

Трет тест

19.03.2017 година

1. Симетралите на аглите при темињата A, B и C на $\triangle ABC$ ја сечат опишаната кружница околу триаголникот во точките A_1, B_1 и C_1 , соодветно. Да означиме $AA_1 \cap CC_1 = I$, $AA_1 \cap BC = N$ и $BB_1 \cap A_1C_1 = P$. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle IPC_1$ и $OP \cap BC = M$.
Определи ги аглите на $\triangle ABC$, ако $\overline{BM} = \overline{MN}$ и $\angle BAC = 2\angle ABC$.
2. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$3^x - 5^y = z^2.$$
3. Определи ги сите функции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такви што
$$f(f(m)^2 + 2f(n)^2) = m^2 + 2n^2, \text{ за секои } m, n \in \mathbb{N}.$$
4. Нека n е природен број. Правоаголник со должини на страни $90n+1$ и $90n+5$ е поделен на единечни квадрати со страни паралелни на страните на правоаголникот. Нека S е множеството од сите темиња на овие единечни квадрати. Докажи, дека бројот на правите кои содржат барем две точки од множеството S е делив со 4.