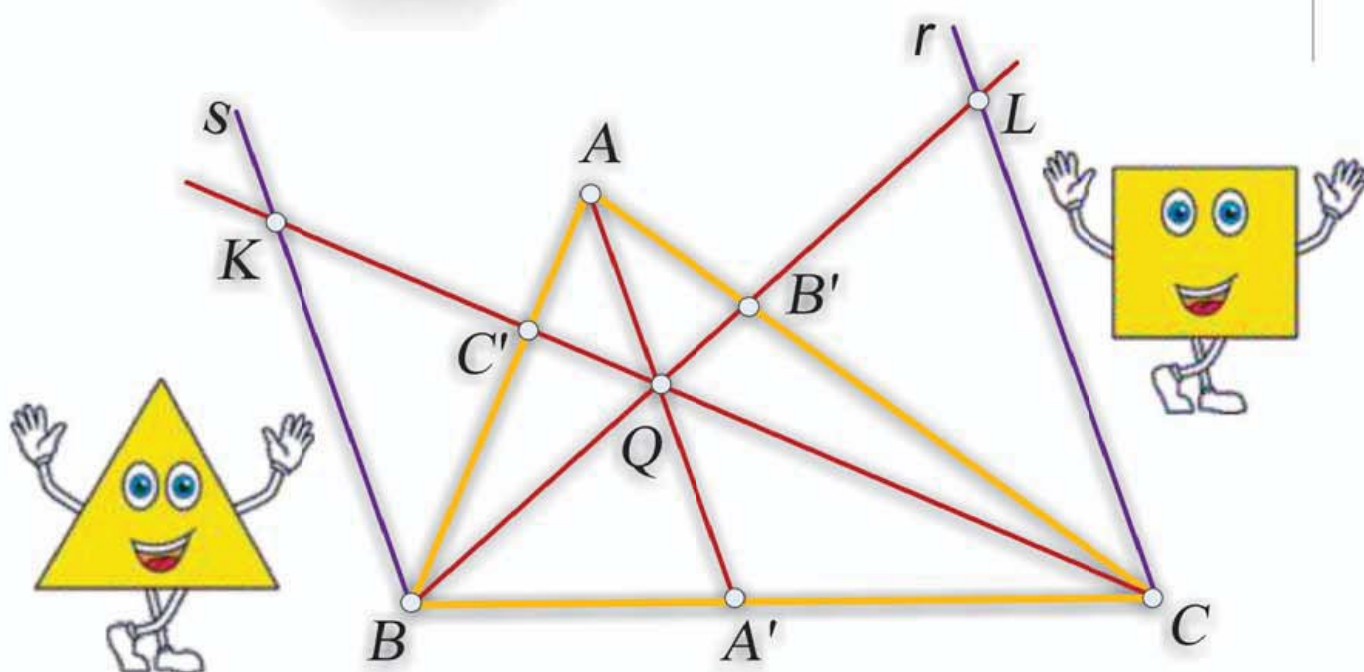


ПОПУЛАРНО МАТЕМАТИЧКО СПИСАНИЕ
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

НУМЕРУС



2015/2016

XLI 3

Математичко списание НУМЕРУС за учениците од основното образование.
Излегува во четири број од по 48 страници во текот на една учебна година.

Цената на еден примерок е 75 денари, а претплатата за четири броја е 300 денари. Претплатата и порачките можете да ги испратите на адреса: НУМЕРУС, Сојуз на математичари на Македонија, Бул. “Александар Македонски” бб, ПФ 10, Скопје, email numerus@t-home.mk, Нарачки по телефон и контакт од 9 до 15 часот на 02-311-6053, жиро сметка 3000000001276071, ЕДБ 4030991121596, депонент на Комерцијална банка АД, СМ на Македонија (со назнака за НУМЕРУС).

СОДРЖИНА

1. Иванова, А., Велинов, Д. Златен пресек, омилена пропорција на архитектите	1
2. Државен натпревар по математика 2015 година	6
3. VI и VII одделение КЕНГУР 2015	13
4. Математички олимписки времеплов	18
5. Малчески, С. Расекување и составување на геометрски фигури	22
6. Тврдоглаво равенство	24
7. Решенија на конкурсните задачи	26
8. Решенија на конкурсните задачи за математички натпревари	34
9. Решенија на наградните задачи	39
10. Гроздев, С. Три задачи за шаховска табла	41
11. Конкурсни задачи	43
12. Конкурсни задачи за математички натпревари	46
13. Наградни задачи	48
14. Ловечка приказна	48
15. Итар Пејо, Бај Гањо, Насрадин Оца и Еро	48

Редакциски одбор

д-р Ристо Малчески, главен и одговорен уредник
д-р Алекса Малчески, одговорен уредник
д-р Весна Манова Ераковиќ, одговорен уредник
д-р Слаѓана Браскоска, одговорен уредник
д-р Сава Гроздев, уредник
д-р Павел Димовски, уредник
д-р Мартин Шоптрајанов, уредник
д-р Даниел Велинов, уредник
д-р Катерина Аневска, уредник
д-р Анета Гацовска, уредник
д-р Методи Главче, уредник
д-р Зоран Трифунов, уредник
м-р Томи Димовски, уредник

д-р Бојан Праingosки, уредник
д-р Ѓорѓи Маркоски, уредник
д-р Ирена Стојковска, уредник
д-р Љупчо Настовски, уредник
д-р Валентина Миовска, уредник
д-р Сања Костадинова, уредник
д-р Зоран Мисајлевски, уредник
м-р Делчо Лешковски, уредник
м-р Петар Соколовски, уредник
м-р Слободан Филиповски, уредник
м-р Лимонка Лазарова, уредник
Јасмина Маркоска, уредник
Златко Петковски, уредник

Компјутерска обработка: Ристо Малчески и Алекса Малчески

СОПСТВЕНИК И ИЗДАВАЧ Е СОЈУЗОТ НА МАТЕМАТИЧАРИТЕ
НА МАКЕДОНИЈА

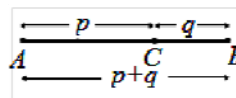
Печати: Ацетони, Прилеп

Ана Иванова, Скопје,
Даниел Велинов, Скопје

ЗЛАТЕН ПРЕСЕК, ОМИЛЕНА ПРОПОРЦИЈА НА АРХИТЕКТИТЕ

Математиката е јазик со кој Бог го напишал целиот универзум
Галилео Галилеј

Евклид за златниот пресек има кажано: “Да се подели отсечка во златен пресек значи да се подели во екстрем и среден однос.” Ова всушност значи да се подели отсечката на два дела така да односот на поголемиот дел со помалиот е еднаков на односот на поголемиот дел со целата отсечка. Ако поделбата е извршена како на цртежот, една отсечка е поделена во златен пресек ако важи $\frac{p}{q} = \frac{p+q}{p}$, односно важи

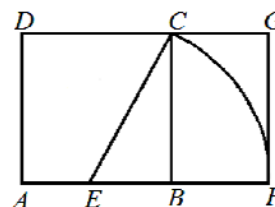


$p^2 = q(p+q)$. Последното равенство покажува дека поголемиот дел од отсечката поделена со златен пресек е геометриска средина од должината на помалиот дел и должината на целата отсечка. Нормално, прашање кое се поставува е: Како ако имаме дадено произволна отсечка, ќе ја поделиме отсечката во златен пресек? Одговорот ќе го дадеме во продолжение.

Нека ставиме $x = \frac{p}{q}$ во равенката $\frac{p}{q} = \frac{p+q}{p}$. Имаме, $\frac{p}{q} = x = \frac{p+q}{q} = 1 + \frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{x}$, односно добиваме $x^2 = x + 1$. Златниот пресек, кој најчесто се означува со ϕ е позитивното решение на оваа равенка и тоа изнесува $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803989\dots$. Другото решение на оваа равенка е $\beta = 1 - \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0,618\dots$ што овде нема да биде предмет на интерес.

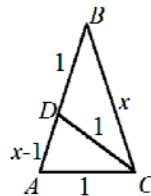
Ознаката ϕ е во чест на големиот грчки скулптор Phidias, кој многу често го користел златниот пресек кога проектирал згради како што се Parthenon и Propylaea на Acropolis во стара Атина. Phidias ја има создадено и статуата на Зевс на Олимп, која е едно од Светските чуда.

Проблемот да се конструира поделба на отсечка во златен пресек со линијар и шестар е едноставен. Да започнеме со квадрат со страна 1 (цртеж десно). Ја поврзуваме средината E на отсечката AB со темето C . Отсечката EC има должина $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Опишуваме кружница со центар во E и радиус $\overline{EC}$, која го сече продолжението на AB во точката F . Отсечката $\overline{AF}$ има должина $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$, златен пресек. Правоаголникот $AFGD$, чии страни се во однос $1 : \phi$ се нарекува златен правоаголник.



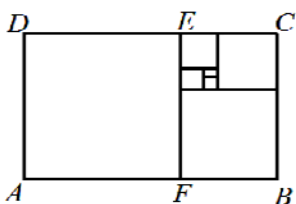
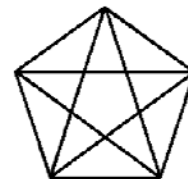
Ќе дадеме конструкција на рамнокрак триаголник со агол при основата кој е двапати поголем од аголот при врвот на триаголникот, односно рамнокрак триаголник со агли при основата 72° и агол при врвот 36° . Причината поради кој ова го правиме е да илустрираме дека оваа конструкција вклучува златен пресек.

Нека основата на рамнокракиот триаголник AC има должина 1 и нека краците BC и AB имаат должина x . Ако повлечеме симетрала во темето C , и пресекот на симетралата со кракот AB го означиме со D , добиваме триаголник ADC кој е сличен со триаголникот ABC . Од нивната сличност следува дека $x:1=1:(x-1)$, односно $x^2=x+1$. Оттука добиваме дека одно-



сот на кракот спрема основата на рамнокракиот триаголник ABC е ϕ - златен пресек. Овој триаголник се нарекува тенок златен триаголник. Во рамнокракиот триаголник CDB односот на основата со кракот е златен пресек. Овој триаголник го нарекуваме дебел златен триаголник. Тенкиот златен триаголник има агол при основата 72° , додека дебелиот златен триаголник има агол при врвот 36° (зошто?).

Ако ги повлечеме дијагоналите на правилен пентагонал, добиваме фигура, која се нарекува пентаграм. Во пентаграмот има многу златни пресеци. Ако страната на пентагоналот е 1, тогаш во пентаграмот има 3 отсечки со должина ϕ^{-2} , 10 отсечки со должина ϕ^{-1} , 15 отсечки со должина 1 и 5 отсечки со должина ϕ (цртеж десно).



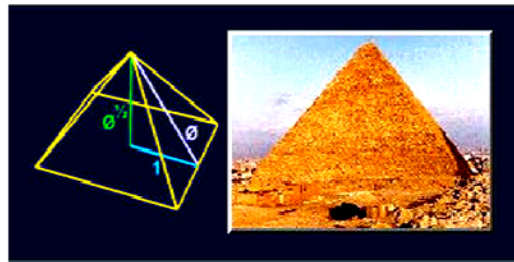
На цртежот лево е покажано како златен правоаголник може последователно да се дели на помали златни правоаголници.

Во продолжение ќе биде покажано и наведено каде се појавува златниот пресек во природата, во архитектурата и во дизајнот.

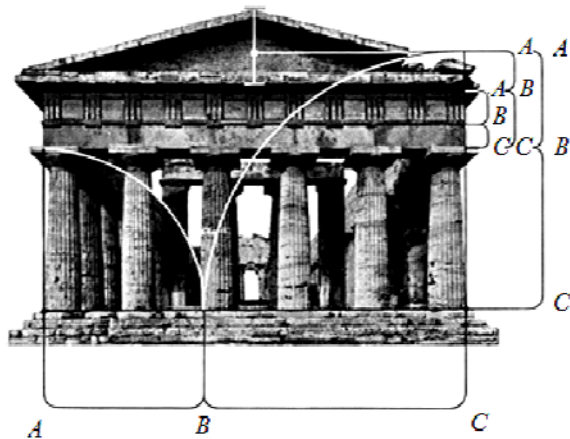
Во текот на вековите, истражувани се најдобрите пропорциски односи за градбите, а притоа ниту еден дел од градбата да не се измени. Во архитектонските композиции се истражувани ефекти како контраст помеѓу полното (сидот) и празното (столбовите пред сидот), а за постигнување на хармонија истражувана е рамнотежа меѓу столбот и тежината кој паѓа врз него. Целата античка архитектура се темели врз овие композициски принципи. Земајќи го модулот (долниот полупречник на столбот) како релативна мерка за пропорционирање, во антиката архитектурата ја сфатиле како наука за броевите. Со ова можеме да ја објасниме грижата на античките архитекти за единственост и јасност на градбата. Архитектонскиот израз на грчкиот храм е сведен на достоинственост, убавина или раскош, на кои одговараат дорскиот, јонскиот и коринтскиот стил.

За разлика од грчката архитектура, египетската и месопотамската архитектура се монументални. Во споредба со нив грчката архитектура е со помали димензии, блиски со човечките. Имено, кај грчката архитектура по правило монументалноста на објектите не е гледана во големината туку во начинот на одредување на рамнотежа помеѓу главните архитектонски елементи, во ритмот на вертикалите, во пропорциските односи и во складноста со природниот елемент.

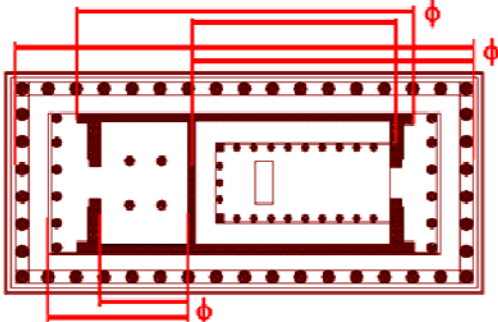
Овие архитекти сметале дека градбите имаат исклучителен изглед ако димензиите им се одредувани по златен пресек. Дури се верувало и дека ако се изградени по принципот на златен пресек ќе имаат магични моќи. Златниот пресек се сметал за совршена пропорција или Божествена пропорција. Познати објекти кои се градени по овој принцип се: Египетските пирамиди, Партенон во Атина – дело на познатите архитекти Ихтинос и Каликратес и скулпторот Фидиј (споменат погоре), скулптури во Акропол дело на Фидиј, Таџ Махал во Индија, црквата Нотр Дам во Париз, Ајфеловата кула во Париз и многу други.



Египетска пирамида



Златните пресеци на храмот Партенон

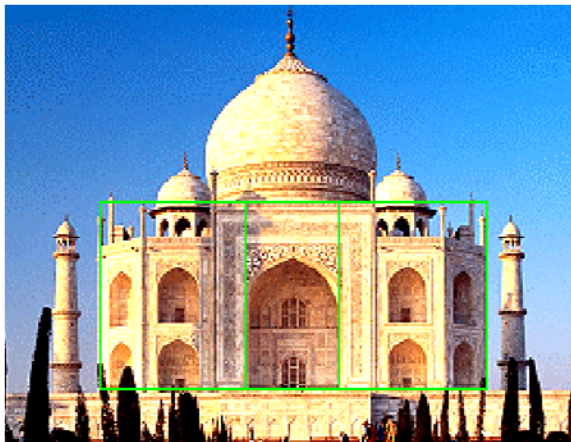


Златните пресеци на основата на Партенон

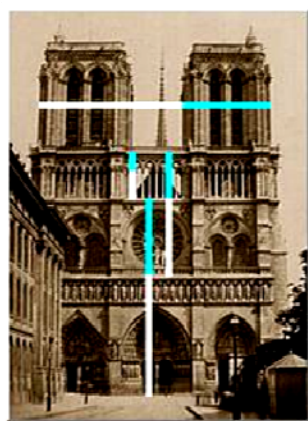
Малку подетално ќе се задржиме на Партенон поставен на Атинската Акропола, изграден 447 – 434 г. пне. Неговиот модул изнесува 95 см, висината на стереобатот (подножјето на столбот) е 160 см, столбот е 1031 см, димензијата на гредата е 330 см и на тимпанот (на претходниот цртеж триаголниот кров) е 450 см. Вкупната висина на објектот е 1971 см. Партенон е еден

од најголемите грчки храмови кој е изграден во совршени пропорции, што може да се види и од пропорциите на неговата основа (види цртеж лево).

Секако, една од најубавите и воедно најмонументалните градби во поновата историја е Таџ Махал (цртеж десно). Таџ Махал е изграден помеѓу 1631 – 1654 год. Требало да претставува најголема и најубава гробница во целиот свет. Неговата висина изнесува 75 m, а димензиите на целиот комплекс се 300 m на 560 m. Целата градба е изработена од бел мермер.



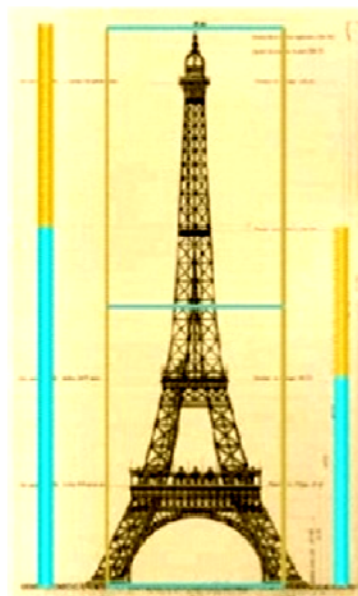
На цртежите десно се дадени изгледите на црквата Нотр Дам во Париз и на Ајфеловата кула, при што се означени пропорциите кои се во златен пресек.



Црквата Нотр Дам во Париз

Во претходните разгледувања рековме дека пропорцијата на златен пресек, која уште се нарекува и божествена пропорција се јавува и во уметноста и во природата.

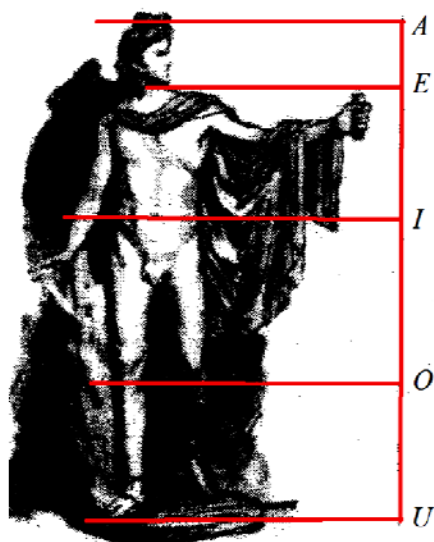
Така, на пример, познатото ремек дело Мона Лиза на Леонардо да Винчи (види слика) во основата на својата конструкција го има тенкиот златен триаголник.



Ајфеловата кула во Париз

Друг карактеристичен пример од уметноста е кипот на Аполон, кој се смета за симбол на убавина на машкото тело, а чии пропорции се поврзани со златниот пресек. Имено, линијата I ја дели целата фигура на Аполон на два дела за кои важи $\overline{AU} : \overline{UI} = \overline{UI} : \overline{AI}$, т.е. повторно имаме поделба според правилото на златниот пресек, која поделба ја имаме и со линијата O која ја означува поделбата на нозете кај колената (види слика). Вакви и слични примери можат да се видат и

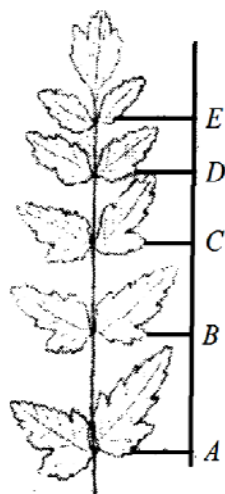
во делата на многу други уметници, од кои како што рековме се делата на Фидиј Тициј.



Рековме дека златниот пресек често пати се јавува и во природата. Имено, кај растенијата може да се забележи поделба според златен пресек. Навистина, ако земеме едно гранче можеме да забележиме дека кај три последователни парови листови средниот пар го дели растојанието меѓу крајните два пара во златен пресек, односно

$$\overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{BC}; \quad \overline{BD} : \overline{BC} = \overline{BC} : \overline{CD}; \quad \overline{CE} : \overline{CD} = \overline{CD} : \overline{DE}.$$

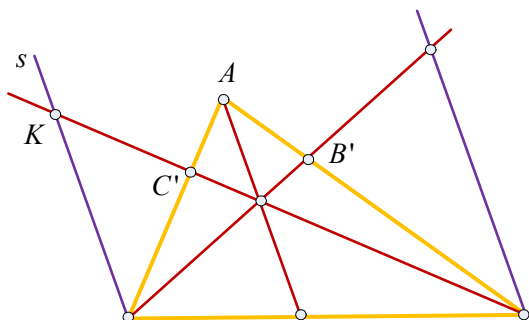
Кога сме кај распоредот на листовите на растенијата, да забележиме дека лај некои растенија тој е поврзан со низата на Фибоначиеви броеви, со која непосредно е поврзан и златниот пресек, но за тоа ќе говориме во некоја друга пригода.



Литература

1. C. Falbo, The golden ratio-a contrary viewpoint, The College Mathematics Journal, 36, No.2, 123-134, 2005
2. H. S. M. Coxeter, Introduction to Geometry, John Wiley & Sons, New York, NY, 1969
3. M. Livio, The Golden ratio, Broadway Books, New York, NY, 2002
4. N. J. Rose, The golden mean and Fibonacci numbers, 2004
5. Р. Малчески, А. Малчески, За златниот пресек, Нумерус Vol. XXI, No. 1, Скопје, 1995

ТЕОРЕМА НА ВАН ОБЕЛ



Ако A', B', C' се соодветно точки на страните BC, CA, AB на триаголникот ABC такви што правите AA', BB', CC' се сечат во точката Q , тогаш

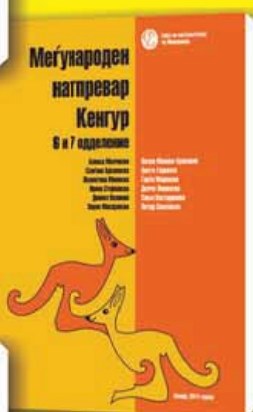
$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QA'}} = \frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}} + \frac{\overline{AB'}}{\overline{B'C}}.$$

ОД КАЛЕНДАРОТ НА НАТПРЕВАРИ ВО ОРГАНИЗАЦИЈА НА СММ

- Општински натпревар по математика за учениците од основното образование, 27.02.2016
- Регионален натпревар по математика за учениците од основното образование, 02.04.2016
- Државен натпревар по математика за учениците од основното образование, 07.05.2016
- Јуниорска Македонска Математичка Олимпијада, 28.05.2016

МАЃУНАРОДНИ НАТПРЕВАРИ ПО МАТЕМАТИКА

- Јуниорска Балканска Математичка Олимпијада, Република Романија, втора половина на месец јуни
- Балканска Математичка олимпијада, 05.05.-10.05.2016 година, Тирана Република Албанија
- Медитеранска математичка олимпијада, 06.05.2016 година
- Меѓународна Математичка Олимпијада, ИМО 2016, Хонг-Конг, 06.06.-16.06.2016 година
- ЕГМО, Република Романија, Буштени, 10.04.-16.04.2016 година



**Посетувајте ја
постојаната
изложба на
книги на
страната на
Сојузот на
математичари на
Македонија
www.smm.com.mk**

