

Десетти тест

25.05.2017 година

1. Дадена е низа $\{x_n\}$ таква што $x_1 \in \{5, 7\}$ и $x_{n+1} \in \{5^{x_n}, 7^{x_n}\}$, за $n=1, 2, \dots$. Определи ги можните вредности на последните две цифри на x_{2009} .
2. Даден е природен број $n \geq 3$. Определи го најмалиот природен број k за кој постои множество A од k реални броеви и n различни броеви $x_1, x_2, \dots, x_n$ за кои броевите
$$x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1$$
се од A .
3. Меѓу 9^k на изглед исти монети една е полесна од останатите. Дадени се три ваги без тегови, едната од кои е неисправна (при секое мерење таа може случајно да биде како точна, така и неточна). Како може со најмногу $3k+1$ мерења да се определи неисправната монета?
4. Даден е трапез $ABCD$ ($AB \parallel CD$) со заемно нормални дијагонали и пресечна точка на дијагоналите O . На основата AB е избрана точка M . Опишаните кружници околу $\triangle AMO$ и $\triangle BMO$ по втор пат ги сечат отсечките AD и BC во точките P и Q , соодветно. Докажи, дека центарот на опишаната кружница околу $\triangle MPQ$ лежи на средната линија на трапезот $ABCD$.
5. Во секое единечно поле на квадрат со димензии 100×100 е запишан цел број. За правоаголникот составен од единечни полиња на квадратот ќе велиме дека е добар ако збирот на броевите запишани во него е делив со 17. Дозволено е истовремено да се обојат сите единечни полиња во добар правоаголник, но не смее едно поле да се бои двапати. Определи го најголемиот број на единечни полиња кои може да се обојат при произволни запишани цели броеви.