

Седми тест

19.05.2017 година

1. На таблата е запишан природен број. Ако на таблата веќе е запишан бројот x , тогаш можеме да допишеме $2x+1$ или $\frac{x}{x+2}$. Докажи, дека ако во некој момент на таблата се појави бројот 2008, тогаш и првиот запишан број е 2008.
2. Отсечката BH е висина во рамнокракиот $\triangle ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$. Симетралата на страната BC ја сече правата AC во точката D и $\overline{DH} = \overline{HA} + \overline{AB}$. Определи ги можните вредности на $\angle BAC$.
3. Во компанијата Креативност работат научни работници. Во текот на осумчасовен работен ден тие ја посетуваат библиотеката (можно е и по неколку пати). Познато е дека за секој пар научници вкупното време во кое само еден од нив е во библиотеката не е помало од x часови ($x > 4$). Определи го најголемиот можен број на научни работници (во зависност од x)?
4. Нека $p(x)$ е квадратен полином, за кој $|p(x)| \leq 1$ за $x \in \{-1, 0, 1\}$. Докажи, дека $|p(x)| \leq \frac{5}{4}$ за секој $x \in [-1, 1]$.
5. Определи го најмалиот природен број k за кој равенката
$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 = 2007$$
има решение во множеството природни броеви.