

Дваесет и шести тест

14.06.2017 година

1. Нека $a, b \in \mathbb{Z}$ и $k \in \mathbb{N}$. Докажи, дека ако равенката $a^k x - b^k y = a - b$ има решение подреден пар (x, y) од последователни цели броеви, тогаш $|a - b|$ е точен k -ти степен.
2. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ ($\overline{AC} > \overline{BC}$) со опишана кружница k со центар O . Точката N е средина на AB , а точката P е подножјето на висината повлечена од C кон правата AB . Нека правите CP и CO по втор пат ја сечат k во точките E и K , соодветно. Точката F е проекција на E врз CK , а точката M е проекција на P врз FE . Нека T е средината на KF . Докажи, дека $\angle MTF = \angle PNC$.
3. Нека n е природен број. Природните броеви a, b, c, d се помали или еднакви на n , при што d е најголемиот меѓу нив и важи

$$(ab + cd)(bc + ad)(ac + bd) = (d - a)^2(d - b)^2(d - c)^2. \quad (1)$$

Докажи, дека $d = a + b + c$.

4. Во квадратчињата на шаховска табла со димензии 10×10 се запишани броевите од 1 до 100, така што секој број е запишан точно по еднаш. За секои два броја поврзани со движењето на скокачот, ја пресметуваме нивната разлика така што од поголемиот број го одземеме помалиот. Колку најмалку различни броеви може да има меѓу добиените разлики?