добива со изоставување на една негова цифра без да се менува редоследот на останатите цифри.

Решение. Нека $\overline{abc}$ е број кој ги задоволува условите на задачата. Тогаш $a\neq b\neq c\neq a$ и $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}},\frac{\overline{abc}}{\overline{bc}},\frac{\overline{abc}}{\overline{ac}}$ се цели броеви. Бидејќи $\frac{\overline{abc}}{\overline{ab}}=\frac{\overline{ab0}+c}{\overline{ab}}=10+\frac{c}{\overline{ab}}$, следува дека $\frac{c}{\overline{ab}}$ е цел број што е можно само ако $c=0$. Бидејќи $\frac{\overline{ab0}}{\overline{a0}}=\frac{\overline{ab}}{a}=10+\frac{b}{a}$, следува дека a е делител на b. Според тоа, $a\in\{1,2,3,4\}$. Од $\frac{\overline{ab0}}{\overline{b0}}=\frac{\overline{ab}}{b}=\frac{10a}{b}+1$ следува дека b е делител на $10a$. Од претходната дискусија добиваме дека броеви кои ги задоволуваат условите на задачата се: 120, 150, 240, 360,480.

3А. 4Б (Сигма 111, зад. 351, стр. 44). На цртежот е даден правилен петаголник во кој се повлечени дијагоналите. Докажи, дека задебелените отсечки имаат еднаква должина.





Решение. Бидејќи $\overline{CE_1}=\overline{AD_1}$, доволно е да докажеме дека триаголникот CB_1E_1 е рамнокрак. Бидејќи дијагоналата на правилен петаголник е паралелна на неговата страна, важи $B_1E_1\parallel C_1D_1$, односно $E_1B_1\parallel D_1E$.

Според тоа, $\measuredangle CB_1E_1=\measuredangle CED_1$, како агли со паралелни краци. Заради симетријата на петаголникот триаголникот CED_1 е рамнокрак, па затоа $\measuredangle CED_1=\measuredangle ECD_1$. Конечно, $\measuredangle CB_1E_1=\measuredangle B_1CE_1$, што значи дека триаголникот CB_1E_1 е рамнокрак.

4А. Нека a,b,c се непарни природни броеви. Докажи дека барем еден од броевите $ab-1,bc-1,ac-1$ е делив со 4.

Решение. Секој природен број има еден од облиците $4k,4k+1,4k+2,4k+3$. Бидејќи броевите a,b,c се непарни природни броеви, тие имаат еден од облиците $4k+1,4k+3$. Според принципот на Дирихле два од броевите a,b,c имаат ист облик. Без ограничување на општоста, можеме да претпоставиме дека a и b имаат ист облик. Според тоа, $a=4k_1+1,b=4k_2+1$ или $a=4k_1+3,b=4k_2+3$.

Во случајот $a=4k_1+1,b=4k_2+1$ имаме

$$ab-1=(4k_1+1)(4k_2+1)-1=16k_1k_2+4k_1+4k_2+1-1=4(4k_1k_2+k_1+k_2).$$

Во случајот $a=4k_1+3,b=4k_2+3$ имаме

$$ab-1=(4k_1+3)(4k_2+3)-1=16k_1k_2+12k_1+12k_2+9-1=4(4k_1k_2+3k_1+3k_2+2).$$

Според тоа, $4|ab-1$, односно еден од броевите $ab-1,bc-1,ac-1$ е делив со 4.

2Б. Јане прочитал пет книги. Од петте книги може да се формираат 5 множества од по четири книги. Четирите книги од секое од овие множества имале заедно 913, 973, 873, 1011 и 1002 страни. По колку страни имала секоја од петте книги?

Решение. Ако бројот на страните на книгите се a,b,c,d,e соодветно, тогаш треба да го решиме системот равенки:

$$\begin{cases} a+b+c+d=913 \\ a+b+c+e=973 \\ a+b+d+e=873 \\ a+c+d+e=1011 \\ b+c+d+e=1002 \end{cases}$$

Ако ги собереме сите равенки, се добива:

$$4(a+b+c+d+e)=4772$$
$$\Rightarrow a+b+c+d+e=1193$$

Ако од оваа равенка се одземе секоја од петте равенки од системот, ќе се добие $a=182, b=191, c=320, d=220, e=280$ страни.

3Б. Ако $a+b+c=0$ и $a^2+b^2+c^2=6$, пресметај ја вредноста на изразот $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$.

Решение. Од тоа што

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

и од условот на задачата имаме дека $ab+bc+ca=-3$. Ако ја искористиме уште еднаш формулата за трином на квадрат имаме

$$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)=9.$$

Оттука,

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=9.$$

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2019

16.02.2019 година

Втора година

1А. Дадени се две квадратни равенки $x^2+ax+1=0$ и $x^2+x+a=0$. Одреди ги сите вредности на параметарот a за кои двете равенки имаат барем едно заедничко решение.
Решение. Со одземање на втората равенка од првата добиваме

$$(a-1)x+1-a=0 \Leftrightarrow (a-1)(x-1)=0.$$

Ако $a=1$, тогаш станува збор за иста равенка, па имаат барем едно заедничко решение.
Ако $a\neq 1$, тогаш мора $x=1$, па со замена во равенките добиваме дека $a=-2$. Следува равенките имаат барем едно заедничко решение само кога $a=1$ и $a=-2$.

2АБ (Сигма 111, зад. 352, стр. 45). Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} 2a^2-2ab+b^2=a \\ 4a^2-5ab+2b^2=b. \end{cases}$$

Решение. Ако првата равенка ја помножиме со b, а втората со a, го добиваме системот равенки

$$\begin{cases} 2a^2b-2ab^2+b^3=ab \\ 4a^3-5a^2b+2b^2a=ab \end{cases}$$

Ако во последниот систем ги одземеме равенките добиваме

$$b^3-4b^2a+7a^2b-4a^3=0.$$

Ако $a=0$, тогаш $b=0$, па затоа $(a,b)=(0,0)$ е едно решение на системот.
За $a\neq 0$ ја воведуваме замената $z=\frac{b}{a}$ и ја добиваме равенката

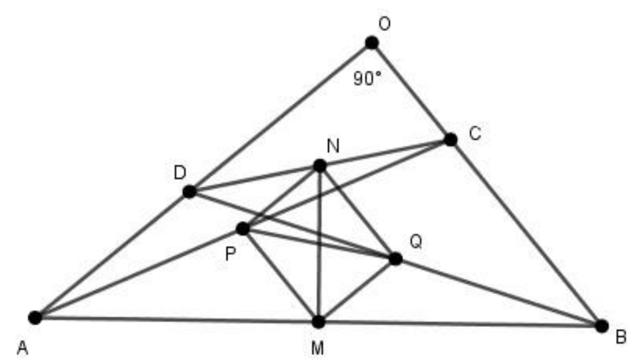
$$z^3-4z^2+7z-4=0$$

која е еквивалентна со равенката

$$(z-1)(z^2-3z+4)=0.$$

За $z=1$ важи $a=b$, а потоа со замена во почетниот систем лесно се добива дека $(a,b)=(1,1)$. Понатаму, дискриминантата на равенката $z^2-3z+4=0$ е еднаква на -7, па затоа таа нема реални решенија, што значи дека почетниот систем нема други реални решенија.

3А Нека е даден конвексен четириаголник $ABCD$ таков што $AD\perp BC$. Нека растојанието од средината на AB до средината на CD е $1cm$. Пресметај го растојанието од средината на AC до средината на BD.
Решение. Нека M, N, P и Q се средини на AB, CD, AC и BD соодветно. Тогаш $\overline{MN}=1cm$. Од M и P се средини на AB и AC соодветно следува и $\overline{MP}=\frac{\overline{BC}}{2}$. Од N и Q се средини на CD и BD соодветно имаме $NQ\parallel BC$ и $\overline{NQ}=\frac{\overline{BC}}{2}$. Од $NQ\parallel BC$ и $PM\parallel BC$ следува $PM\parallel NQ$ и $\overline{DM}=\overline{NQ}$. Аналогно се покажува дека $PN\parallel MQ$ и $\overline{PN}=\overline{MQ}$. Следува четириагонкиот $MQNP$ е паралелограм. Од $AD\perp BC$, $NQ\parallel BC$ и $PN\parallel AD$ следува $\sphericalangle PNQ=90^\circ$. Следува четириаголникот $MQNP$ е правоаголни со дијагонали MN и PQ. Следува $\overline{PQ}=\overline{MN}=1cm$.



4АБ (Сигма 112, зад. 364, стр. 42) Во зависност од вредноста на реалниот параметар, во множеството реални броеви реши ја равенката

$$(a-1)(1+x+x^2)^2=(a+1)(1+x^2+x^4).$$

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}1+x^2+x^4&=(1+x+x^2)^2-(2x+2x^2+2x^3)\\&=(1+x+x^2)^2-2x(1+x+x^2)\\&=(1+x+x^2)((1+x+x^2)-2x),\end{aligned}$$

па затоа дадената равенка последователно е еквивалентна на равенките

$$\begin{aligned}&(a-1)(1+x+x^2)^2=(a+1)(1+x+x^2)((1+x+x^2)-2x)\\&(1+x+x^2)(((a-1)-(a+1))(1+x+x^2)+2x(a+1))=0\\&(1+x+x^2)(-2(1+x+x^2)+2x(a+1))=0\\&(1+x+x^2)(1-ax+x^2)=0.\end{aligned}$$

Равенката $1+x+x^2=0$ нема реални решенија. Дискриминатата на равенката $x^2-ax+1=0$ е $D=a^2-4a$, па затоа оваа равенка има реални решенија ако и само ако $|a|\geq 2$. Конечно,

- за $a\in(-2,2)$ дадената равенка нема реални решенија,
- за $a=2$ равенката има едно решение $x=1$,
- за $a=-2$ равенката има едно решение $x=-1$ и
- за $a<-2$ или $a>2$ равенката има реални и различни решенија

$$x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}.$$

1Б. Во квадратната равенка $x^2-(m+1)x+3m+2=0$ да се определи параметарот m така што збирот од решенијата на дадената равенка да е еднаков на збирот од нивните квадрати.

Решение. Од Виетовите правила имаме $x_1+x_2=m+1$ и $x_1x_2=3m+2$. Од условот на задачата имаме

$$m+1=x_1+x_2=x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=\left(m+1\right)^2-2\left(3m+2\right)$$

т.е. $m^2-5m-4=0$. **(10)** Со решавање на квадратната равенка добиваме $m_1=\frac{5-\sqrt{31}}{2}$ и $m_2=\frac{5+\sqrt{31}}{2}$.

3Б. Даден е $\triangle ABC$ со страна $\overline{AB}=2cm$, $\alpha=30^\circ$ и $\beta=45^\circ$. Да се пресметаат должините на страните BC и AC.

Решение. Нека пресечната точка на висината h_c и страната AB е точка D. Од $\beta=45^\circ$ и $h_c\perp AB$ следува $\measuredangle BCD=45^\circ$ т.е. $\triangle BCD$ е рамнокрак правоаголен триаголник и $\overline{BD}=h_c$. Тогаш од $\sin 45^\circ=\dfrac{h_c}{a}$ следува $a=\sqrt{2}h_c$. Од $\sin 30^\circ=\dfrac{h_c}{b}$ следува $b=2h_c$. Од $\triangle ADC$ и $\triangle BDC$ следува $\left(2h_c\right)^2-\left(2-h_c\right)^2=h_c^2$ и $\left(\sqrt{2}h_c\right)^2-h_c^2=h_c^2$. Со изедначување на последните равенства имаме $\left(2h_c\right)^2-\left(2-h_c\right)^2=\left(\sqrt{2}h_c\right)^2-h_c^2$ т.е. $2h_c^2+4h_c-4=0$. Со решавање на квадратната равенка добиваме дека $h_c=\sqrt{3}-1cm$. Следува $a=\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)cm$, а $b=2\left(\sqrt{3}-1\right)cm$.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2019

16.02.2019 година

Трета година

1А. Во множеството реални броеви реши ја равенката $\log_2 x+\log_3 x+\log_4 x=1$.

Решение. За $x>0$ извлекуваме пред заграда $\log_4 x$ и добиваме:

$$\log_4 x\left(\frac{\log_2 x}{\log_4 x}+\frac{\log_3 x}{\log_4 x}+1\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x\left(\frac{\log_x 4}{\log_x 2}+\frac{\log_x 4}{\log_x 3}+1\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x\left(\log_2 4+\log_3 4+1\right)=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_4 x=\frac{1}{3+2\log_3 2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=2^{\frac{1}{3+2\log_3 2}}$$

2АБ (Сигма 112, зад. 367, стр. 43) Даден е триаголник ABC и точка D на страната BC. Нека $\alpha_1=\measuredangle DAB$ и $\alpha_2=\measuredangle CAD$. Докажи, дека

$$\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\overline{AD}}=\frac{\sin\alpha_1}{\overline{AC}}+\frac{\sin\alpha_2}{\overline{AB}}.$$

Решение. Имаме

$$P_{ABC}=\tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\sin(\alpha_1+\alpha_2),\ P_{ABD}=\tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\alpha_1,\ P_{ADC}=\tfrac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha_2.$$

Бидејќи $P_{ABC}=P_{ABD}+P_{ADC}$, добиваме

$$\tfrac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AB}\cdot\sin(\alpha_1+\alpha_2)=\tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\alpha_1+\tfrac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\sin\alpha_2.$$

Ако последното равенство го поделиме со $\tfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}$ го добиваме бараното равенство.

3А Пресметај го остриот агол α, без да користиш калкулатор, ако се знае дека

$$ctg\alpha=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}.$$

Решение. Изразот од условот на задачата можеме да го запишеме како

$$ctg\alpha=2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+\sqrt{3})=$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{\sin 60^\circ+\sin 45^\circ}{\sin 45^\circ-\sin 30^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{105^\circ}{2}\cos\frac{15^\circ}{2}}{2\sin\frac{15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ}{2}}=ctg\frac{15^\circ}{2}.$$

Конечно, имаме $\alpha=7^\circ 30'$.

4АБ (Сигма 110, зад. 1451, стр. 32) Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}(1+4x^2)y=4z^2\\(1+4y^2)z=4x^2\\(1+4z^2)x=4y^2.\end{cases}$$

Решение. Ако некој x,y или z е еднаков на нула, тогаш $x=y=z=0$. Во спротивно мора да важи $x>0, y>0, z>0$. Ако ги помножиме дадените равенки, тогаш $xyz(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)=64z^2x^2y^2$ и како $xyz\neq 0$ добиваме

$$(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)=64xyz.$$

Понатаму, за позитивни реални броеви x,y и z важи $1+4x^2\geq 4x, 1+4y^2\geq 4y,\ 1+4z^2\geq 4z$, добиваме $(1+4x^2)(1+4y^2)(1+4z^2)\geq 64xyz$ при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{2}$.

Конечно, единствени решенија на системот се $x=y=z=0$ и $x=y=z=\frac{1}{2}$.

1Б. Во множество то реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{\tfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}}+\sqrt{\tfrac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3}}=\tfrac{5}{2}.$$

Решение. Бидејќи $x^2-2x+3>0$ и $x^2+2x+4>0\quad \forall x\in\mathbb{R}$ имаме дека $D_x=\mathbb{R}$. Ставаме смена $t=\dfrac{x^2-2x+3}{x^2+2x+4}$ и имаме

$$\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow t+2+\frac{1}{t}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow 4t^2-17t+4=0\Leftrightarrow t_1=4, t_2=\frac{1}{4}$$

Се враќаме во смената и со проверка забележуваме дека за $t_1=4$ равенката нема реални решение, а за $t_2=\dfrac{1}{4}$ имаме $x_1=2$ и $x_2=\dfrac{4}{3}$.

3Б Докажи го равенството

$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\cdots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\log_x 2}\right)^2.$$

Решение. Користиме дека $\log_x 2^a=a\log_x 2$ **(5)** и $\dfrac{1}{k(k+1)}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}$.

$$\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\cdot\log_x 8}+\cdots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}=$$

$$=\frac{1}{\log_x 2\cdot\log_x 2^2}+\frac{1}{\log_x 2^2\cdot\log_x 2^3}+\cdots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\cdot\log_x 2^n}=$$

$$=\frac{1}{(\log_x 2)^2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}\right)=$$

$$=\frac{1}{(\log_x 2)^2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{\log_x 2}\right)^2$$

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2019

16.02.2019 година

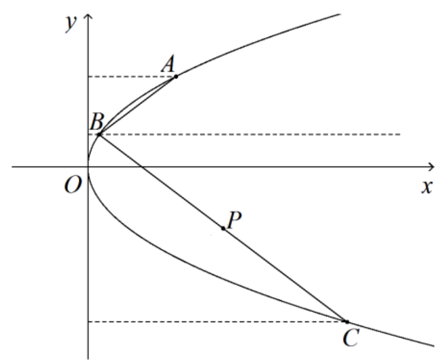
Четврта година

1А. Нека $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ се низи дадени со $x_0=0$, $y_0=1$, $x_{n+1}=\frac{3x_n+y_n}{4}$, $y_{n+1}=\frac{2x_n+3y_n}{5}$.
Докажи дека $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дадена со $z_n=y_n-x_n$, за секој $n\in\mathbb{N}$ е геометриска прогресија.
Решение. Од дефиницијата на z_n имаме $z_{n+1}=y_{n+1}-x_{n+1}$, односно

$$z_{n+1}=\frac{2x_n+3y_n}{5}-\frac{3x_n+y_n}{4}=-\frac{7}{20}x_n+\frac{7}{20}y_n .$$

Значи, $z_{n+1}=\frac{7}{20}(y_n-x_n)$. Имајќи во предвид дека $z_n=y_n-x_n$, добиваме дека $z_{n+1}=\frac{7}{20}z_n$, од каде се добива дека $\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{7}{20}$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Значи $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ е геометриска прогресија со количник $\frac{7}{20}$.

2АБ (Сигма 110, зад. 346, стр. 39) Дадена е парабола $y^2=2px,\ p>0$. На параболата се дадени точки A,B,C (A има најголема, а C најмала ордината) такви што симетралата на $\measuredangle ABC$ е паралелна со $x-$оската. Ако должината на проекцијата на отсечката AC на $y-$оската е еднаква на $4p$, определи ја ординатата на средината на отсечката BC.



Решение. Нека $(\frac{y_A^2}{2p},y_A),(\frac{y_B^2}{2p},y_B),(\frac{y_C^2}{2p},y_C)$ се координатите на точките A,B,C, соодветно. Бидејќи правите AB и BC за фаќаат суплементни агли со $x-$оската, следува дека нивните коефициенти на правци се спротивни. Од условот $k_{AB}=-k_{BC}$ имаме

$$\frac{y_A-y_B}{\frac{y_A^2}{2p}-\frac{y_B^2}{2p}}=-\frac{y_B-y_C}{\frac{y_B^2}{2p}-\frac{y_C^2}{2p}},$$

т.е.

$$\frac{y_A-y_B}{y_A^2-y_B^2}=-\frac{y_B-y_C}{y_B^2-y_C^2},$$

од каде добиваме $y_A+2y_B+y_C=0$. **(5)** Бидејќи $y_A>y_C$, а должината на проекцијата на отсечката AC на $y-$оската е еднаква на $4p$ добиваме $y_A-y_C=4p$. Од последните две равенства следува $2y_B+2y_C=-4p$, што значи дека ординатата на средината P на отсечката BC е $\frac{y_B+y_C}{2}=-p$.

3АБ (Сигма 111, зад. 358, стр. 48) Нека a и b се позитивни реални броеви такви што броевите $\log_b a$, $\log_{2b}(2a)$ и $\log_{4b}(4a)$, во овој редослед се последователни членови на аритметичка прогресија. Докажи, дека $a=b$.
Решение. Нека $x=\log_b a$, $y=\log_{2b}(2a)$ и $z=\log_{4b}(4a)$. Тогаш

$$b^x=a,\ (2b)^y=2a \text{ и } (4b)^z=4a .$$

Од условот на задачата следува $2y=x+z$, па затоа

$$4a^2=(2b)^{2y}=(2b)^{x+z}=2^{x+z}b^xb^z=2^{x+z}a\frac{4a}{4^z}=2^{x-z}4a^2 .$$

Според тоа, $2^{-z}=1$, т.е. $x=z$. Сега од $x=z$ следува $(4b)^x=(4b)^z=4a=4b^x$, па затоа $4^xb^x=4b^x$, од каде добиваме $4^x=4$, т.е. $x=1$. Конечно, $a=b^x=b^1=b$.

4А Пресметај го збирот $2\binom{2007}{2}+4\binom{2007}{4}+...+2006\binom{2007}{2006}$.

Решение. Да забележиме дека

$$k\binom{2007}{k}=k\frac{2007!}{k!(2007-k)!}=\frac{2007\cdot 2006!}{(k-1)!(2007-k)!}=2007\binom{2006}{k-1}.$$

Уште знаеме дека

$$\binom{2006}{1}+\binom{2006}{3}+...+\binom{2006}{2005}=2^{2006-1},$$

па затоа

$$2\binom{2007}{2}+4\binom{2007}{4}+...+2006\binom{2007}{2006}=2007\cdot 2^{2005}.$$

1Б Во рамнина се дадени две множества од паралелни прави $p_1, p_2,\dots, p_{13}$ и $q_1, q_2,\dots, q_7$ такви што правите од првото се сечат со правите од второто. Колку паралелограми се определени со тие прави?

Решение. Секој пар на прави од првото множество и секој пар од второто множество одредуваат точно еден паралелограм и обратно. Еден пар од првото множество може да се избере на $\binom{13}{2}$ начини, а од другото множество на $\binom{7}{2}$, од каде следува дека постојат $\binom{13}{2}\binom{7}{2}=1638$.

4Б Докажи дека, за секој природен број n

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-корени}$$

Решение. За $n=1$ тврдењето е точно бидејќи $\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Да претпоставиме дека тврењето е точно за природниот број n. За да го покажеме тврдењето, доволно е да се докаже дека равенството важи ако наместо n замениме $n+1$. Така

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}=\cos\frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n-корени}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{4}}=\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n+1-корени}$$