Четврток, 16 април, 2015

Проблем 1.

Нека ΔABC е остоаголен триаголник, и нека D е подножје на висината спуштена од темето C. Симетралата на аголот $\angle ABC$ ја сече CD во точката E, а опишаната кружница ω околу триаголникот ΔADE повторно ја сече во точката F. Ако е $\angle ADF = 45^\circ$, докажи дека CF е тангента кон ω.

Проблем 2.

Домино е плочка со димензии 2×1 или 1×2. Определи на колку различни начини може да се поставaт точно n^2 домина, без преклопување, на шаховска табла со димензии $2n\times 2n$ така што секој негов 2×2 квадрат содржи најмалку две непокриени квадратчиња кои припаѓаат на иста редица или на иста колона.

Проблем 3.

Нека m и n се цели броеви поголеми од 1, и нека $a_1, a_2, ..., a_m$ се позитивни цели броеви кои не се поголеми од n^m. Докажи дека постојат позитивни цели броеви $b_1, b_2, ..., b_m$ кои не се поголеми од n, такви што

$$\text{НЗД}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_m + b_m) < n$$

(со $\text{НЗД}(x_1, x_2, ..., x_m)$ е означен најголемиот заеднички делител на броевите $x_1, x_2, ..., x_m$).

Language: Macedonian

Време за работа : 4 часа и 30 минути

Секој проблем се вреднува со 7 поени