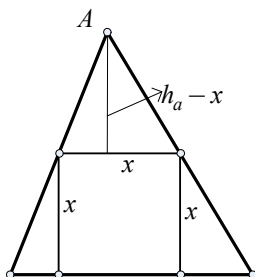


РЕШЕНИЈА НА КОНКУРСНИ ЗАДАЧИ од СИГМА 105

I година

289. Во триаголник ABC со должини на страни a, b, c впишани се три квадрати со должини на страни x, y, z , така што по две темиња на тие квадрати лежат на страните AB, BC, CA соодветно. Ако $x = y = z$, тогаш $a = b = c$. Докажи!



Решение. Нека ABC е триаголник со должини на страни a, b и c во стандардни ознаки. Со P ќе ја означиме плоштината на триаголникот. Од условот на задачата $\overline{BC} = a$, а квадратот што е впишан во триаголникот и две негови темиња лежат на страната BC има должина на страната x . Тогаш не е тешко да се види дека е точно равенството

$$P = x^2 + \frac{1}{2}(a-x)x + \frac{1}{2}(h_a-x)x.$$

Со средување на ова равенство добиваме $x = \frac{2P}{a+h_a}$.

На потполно аналоген начин ако y и z се должини на страните на квадратите чии две темиња лежат на страните AC и AB соодветно, тогаш $y = \frac{2P}{b+h_b}$, $z = \frac{2P}{c+h_c}$.

Од условот на задачата добиваме дека $\frac{2P}{a+h_a} = \frac{2P}{b+h_b} = \frac{2P}{c+h_c}$, односно

$$a + h_a = b + h_b = c + h_c.$$

Ќе претпоставиме дека не се исполнети равенствата $a = b = c$. Нека на пример $a \neq b$. Тогаш $a \neq c$ или $b \neq c$. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $a \neq c$. Но, тогаш $a - b = h_b - h_a = \frac{2P}{b} - \frac{2P}{a} = \frac{2P(a-b)}{ab}$, од каде добиваме дека $P = \frac{1}{2}ab$, т.е. $\gamma = 90^\circ$, и $a - c = h_c - h_a = \frac{2P}{c} - \frac{2P}{a} = \frac{2P(a-c)}{ac}$, од каде пак добиваме дека $P = \frac{1}{2}ac$, т.е. $\beta = 90^\circ$. Но, во еден триаголник не може да има два прави агли, па според тоа $a = b = c$.

290. За целите броеви a, b и c е исполнето равенството

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{c^2}{a^2+c^2} = \frac{2c}{b+c}. \quad (1)$$

Докажи дека производот bc е полн квадрат.

Решение. Ако $b = 0$ или $c = 0$, јасно е дека bc е полн квадрат. Ако $a = 0$, тогаш лесно се добива (со замена во равенството) дека $b = c$, па според тоа $bc = c^2 = b^2$ е полн квадрат. Затоа нека претпоставиме дека a, b, c се цели броеви различни од нула. Во тој случај (1) можеме да го запишеме во обликот

$$\frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}} + \frac{1}{1+\frac{a^2}{c^2}} = \frac{2}{1+\frac{b}{a}\frac{a}{c}}.$$

Ќе воведеме смена $x = \frac{b}{a}$, $y = \frac{a}{c}$ и последното равенство ќе го добие обликот

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} = \frac{2}{1+xy}.$$

Последното равенство е еквивалентно со низата равенства

$$\frac{2+x^2+y^2}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{1}{1+xy}$$

$$(2+x^2+y^2)(1+xy) = 2(1+x^2)(1+y^2)$$

$$2+x^2+y^2+2xy+x^3y+y^3x = 2+2x^2+2y^2+2x^2y^2$$

$$x^3y-2x^2y^2+xy^3-x^2+2xy-y^2 = 0$$

$$xy(x-y)^2 - (x-y)^2 = 0$$

$$(xy-1)(x-y)^2 = 0.$$

Од точноста на последното равенство, добиваме два случаи.

Случај 1. $x = y$. Тогаш $\frac{b}{a} = \frac{a}{c}$, т.е. $bc = a^2$ што и требаше да се докаже.

Случај 2. $xy = 1$. Тогаш $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = 1$, т.е. $b = c$ и $bc = c^2 = b^2$, што требаше да се докаже.

291. Нека a, b, c се позитивни реални броеви поголеми од 1. Докажи дека

$$abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a + b + c + \frac{1}{abc}.$$

Решение. *Прв начин.* Бидејќи $a, b, c > 1$ добиваме дека $a > \frac{1}{b}$, $b > \frac{1}{c}$, $c > \frac{1}{a}$ и $(a - \frac{1}{b})(b - \frac{1}{c})(c - \frac{1}{a}) > 0$. Ако изразот од левата страна на последното неравенство го средиме (т.е. се ослободиме од загради) добиваме

$$abc - a - b - c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{abc} > 0, \text{ т.е. } abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a + b + c + \frac{1}{abc}.$$

Втор начин. Од условот на задачата имаме $a, b, c > 1$, па според тоа $ac > 1$ и $\frac{1}{bc} < 1$, односно $ac - 1 > 0$ и $\frac{1}{bc} - 1 < 0$, од каде што следува $(ac - 1)(\frac{1}{bc} - 1) < 0$, т.е. $\frac{ac}{bc} - ac - \frac{1}{bc} + 1 < 0$. Бидејќи $bc > 1$, ја добиваме низата од еквивалентни равенства:

$$ac - abc^2 - 1 + bc < 0$$

$$abc^2 + 1 > ac + bc$$

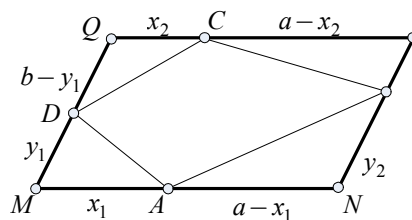
$$(abc^2 + 1)(ab - 1) > (ac + bc)(ab - 1)$$

$$(abc)^2 + ab + bc + ca > abc(a + b + c) + 1 \quad / : (abc)$$

$$abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > a + b + c + \frac{1}{abc}.$$

II година

292. Даден е паралелограм $MNPQ$. На неговите страни MN, NP, PQ, QM се избрани точки A, B, C, D соодветно, така што плоштината на четириаголникот $ABCD$ е половина од плоштината на паралелограмот $MNPQ$. Докажи дека барем една дијагонала на четириа-



голникот $ABCD$ е паралелна со барем една страна на паралелограмот $MNPQ$.

Решение. Ќе воведеме ознаки $\overline{MN} = \overline{PQ} = a$, $\overline{NP} = \overline{QM} = b$, $\overline{MA} = x_1$, $\overline{QC} = x_2$, $\overline{MD} = y_1$, $\overline{NB} = y_2$ (види цртеж). Нека $S_1 = P_{ABCD}$ и $S = P_{MNPQ}$ се плоштините на четириаголниците $ABCD$ и $MNPQ$. Тогаш

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{S} &= \frac{P_{ABCD}}{P_{MNPQ}} = \frac{P_{MNPQ} - (P_{\Delta MAD} + P_{\Delta QCD}) - (P_{\Delta NAB} + P_{\Delta PBC})}{P_{MNPQ}} \\ &= 1 - \frac{P_{\Delta MAD} + P_{\Delta QCD}}{P_{MNPQ}} - \frac{P_{\Delta NAB} + P_{\Delta PBC}}{P_{MNPQ}} \\ &= 1 - \frac{x_1 y_1 + x_2 (b - y_1)}{2ab} - \frac{(a - x_2)(b - y_2) + (a - x_1)y_2}{2ab} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{2ab}.\end{aligned}$$

Сега, добиваме дека $\frac{S_1}{S} = \frac{1}{2}$ ако и само ако $\frac{(x_1 - x_2)(y_1 - y_2)}{2ab} = 0$. Последното равенство е можно ако и само ако $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$, кое е еквивалентно со $AC \parallel MQ$ или $BD \parallel MN$, што требаше да се докаже.

293. Разликата на нулите на квадратниот трином $x^2 + px + q$ е a . Определи го квадратниот трином за кој што $p + q$ има најмала вредност.

Решение. Нека x_1, x_2 се нули на квадратниот трином $x^2 + px + q$, односно се корени на квадратната равенка $x^2 + px + q = 0$. Од условот на задачата $x_1 - x_2 = a$. Според Виетовите формули имаме $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$. Значи, изразот $p + q$ може да се запише во облик $p + q = x_1 x_2 - (x_1 + x_2)$. Но од равенството $x_1 - x_2 = a$ имаме $x_2 = x_1 - a$, па ако замениме добиваме

$$p + q = x_1(x_1 - a) - x_1 - (x_1 - a) = x_1^2 - (a + 2)x_1 + a = (x_1 - \frac{a+2}{2})^2 + a - \frac{(a+2)^2}{4}.$$

Последниот израз е најмал ако и само ако $x_1 = \frac{a+2}{2}$, а во тој случај добиваме дека $x_2 = \frac{2-a}{2}$. Отука имаме $p = -2$ и $q = 1 - \frac{a^2}{4}$. Бараниот трином е $y = x^2 - 2x + 1 - \frac{a^2}{4}$.

294. Правоаголникот $ABCD$ е поделен на 9 помали правоаголници, така што плоштините на четири од нив се 8, 10, 5, 12 како што е прикажано на цртежот.

Определи ја најмалата можна вредност на плоштината на правоаголникот $ABCD$.

Решение. Со a, b, c ќе ги означиме ширините на вертикалните правоаголници кои го разделуваат правоаголникот $ABCD$, а со x, y, z висините на хоризонталните правоаголници на кои е разделен правоаголникот $ABCD$ како што е прикажано на цртежот. Тогаш според дадените податоци имаме $ax = 8$, $bx = 10$, $by = 5$ и $cz = 12$. Од последните равенства добиваме

8	10	
	5	
		12

$$a = \frac{8}{x}, b = \frac{10}{x}, c = \frac{12}{z}, y = \frac{x}{z}.$$

Со P ќе ја означиме плоштината на правоаголникот. Тогаш

$$P = 8 + 10 + 5 + 12 + az + ay + bz + cy + cz$$

$$= 35 + \frac{8}{x}z + \frac{8}{x} \frac{x}{z} + \frac{10}{x}z + \frac{12}{z} \frac{x}{z} + \frac{12}{z}x = 39 + 18\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right).$$

Изразот $\frac{x}{z} + \frac{z}{x}$ добива најмала вредност $2\sqrt{\frac{x}{z} \cdot \frac{z}{x}} = 2$

и таа се достигнува за $\frac{x}{z} = \frac{z}{x}$, т.е. $x^2 = z^2$. Бидејќи $x, z > 0$ добиваме $x = z$. Во тој случај плоштината е $P = 75$. Притоа $x = z = 2y$.

	a	b	c
x	8	10	
y		5	

III година

295. Ако е исполнето равенството $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+\varphi)}{b} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x+3\varphi)}{d}$, докажи дека $\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}$.

Решение. Бидејќи $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c}$, т.е. $\cos x : \cos(x+2\varphi) = a : c$, добиваме дека $[\cos x + \cos(x+2\varphi)] : \cos(x+2\varphi) = (a+c) : c$.

Од последното равенство добиваме дека

$$\frac{\cos x + \cos(x+2\varphi)}{a+c} = \frac{\cos(x+2\varphi)}{c} = \frac{\cos(x+\varphi)}{b}. \quad (*)$$

Ако ја искористиме формулата за збир на два косинуси, добиваме

$$\cos x + \cos(x+2\varphi) = 2 \cos \frac{x-x+2\varphi}{2} \cdot \cos \frac{x+x+2\varphi}{2} = 2 \cos \varphi \cdot \cos(x+\varphi),$$

па според тоа, од (*) добиваме $\frac{2 \cos \varphi \cos(x+\varphi)}{a+c} = \frac{\cos(x+\varphi)}{b}$, односно $\frac{a+c}{b} = 2 \cos \varphi$.

Аналогно се докажува дека $\frac{b+d}{c} = 2 \cos \varphi$, од каде следува дека $\frac{a+c}{b} = \frac{b+d}{c}$.

296. Определи го триаголникот со најголема плоштина, ако должините на неговите страни a, b, c го задоволуваат условот: $1 < a \leq 2 \leq b \leq 5 < c \leq 6$.

Решение. Прво ќе го определиме триаголникот со најголема плоштина со страни a, b и c за кој се исполнети условите $1 < a \leq 2 \leq b \leq 5$. Нека аголот што го зафаќаат страните a и b е γ . Тогаш плоштината на триаголникот е $P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$.

При фиксни a и b , најголема вредност P има за $\sin \gamma = 1$, т.е. $\gamma = 90^\circ$. Значи триаголникот кој има најголема плоштина при фиксни a и b е правоаголен и неговата најголема плоштина при ограничувањата $1 < a \leq 2 \leq b \leq 5$ е за $a = 2$ и $b = 5$ и таа изнесува $P = 5$. Во тој случај c е хипотенуза на правоаголен триаголник и $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$.

Конечно, бидејќи $5 < \sqrt{29} < 6$, добиваме дека бараниот триаголник е правоаголен со катети 2 и 5.

297. Даден е квадрат $ABCD$. Точката P припаѓа на правата AD при што BP ја сече отсечката CD во точката T . Ако збирот на плоштините на триаголниците PDT и BCT е минимален, докажи дека $\overline{AP} = \overline{BD}$.

Решение. Според ознаките на цртежот триаголниците $\triangle BCT$ и $\triangle PDT$ се слични, па според тоа

$$a : x = y : (a - x), \text{ т.е. } y = \frac{a}{x}(a - x).$$

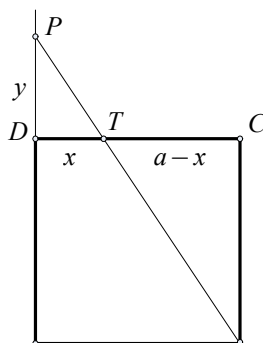
Но тогаш

$$\begin{aligned} P_{\triangle PDT} + P_{\triangle CBT} &= \frac{1}{2}[y(a - x) + ax] = \frac{1}{2}\left[\frac{a}{x}(a - x)^2 + ax\right] \\ &= \frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{x} + 2x - 2a\right) \stackrel{AG}{\geq} \frac{a}{2}(2\sqrt{2}a - 2a) \\ &= a(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

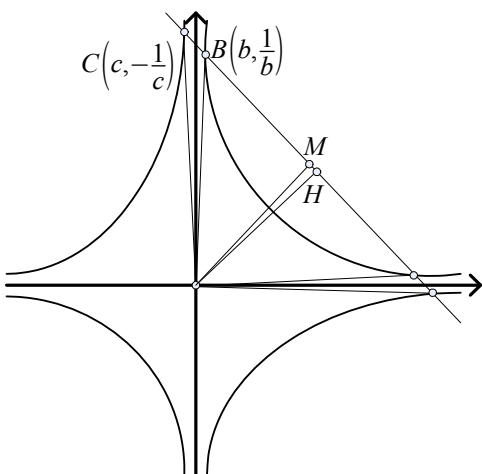
Максимум се достигнува ако $\frac{a^2}{x} = 2x$, т.е. $a = x\sqrt{2}$.

Тогаш $\overline{AP} = a + \frac{a}{x}(a - x) = 2x$ и $\overline{BD} = a\sqrt{2} = 2x$, т.е.

$$\overline{AP} = \overline{BD}.$$



IV година



298. Дадени се две хиперболи H_1 и H_2 со $y = \frac{1}{x}$ и $y = -\frac{1}{x}$ соодветно. Една права ја сече H_1 во точките A и B , а хиперболата H_2 во точките C и D . Нека O е координатниот почеток. Докажи дека триаголниците OAC и OBD имаат еднакви плоштини.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека распоредот на хиперболите, правите и точките се како на цртежот. Во спротивно со ротација на рамнината во кој ги правиме разгледувањата околу точката O за агол $k \cdot 90^\circ$ каде k е цел број се добива истата фигура,

освен можеби ако не треба да се изврши преозначување на објектите.

Нека $A(a, \frac{1}{a})$, $B(b, \frac{1}{b})$, $C(c, -\frac{1}{c})$ и $D(d, -\frac{1}{d})$. Да забележиме дека броевите a, b, c, d се попарно различни и $c < 0$, $d > a > b > 0$. Со l_{AB} и l_{CD} ќе ги означиме равенките на правите кои минуваат низ паровите точки A, B и C, D соодветно. Притоа:

$$l_{AB} : \frac{x-a}{b-a} = \frac{y-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}, \text{ т.е. } y = -\frac{1}{ab}x + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

$$l_{CD} : \frac{x-c}{d-c} = \frac{y+\frac{1}{c}}{-\frac{1}{d}+\frac{1}{c}}, \text{ т.е. } y = \frac{1}{cd}x - \frac{1}{d} - \frac{1}{c}.$$

Но, бидејќи $l = l_{AB} = l_{CD}$, ги добиваме равенствата $ab = -cd$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{d} - \frac{1}{c}$, т.е.

$$a + b = c + d. \quad (1)$$

Апсцисата на средната точка M на отсечката AB е еднаква на $x_M = \frac{a+b}{2}$, па заради равенствата (1) добиваме дека $x_M = \frac{c+d}{2}$, т.е. M е средна точка на отсечката CD . Но, тогаш, бидејќи A, B, C и D припаѓаат на иста права, добиваме

$$\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MC} = \overline{MD} + \overline{MB} = \overline{BD}.$$

Сега, бидејќи должините на висините на триаголниците OAC и OBD од темето O се еднакви, добиваме дека $P_{\Delta OAC} = P_{\Delta OBD}$, што требаше да се докаже.

299. Производот на осум последователни природни броеви не може да биде четврти степен на природен број. Докажи!

Решение. Нека x е најмалиот од осумте последователни природни броеви. Според тоа, броевите се $x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6, x+7$, а нивниот производ е

$$P = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)(x+7),$$

кој можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned} P &= [x(x+7)][(x+1)(x+6)][(x+2)(x+5)][(x+3)(x+4)] \\ &= (x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 12) \end{aligned}$$

Ако воведеме смена $a = x^2 + 7x + 6$, тогаш P можеме да го запишеме во облик

$$\begin{aligned} P &= (a-6)a(a+4)(a+6) = (a^2 - 36)(a^2 + 4a) \\ &= a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a = a^4 + 4a(a^2 - 9a - 36) \\ &= a^4 + 4a(a+3)(a-12). \end{aligned}$$

Од условот на задачата x е природен број така што $x \geq 1$, па според тоа $a = x^2 + 7x + 6 \geq 14$. Значи $a-12 > 0$, од каде добиваме дека $a^4 < P$. Од друга страна

$$P = a^4 + 4a^3 - 36a^2 - 144a < a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1 = (a+1)^4.$$

Од последните две неравенства добиваме дека $a^4 < P < (a+1)^4$, а тврдењето на задачата следува од тоа што a и $a+1$ се последователни природни броеви.

300. а) Множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ е разбиено (разделено) на две дисјунктни подмножества A и B . Докажи дека барем во едно од нив постојат три различни броја x, y и z такви што $x + y = z$.

б) Дали е точно тврдењето од задачата а) за множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Решение. а) Нека тврдењето на задачата не е исполнето. Значи множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ не може да се разбие на две дисјунктни подмножества за кој е исполнет условот на задачата.

Од условот $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ добиваме дека бројот 5 припаѓа на едно од множествата. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $5 \in A$. Аналогно, бројот 4 припаѓа на точно на едно од множествата A и B и бројот 6 припаѓа точно на едно од множествата A и B . Во зависност од броевите 4, 5 и 6 и направената претпоставка, ги имаме следните случаи.

Случај 1. $5 \in A, 4 \in A$. Тогаш $9 \in B$ и $1 \in B$. Според тоа $8 \in A$. Бидејќи $5, 8 \in A$ добиваме дека $3 \in B$. Но, од $1, 3 \in B$ добиваме $2 \in A$, а од $2, 4 \in A$ имаме $6 \in B$.

Значи во овој случај $1, 3, 6, 9 \in B$, што не е можно и е спротивно од претпоставката на доказот.

Случај 2. $5, 6 \in A, 4 \in B$. Од $5, 6 \in A$ добиваме дека $1 \in B$, а од $1, 4 \in B$ добиваме дека $3 \in A$. Но од $3, 5 \in A$ добиваме дека $8 \in B$. Сега, од $1, 8 \in B$ имаме $9 \in A$. Значи, $3, 5, 6, 9 \in A$, што е спротивно на претпоставката од доказот.

Случај 3. $5 \in A, 4, 6 \in B$. Од $4, 6 \in A$ добиваме дека $2 \in A$, а од $5, 2 \in A$ добиваме дека $3 \in B$. Но сега, од $3, 4 \in B$ имаме $7 \in A$. Значи, $2, 5, 7 \in A$ што е спротивно на претпоставката од доказот.

Конечно, во било кое разбивање на множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ на две дисјунктни подмножества A и B исполнет е условот од задачата.

б) Множеството $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ може да се разбие на дисјунктни подмножества $A = \{1, 2, 4, 8\}$ и $B = \{3, 5, 6, 7\}$ за кои не е исполнет условот од задачата од делот а).