УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ” – СКОПЈЕ
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Боро М. Пиперевски

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА
II

Скопје 2004

Г Л А В А   П Р В А

ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ НА РЕАЛНА ФУНКЦИЈА ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

§1. НЕОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Во многу проблеми од разни области на науката, како и во примената, се среќаваме со непрекинати процеси чие опишување всушност довело и до дефинирање на математички операции. Така, на пример, ако е позната равенката на движење на едно тело, т.е. законот на промената на патот во зависност од промената на времето $s = s(t)$, тогаш со операцијата диференцирање се наоѓа законот на брзината на движењето на тоа тело во зависност од промената на времето $v(t) = \frac{ds}{dt}$. Ако пак се постави обратниот проблем, т.е. ако е позната брзината $v(t)$, а се бара патот $s(t)$, се доаѓа до поимот за нова операција во математиката, спротивна на операцијата диференцирање.

1.1. Поимите примитивна функција и неопределен интеграл

***Дефиниција* 1.1.** Нека е дадена функција f, дефинирана на $[a, b]$. Диференцијабилната функција F велиме дека е примитивна функција на функцијата f на $[a, b]$ ако на тој сегмент функцијата f е нејзина изводна функција или, што е исто, ако на тој сегмент изразот $f(x)dx$ е нејзин диференцијал при што $F'_+(a) = f(a)$, $F'_-(b) = f(b)$. Значи, $F'(x) = f(x)$, односно $dF(x) = f(x)dx$, $\forall x \in [a,b]$.

Очигледно е дека барањето примитивна функција за дадена функција како операција е спротивно на операцијата барање изводна функција, односно на операцијата диференцирање. Оваа нова операција се вика интегрирање.

Бидејќи $\dfrac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x)$ (C е константа, $C \in \mathrm{R}$), забележуваме дека ако F е примитивна функција на функцијата f на сегментот $[a, b]$, тогаш и $F(x) + C$ исто така е примитивна функција на f на истиот сегмент.

Нека F е една примитивна функција на функцијата f на сегментот $[a, b]$. Ќе покажеме дека со множеството

$$\{F(x) + C \mid C \in \mathrm{R}\}$$

се дадени сите примитивни функции. Дефинираме нова функција $G(x) = \Phi(x) - F(x)$, $x \in [a, b]$, каде што Φ е која било друга примитивна функција на функцијата f на сегментот $[a, b]$. Бидејќи $G'(x) = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$, како последица на теоремата на Лагранж се добива $G(x) = C$, каде што C е константа, $C \in \mathrm{R}$, $C = \Phi(a) - F(a)$, од каде $\Phi(x) = F(x) + C$, $\forall x \in [a, b]$.

Според тоа, од произволноста на изборот на примитивната функција Φ можеме да заклучиме дека е доволно за дадена функција f да се најде само една примитивна функција. Геометриски гледано, тоа е фамилија интегрални криви поместени за константа во насока на оската y.

***Дефиниција* 1.2.** Нека е дадена функција f дефинирана на сегментот $[a, b]$. Под неопределен интеграл на функцијата f на сегментот $[a, b]$ се подразбира множеството од сите нејзини примитивни функции и се означува со $\int f(x)dx$, каде што f е подинтегрална функција, $f(x)dx$ подинтегрален израз, x подинтегрална променлива, а $[a, b]$ сегмент на интергација.

***Пример* 1.1.** Ако $f(x) = 3x^2$, $x \in R$, тогаш $\int 3x^2 dx = x^3 + C$, C е константа, при што равенството се подразбира како равенство на множества.

Поимите примитивна функција и неопределен интеграл можат да се дефинираат на (a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, како и на други множества со соодветни модификации.

Досега не го поставивме прашањето за класата на функциите f, за кои постои примитивна функција. Без доказ ќе наведеме дека за сите непрекинати функции на некое множество постојат примитивни функции, т.е. сите непрекинати функции се интеграбилни на тоа множество. Класата интеграбилни функции сепак е поголема, бидејќи постојат функции кои имаат прекин во некои точки од разгледуваното множество, а сепак се исто така интеграбилни.

Друго е прашањето дали може да се најде аналитички израз (формула) за множество примитивни функции. Имено, постојат дури и елементарни функции за кои не може да се најде аналитички израз (формула) за соодветно множество примитивни функции, на пример за функциите e^{-x^2}, $\dfrac{\sin x}{x}$, $\dfrac{1}{\ln x}$, $\sin x^2$ и други. Во литературата се познати и следните интеграли:

$$\mathrm{Li}x = \int \frac{dx}{\ln x},\ x > 0,\ x \neq 1, \qquad \mathrm{Si}x = \int \frac{\sin x}{x}\,dx\,,\ x \neq 0,$$

наречени интегрален логаритам и интегрален синус. Овие примитивни функции, кои сигурно постојат бидејќи соодветните подинтегрални функции се непрекинати функции, се нови функции дефинирани со операцијата интегрирање (интегрална презентација), наречени трансцедентни функции. Во оваа класа спаѓаат и неелементарните функции дефинирани со $\int e^{-x^2}dx, \int \sin x^2 dx$, како и нерешливи интеграли од ирационални функции

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,,\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\,,\ \ 0 < k < 1,$$

познати како елиптички интеграли од прв и втор ред. Во тие случаи примитивните функции се специјални функции дефинирани во интегрална форма и според тоа може да се заклучи дека со процесот интегрирање се дефинира и нова класа функции. Да забележиме дека е многу важен и интервалот каде што постојат или не постојат примитивни функции.

Наоѓањето неопределен интеграл е сврзано со поголеми тешкотии во споредба со наоѓањето на изводна функција. Решавањето на неопределен интеграл, односно интегрирањето, се врши врз основа на табелата на интеграли добиена од табелата на изводи од елементарни функции, особините на неопределените интеграли и двата метода – методот на замена и методот на парцијална интеграција, со соодветни комбинации.

Табела на елеменӣарни инӣеграли

1. $\int 0\cdot dx = C, \quad \int 1\cdot dx = x + C,$
2. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \ (\alpha \neq -1,\ \alpha\in\mathrm{R}),$
3. $\int \dfrac{dx}{x}\cdot dx = \ln|x| + C, (x \neq 0),$
4. $\int e^{x}\cdot dx = e^{x} + C,$
5. $\int a^{x}\cdot dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C, (a > 0,\ a \neq 1),$
6. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C,$
7. $\int \cos x\, dx = \sin x + C,$
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C, (x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k\in\mathrm{Z}),$
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C, (x \neq k\pi,\ k\in\mathrm{Z}),$
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + C, (|x| > 1),$
11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C,$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, (|x| < 1),$
13. $\int \mathrm{sh}x dx = \mathrm{ch}x + C,$
14. $\int \mathrm{ch}x dx = \mathrm{sh}x + C,$
15. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C,$
16. $\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{cth}x + C, (x \neq 0),$
17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C,$
18. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C, \ (|x| \neq 1),$

Од самата дефиниција на неопределен интеграл непосредно следуваат следните особини:

***Особина* 1.1.** Нека f и F' се интеграбилни функции на сегментот $[a, b]$. Тогаш важат равенствата:

1^0 $\frac{d}{dx}[\int f(x)dx] = f(x)$.

2^0 $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$.

3^0 $\int F'(x)dx = F(x) + C$.

4^0 $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x) + C$.

***Особина* 1.2.** Нека се дадени функции f и g. Ако функциите f и g се интеграбилни на исто множество, тогаш и функциите Kf (K е константа), $f + g$, $f - g$ се интеграбилни на истото множество и важат равенствата:

1^0 $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$,

2^0 $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

За конкретно пресметување на неопределените интеграли овие равенства лесно се докажуваат и обопштуваат.

***Пример* 1.2.** $\int 2x^{10}\, dx = 2\int x^{10}dx = 2\frac{x^{11}}{11} + C$.

***Пример* 1.3.** $\int 4e^x\, dx = 4\int e^x\, dx = 4\, e^x + C$.

***Пример* 1.4.** $\int (x^3 - e^x)dx = \int x^3\, dx - \int e^x\, dx = \frac{x^4}{4} - e^x + C$.

1.2. Метод на замена и метод на парцијална интеграција

Решавањето на интегралот $\int f(x)dx$ може да се упрости заменувајќи ја подинтегралната променлива x со нова променлива t.

Нека е даден интегралот $\int f(x)dx$, каде функцијата f е интеграбилна на $[a, b]$ и нека е дадена функција φ дефинирана на $[\alpha, \beta]$. Ако функцијата f е непрекината на сегментот $[a, b]$ и ако $x = \varphi(t)$, каде што функцијата φ и нејзината изводна функција се непрекинати на (α, β), при што $a < \varphi(t) < b$ и $\varphi'(t) \neq 0$ за $\forall t \in (\alpha, \beta)$, тогаш важи равенството:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \Big|\, t = \varphi^{-1}(x) .$$

Навистина, нека со F е означена подинтегралната функција на ново добиениот интеграл, т.е. $F(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, и нека по неговото решавање се добие примитивната функција $G(t)$, при што $G'(t) = F(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$. Тогаш:

$$\frac{d}{dx}(G o \varphi^{-1})(x) = [\frac{d}{dt}G(t)]\frac{d}{dx}[\varphi^{-1}(x)] = G'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = F(t)\ \frac{1}{\varphi'(t)} =$$

$$f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x),$$

со што се покажа дека сложената функција $G o \varphi^{-1}$ е една примитивна функција на f. Со замената $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ се добива бараното равенство.

Изборот на функцијата φ е битен, бидејќи може да се добие и потешко решлив или нерешлив интеграл. По решавањето на новиот интеграл од десната страна, односно наоѓање на множество примитивни функции, битно е да се вратиме на променливата x со $t = \varphi^{-1}(x)$ во така добиените примитивни функции.

Овој начин на решавање неопределен интеграл се вика метод на замена.

***Пример* 1.5.** За интегралот $\int (x + 4)^6 dx$ со замена $x + 4 = t$, $dx = dt$, се добива $\int t^6 dt = \frac{t^7}{7} + C$ и $\int (x + 4)^6 dx = \frac{(x+4)^7}{7} + C$.

***Пример* 1.6.** За интегралот $\int (4x+5)^3 dx$ замената е дефинирана со $4x+5=t$, $dx=\frac{dt}{4}$ и $\int (4x+5)^3 dx = \frac{(4x+5)^4}{16} + C$.

***Пример* 1.7.** Покажи дека $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, каде што $F'(x)=f(x)$ (замена $ax+b=t$).

***Пример* 1.8.** Реши го интегралот $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$, $|x|\le 1$.

Со замената $x=\sin t$, $dx=\cos t dt$ (за $|t|\le \frac{\pi}{2}$, $t=\arcsin x$), се добива

$$\int \sqrt{1-x^2}\; dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + C =$$

$$\frac{1}{2}\,[\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\,] + C.$$

Кај неопределените интеграли многу е битен фактот дека секоја примитивна функција е диференцијабилна, а со тоа и непрекината на интервалот на кој се разгледува. Веќе кај некои примери забележавме дека е битен и интервалот на интеграција.

***Пример* 1.9.** Реши го интегралот $I=\int e^{-|x|}dx$.

Решение: За $x\ge 0$, $I=-e^{-x}+C_2$, а за $x<0$, $I=e^x+C_1$. Бидејќи сите примитивни функции треба да се непрекинати на R, од непрекинатоста во точката $x=0$ добиваме $e^0+C_1=-e^0+C_2$, односно $C_2=2+C_1$. Според тоа, за $x\ge 0$, $I=-e^{-x}+2+C$, а за $x<0$, $I=e^x+C$, каде што $C_1=C$. Нацртај график на примитивна функција за $C=-2$.

***Пример* 1.10.** $\int \frac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}dx$ = ? Со замена $2^x+2^{-x}=t$ ($t>0$) се добива $I=\frac{1}{\ln 2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{\ln 2}[\ln(2^x+2^{-x})]+C$.

***Пример* 1.11.** $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{e^x+1}}$ = ? Со замена $e^x+1=t^2$, $e^x dx = 2t dt$ се добива $I=2\int(t^2-1)dt = \frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}+C$.

***Пример* 1.12.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = ?$

Со замена $x = a\text{sh}t$ се добива $I = \int dt = t + C$. Од формулата $x = a\frac{e^t - e^{-t}}{2}$ се добива $t = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) - \ln a$ (искористено $e^t > 0$) и според тоа $I = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C$.

***Пример* 1.13.** $\int \sin^2 x \cos^5 x dx = ?$

Со замена $\sin x = t$ се добива

$$I = \int (t^2 - 2t^4 + t^6)dt = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{2}{5}\sin^5 x + \frac{1}{7}\sin^7 x + C.$$

***Пример* 1.14.** $\int \frac{\cos x dx}{4+\sin^2 x} = ?$

Со замена $\sin x = t$ се добива $I = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2}\text{arctg}(\frac{\sin x}{2}) + C$.

***Пример* 1.15.** Најди $\int \sin^{2n+1} x dx = \int (1-\cos^2 x)^n \sin x dx$.

Со замена $u = \cos t$, $du = -\sin t dt$ се добива

$$I = -\int (1-u^2)^n du = -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \int u^{2k} du =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{2k+1} \cos^{2k+1} x + C.$$

***Пример* 1.16.** $\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$.

***Пример* 1.17.** $\int \text{tg}^5 x dx = ?$

Со замена $\cos x = t$, $dt = -\sin x dx$ се добива:

$$I = \int \frac{(1-t^2)^2(-dt)}{t^5} = \frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{4}{\cos^2 x} - \ln(\cos x) + C, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Во решавањето на неопределени интеграли од тригонометриски функции најчесто се употребуваат следните тригономериски формули:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

$$\sin\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\,[\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x],$$

$$\cos\alpha x \cos\beta x = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha+\beta)x + \cos(\alpha-\beta)x],$$

$$\sin\alpha x \sin\beta x = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x],$$

Нека се дадени две функции f и g дефинирани на некој сегмент $[a, b]$. Ако f и g се диференцијабилни функции на (a, b) и $f(x)g'(x)$ е интеграбилна функција на $[a, b]$, тогаш $f'(x)g(x)$ е интеграбилна функција на $[a, b]$ и важи равенството

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$

За да се докаже тоа равенство, се тргнува од равенството

$$d[f(x)g(x)] = g(x)df(x) + f(x)dg(x),$$

од кое се добива

$$f(x)dg(x) = d[f(x)g(x)] - g(x)df(x).$$

За изразот $d[f(x)g(x)]$ една примитивна функција е $f(x)g(x)$, од која со интегрирање на последното равенство и користење на особината 1.1 и особината 1.2 се добива бараната релација.

Овој начин на решавање неопределен интеграл се вика метод на парцијална интеграција, кој се употребува во случај кога при соодветен избор на функции f и g интегралот од десната страна на равенството полесно се решава од интегралот од левата страна.

Ако за двете функции f и g ги употребиме ознаките $u(x)$ и $v(x)$, односно u и v, тогаш равенството е

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx,$$

или поедноставно напишано $\int udv = uv - \int vdu$.

Да забележиме дека многу е битен изборот на функциите u и v на кои се разложува самата подинтегрална функција на интегралот кој треба да се реши.

***Пример* 1.18.** $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$, при што $u = \ln x$, $dv = dx$.

***Пример* 1.19.** Најди ја рекурентната формула за интегралот $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} dx$.

Решение: Со парцијална интеграција $u = \frac{1}{(x^2+a^2)^n}$, $dv = dx$, $du = \frac{-2nx}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx$, $v = x$, се добива:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} +$$
$$+ 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1}).$$

Значи, $I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1})$, од каде се добива рекурентна формула $I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} I_n$.

Конкретно, $I_2 = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$.

***Пример* 1.20.** $\int (2 - 3x)\cos x dx$ = ? Со изборот $u = 2 - 3x$, $dv = \cos x dx$, се добива:

$$I = (2 - 3x)\sin x + 3\int \sin x dx = (2 - 3x)\sin x - 3\cos x + C.$$

***Пример* 1.21.** $\int \sqrt{a^2-x^2} dx$ = ? Со $u = \sqrt{a^2-x^2}$, $dv = dx$, и со некои трансформации се добива

$$I = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} + \int \frac{a^2-(a^2-x^2)dx}{\sqrt{a^2-x^2}} =$$
$$x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - \int \sqrt{a^2-x^2} dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - I,$$

од каде $I = \frac{1}{2}[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}] + C$.

***Пример* 1.22.** $\int x^2 2^x dx$ = ? Со две последователни парцијални интеграции $u = x^2$, $dv = 2^x dx$ и $u = x$, $dv = 2^x dx$, се добива:

$$I = x^2 \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}\int x 2^x dx = x^2 \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2}{\ln 2}(x\frac{2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln^2 2}) + C.$$

***Пример* 1.23.** $\int \cos(\ln x)dx$ = ? Со две последователни парцијални интеграции $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx$ и $u = \sin(\ln x)$, $dv = dx$, се добива:

$$I = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - I, \text{ од каде } I = \frac{x}{2}[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$$

***Пример* 1.24.** $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$ = ? Со две последователни парцијални интеграции $u = e^{\alpha x}$, $dv = \cos\beta x dx$ и $u = e^{\alpha x}$, $dv = \sin\beta x dx$, се добива $I = \frac{1}{\beta} e^{\alpha x}\sin\beta x + \frac{\alpha}{\beta^2} e^{\alpha x}\cos\beta x - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I$. Значи:

$$I = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}[\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x] + C.$$

Аналогно може да се покаже дека

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x) + C.$$

1.3. Интегрирање на рационални функции

Една од класите на функции кои можат секогаш да се интегрираат е класата рационални функции. Овде ќе искажеме без доказ неколку фундаментални теореми од алгебрата.

***Теорема* 1.1.** Секој полином $P_n(x)$ може на единствен начин да се претстави како производ од множители од вид $(x - a)^k$ и $(x^2 + px + q)^s$, каде што $p^2 - 4q < 0$, $a, p, q \in \mathrm{R}$, $k, s \in \mathrm{N}$.

***Дефиниција* 1.3.** За рационалната функција $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, каде што $P_n(x)$, $Q_m(x)$ се полиноми од степени n и m соодветно, велиме дека е правилна ако $n < m$.

***Теорема* 1.2.** Ако $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ е произволна рационална функција која не е правилна ($n \geq m$), тогаш на единствен начин може да се запише како збир од полином и правилна рационална функција, т.е. $R(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T_{n-m}(x) + \dfrac{P_k(x)}{Q_m(x)}$, $k < m$.

Полиномот $T_{n-m}(x)$ се добива со постапката делење на полиномот $P_n(x)$ со полиномот $Q_m(x)$.

***Пример* 1.25.** За рационалната функција $\dfrac{x^5+1}{x^2+x-2}$ со постапката делење се добива $\dfrac{x^5+1}{x^2+x-2} = x^3 - x^2 + 3x - 5 + \dfrac{11x-9}{x^2+x-2}$.

***Дефиниција* 1.4.** Елементарни рационални функции се правилните рационални функции од следните два вида:

$$\text{(I)}\quad \frac{A}{(x-a)^k}\,, \qquad\qquad \text{(II)}\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}\,,\ p^2-4q<0,$$

$k, s \in \mathrm{N}$; $A, a, M, N \in \mathrm{R}$.

Елементарните рационални функции од видот (I) се интегрираат со замена на следниот начин:

За $k = 1$ се добива: $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)}dx = A\ln|x-a| + C$.

Нека $k > 1$. Тогаш $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{-A}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$.

За интегрирање на елементарните рационални функции од видот (II) се применува замената $x + \dfrac{p}{2} = t$. Притоа се добива $dx = dt$, $x^2 + px + q = t^2 + a^2$, каде што $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$ (> 0 според условот).

За $s = 1$ се добива:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mt + N - \frac{pM}{2}}{t^2+a^2}dt = \frac{M}{2}\int \frac{2t}{t^2+a^2}dt +$$

$$(N - \frac{pM}{2})\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a}\,(N - \frac{pM}{2})\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C =$$

$$\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q\ )+\ \frac{1}{a}\ (N-\frac{pM}{2})\,\mathrm{arctg}\frac{2x+p}{2a}+C,$$

Нека $s > 1$. Тогаш

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^s}dx = \int\frac{Mt+N-\frac{pM}{2}}{(t^2+a^2)^s}dt = \frac{M}{2}\int\frac{2t}{(t^2+a^2)^s}dt +$$

$$+(N-\frac{pM}{2})\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^s}.$$

Првиот интеграл се решава со нова замена $t^2 + a^2 = z$, додека за вториот интеграл се применува рекурентната формула од пример 1.19.

Повторно да забележиме дека по решавањето на неопределените интеграли задолжително преку замените се враќаме на променливата x .

***Теорема* 1.3.** Секоја правилна рационална функција на единствен начин може да се претстави како сума од конечен број елементарни рационални функции. Притоа на секој множител од видот $(x - a)^k$, $a \in$ R, $k \in$ N, од полиномот во именителот на рационалната функција му одговара збирот од k елементарни рационални функции од видот (I):

$$\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+...+\frac{A_k}{(x-a)^k},$$

а на секој множител од видот $(x^2 + px + q)^s$, каде што $p, q \in$ R, $s \in$ N, $p^2 - 4q < 0$, од полиномот во именителот на рационалната функција му одговара збирот од s елементарни рационални функции од видот (II):

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+...+\frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s},$$

каде што $A_1, A_2,..., A_k, M_1, M_2,..., M_s, N_1, N_2,..., N_s$ се реални коефициенти кои се наоѓаат со методот на неопределени коефициенти.

Методот на неопределени коефициенти се состои од изедначување на полиномот во броителот на правилната рационална функција со полиномот добиен во броителот од рационалната функција по сведувањето на заеднички именител на збирот од елементарните рационални функции. Потоа со изедначување на коефициентите пред соодветните степени од двата полинома и со решавање на така добиениот линеарен систем равенки се добиваат бараните коефициенти.

Според тоа, интегрирањето рационални функции се сведува на интегрирање елементарни рационални функции.

***Пример* 1.26.** Реши го интегралот $\int \frac{(x+2)dx}{x^2-2x-3}$.

Решение:

$$\frac{x+2}{x^2-2x-3} = \frac{x+2}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{(A+B)x-3A+B}{(x+1)(x-3)},$$

од каде се добива

$x + 2 = (A + B)x - 3A + B \Rightarrow 1 = A + B,\ 2 = -3A + B \Rightarrow A = \frac{-1}{4},\ B = \frac{5}{4}$.

Значи:

$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2-2x-3} = \int \frac{A}{x+1}dx + \int \frac{B}{x-3}dx = \frac{-1}{4}\ln|x+1| + \frac{5}{4}\ln|x-3| + C.$$

1.4. Интегрирање на некои ирационални функции

Интеграцијата на ирационални функции не е секогаш можна за разлика од интеграција на класата рационални функции. Овде ќе се задржиме на неколку поткласи ирационални функции кај кои со погодно избрана замена на променливата интегрирањето се сведува на интегрирање рационални функции.

I. Интегралите од видот $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$, каде што R е рационален израз од x, $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}$ и $ad - bc \neq 0$, со замената $\frac{ax+b}{cx+d} = t^p$, каде што p е најмал заеднички содржател на именителите на дропките $\frac{m}{n}, \ldots, \frac{r}{s}$, се сведуваат на интеграли од рационални функции.

***Пример* 1.27.** $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x})} = ?$ Со замена $x = t^{12}$ се добива:

$$I = 12\int \frac{t^4 dt}{1+t^2} = 12\int (t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2})dt = 4\sqrt[3]{x} - 12\sqrt[12]{x} + 12\,\mathrm{arctg}\sqrt[12]{x} + C,$$

за $x > 0$.

***Пример* 1.28.** $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx = ?$

Со замена $1 + x = t^6$ се добива:

$$I = 6\int t^3(t^6 - 1 + t^3)dt = \frac{3}{5}\sqrt[6]{(1+x)^{10}} - \frac{3}{2}\sqrt[6]{(1+x)^4} + \frac{6}{7}\sqrt[6]{(1+x)^7} + C.$$

***Пример* 1.29.** $\int \frac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx = ?$

Со замена $\frac{2-x}{2+x} = t^3$ се добива $I = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2} + C.$

II. Интеграли од видот $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, каде што R е рационален израз од x, и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ се сведуваат на интеграли од рационални функции со Ојлерови замени:

а) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$, ако $a > 0$,

б) $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}$, ако $c > 0$,

в) $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)\,t$, ако α е реален корен на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$.

Знакот + или – се избира произволно во зависност од тоа дали интегралот што се добива е поедноставен за решавање.

***Пример* 1.30.** $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} = ?$

Бидејќи $a = 1 > 0$, со замена $\sqrt{x^2+2x+2} = t - 2$ се добива:

$$I = \int \frac{t^2+2t+2}{(1+t)(t^2+4t+4)}dt = \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\,| + \frac{2}{x+2+\sqrt{x^2+2x+2}} + C.$$

***Пример* 1.31.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-k^2}} = ?$

Бидејќи $a = 1 > 0$, со замена $\sqrt{x^2-k^2} = t - x$ се добива:

$$I = \ln|x + \sqrt{x^2-k^2}\,| + C \text{ за } |x| > |k|.$$

***Пример* 1.32.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{(7x-10-x^2)^3}} = ?$

Бидејќи $a = -1 < 0$, $c = -10 < 0$, со замената $\sqrt{7x-10-x^2} = (x-2)t$ се добива:

$$I = \frac{10}{9}\frac{x-2}{\sqrt{7x-10-x^2}} - \frac{4}{9}\frac{\sqrt{7x-10-x^2}}{x-2} + C.$$

III. Интегралите од видот $\int R(x^m(a+bx^n)^p)dx$, каде што R е рационален израз од $x^m(a+bx^n)^p$ и $m, n, p \in Q$, се интеграли од бином диференцијал и со замени се сведуваат на интеграли од рационални функции единствено во следните случаи:

а) ако $p \in Z$, тогаш $x = t^k$, каде што k е најмалиот заеднички содржател на m и n,

б) ако $\frac{m+1}{n} \in Z$, тогаш $a + bx^n = t^\alpha$, каде што α е именителот на p,

в) ако $\frac{m+1}{n} + p \in Z$, тогаш $a + bx^n = t^\alpha x^n$, каде што α е именителот на p.

***Пример* 1.33.** $\int x^{-11}(1+x^4)^{-\frac{1}{2}}dx = ?$

Бидејќи $m = -11$, $n = 4$, $p = -\frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} + p = -3 \in Z$, со замена $1 + x^4 = x^4t^2$ се добива:

$$I = \left[\frac{1+x^4}{3x^4} - \frac{(1+x^4)^2}{10x^8} - \frac{1}{2}\right]\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + C.$$

***Пример* 1.34.** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = ?$

Бидејќи $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = 1 \in Z$, со замена $1 + x^{\frac{1}{3}} = t^2$ се добива:

$$I = 6\int t^2\, dt = 2(1 + x^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} + C.$$

Да забележиме дека постојат и други видови интеграли од ирационални функции кои не се од овој вид и кои можат да се интегрираат со соодветно погодно избрани замени и соодветна трансформација.

***Пример* 1.35.** $\int \frac{x^3 dx}{1+\sqrt[3]{x^4+2}} = ?$

Со замена $x^4 + 2 = (t - 1)^3$ се добива:

$$\mathrm{I} = \frac{3}{4}\int \frac{t^2 - 2t + 1}{t}dt =$$

$$\frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}(1+\sqrt[3]{x^4+2}\,)^2 - 2(1+\sqrt[3]{x^4+2}\,) + \ln(1+\sqrt[3]{x^4+2}\,)\right] + C.$$

***Пример* 1.36.** $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = ?$

Со замена $x = \mathrm{sh}t$ се добива:

$$\mathrm{I} = \int \frac{dt}{\mathrm{sh}^2 t} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C.$$

1.5. Интегрирање на некои поедноставни тригонометриски функции

Интегралите од видот $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$, каде што R е рационален израз од $\sin x$ и $\cos x$, се сведуваат на интеграли од рационални функции со замена $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$ со ограничување $-\pi < x < \pi$. Притоа, во согласност со тригонометриските врски, се добива $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x$

$= \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ и $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$. Секако и кај овие интеграли се можни и други форми на замени во зависност од конкретна подинтегрална функција, при што може да се добие поедноставен интеграл.

***Пример* 1.37.** $\int \dfrac{dx}{\sin x} = ?$

Со замената $t = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ се добива:

$$I = \int \frac{dt}{t} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

***Пример* 1.38.** $\int (5\sin x - 2\sin^3 x + 1)\cos x dx = ?$

Со замена $\sin x = u$ се добива:

$$I = \int (5u - 2u^3 + 1)du = \frac{5}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2}\sin^4 x + \sin x + C.$$

***Пример* 1.39.** $\int \dfrac{dx}{\operatorname{tg}^2 x} = ?$

Со замена $t = \operatorname{tg}x$, за $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$, $dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, се добива:

$$I = \int \frac{dt}{t^2(1+t^2)} = \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2}\right)dt = -\frac{1}{\operatorname{tg} x} - x + C.$$

§2. ОПРЕДЕЛЕН ИНТЕГРАЛ

Непрекинатите процеси се предмет на изучување во математичката анализа. Голем број проблеми во техниката и во други области, во кои можат да се дефинираат функционални врски меѓу разни величини, можат да се изучуваат со помош на непрекинати процеси. Притоа од голема важност се бројчените и други карактеристики со помош на кои се разрешуваат соодветните проблеми.

Такви бројчени карактеристики се, на пример, изводот, определен интеграл, двоен интеграл, криволиниски интеграл, површински интеграл и други, кои имаат свое значење во соодветната област, на пример, брзина, плоштина, волумен, координати на тежиште, флукс, јачина на струја, работа, момент на инерција, радиус на кривина, ефект, моќност и друго.

2.1. Поимите интегрална сума, суми на Дарбу и определен интеграл со соодветни особини

***Дефиниција* 2.1.** Нека е даден сегмент $[a, b] \subset \mathrm{R}$. Секое конечно множество точки $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$, при што $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, дефинира една поделба π_n на сегментот $[a, b]$. Бројот $d_n = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$,

каде што $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n-1}$, се вика дијаметар на соодветната поделба. Низата на поделби $\{\pi_n\}$ на сегментот $[a, b]$ се вика основна ако низата од соодветните дијаметри $\{d_n\}$ е нулта низа. Јасно е дека две различни поделби можат да имаат еден дијаметар.

***Дефиниција* 2.2.** Нека е дадена функција f дефинирана на сегментот $[a, b]$ и нека е π_n една поделба на сегментот $[a, b]$. Сумата од видот $\sigma(\pi_n) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i$, каде што $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$, се вика интегрална сума на функцијата f во однос на поделбата π_n.

Од самата дефиниција е јасно дека интегралната сума на една функција зависи како од поделбата π_n така и од изборот на точките ξ_i. Имено, за иста поделба се можни различни интегрални суми за различен избор на точките ξ_i .

***Дефиниција* 2.3.** Нека е дадена функција f дефинирана на сегментот $[a, b]$. Ако низата интегрални суми $\sigma(\pi_n)$ на функцијата f, кои одговараат на која било основна низа $\{\pi_n\}$ од поделби на сегментот $[a, b]$, имаат конечна граница I кога $d_n \to 0$, независно од изборот на точките ξ_i, тогаш бројот I се вика определен интеграл од функцијата f на сегментот $[a, b]$ и се означува со $\int\limits_a^b f(x)dx$.

***Дефиниција* 2.3*.** (Риман) Нека е дадена функција f дефинирана на $[a, b]$. Конечниот број I е граница на интегралните суми $\sigma(\pi_n)$ ако $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, така што за сите поделби π_n на $[a, b]$ со дијаметри λ_n, за кои $\lambda_n < \delta$, важи неравенството $|\sigma(\pi_n) - I| < \varepsilon$ независно од изборот на точките ξ_i. Бројот I се вика определен интеграл од функцијата f на сегментот $[a, b]$ и се означува со $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Во тој случај велиме дека подинтегралната функција f е интеграбилна на сегментот $[a, b]$ според Риман, a се вика долна, а b горна граница.

Понатаму за функција која е интеграбилна според Риман ќе велиме кратко дека е интеграбилна. Очевидно е дека потребен услов f да биде интеграбилна е условот таа да биде ограничена на сегментот $[a, b]$.

Може да се покаже дека дефинициите 2.3 и 2.3* се еквивалентни.

***Пример* 2.1.** Функцијата на Дирихле $f(x) = 0$, ако x е ирационален број и $f(x) = 1$, ако x е рационален број, е дефинирана и ограничена на сегментот $[0, 1]$, но не е интеграбилна.

За да го покажеме тоа, избираме основна низа поделби $\{\pi_n\}$ со соодветна низа од дијаметри $\{d_n\}$. Формираме две низи, $\{\sigma^*(\pi_n)\}$, $\{\sigma^{**}(\pi_n)\}$ интегрални суми кои одговараат на исти поделби, но различен избор на точките ξ_i, така што кај низата $\{\sigma^*(\pi_n)\}$ соодветните точки ξ_i^* се ирационални броеви, а кај низата $\{\sigma^{**}(\pi_n)\}$ соодветните точки ξ_i^{**} се рационални броеви. Тогаш

$$\sigma^*(\pi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i^*)\Delta x_i = 0,\ \sigma^{**}(\pi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i^{**})\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} 1 \cdot \Delta x_i = 1.$$

Со тоа добивме две низи интегрални суми $\{0\}$ и $\{1\}$, кои се очевидно конвергентни (константни низи) кога дијаметрите се стремат кон 0, со граници 0 и 1, соодветно. Значи, при иста основна низа поделби $\{\pi_n\}$, но при различен избор на точките ξ_i, кај соодветните интегрални суми добивме различни граници на соодветните низи интегрални суми, што значи f не е интеграбилна функција.

***Дефиниција* 2.4.** Нека π_n е една поделба на $[a, b]$, функцијата f дефинирана и ограничена на $[a, b]$. Сумите од видот:

$$s(\pi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i , \qquad S(\pi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i ,$$

каде што:

$$m_i = \inf_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x), \qquad M_i = \sup_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x), \, i = 0, n-1,$$

се викаат долна и горна сума на Дарбу за функцијата f на сегментот $[a, b]$ во однос на поделбата π_n.

Од дефиницијата е јасно дека овие суми на Дарбу зависат само од поделбата π_n. Поради неравенствата

$$m_i \le f(\xi_i) \le M_i , \, i = 0, n-1,$$

за една иста поделба π_n и произволен избор на точките ξ_i ќе важи неравенството $s(\pi_n) \le \sigma(\pi_n) \le S(\pi_n)$, каде што $s(\pi_n)$, $\sigma(\pi_n)$, $S(\pi_n)$ се, соодветно, долна сума на Дарбу, интегрална сума и горна сума на Дарбу. Уште повеќе, при фиксна поделба π_n сумите на Дарбу $s(\pi_n)$, $S(\pi_n)$ се всушност супремум односно инфимум на множеството интегрални суми (при фиксна поделба интегралните суми зависат само од изборот на точките ξ_i). Сумите на Дарбу ги имаат и следните особини:

***Особина* 2.1.** Нека π_n е една поделба и π_m друга поделба на сегментот $[a, b]$, при што кај π_m освен делбените точки на поделбата π_n има и други делбени точки (пофина поделба). Тогаш

$$s(\pi_n) \le s(\pi_m); \qquad S(\pi_m) \le S(\pi_n).$$

***Особина* 2.2.** За кои било поделби π_n и π_m на $[a, b]$ важи неравенството $s(\pi_n) \le S(\pi_m)$.

Нека $\{s(\pi_n)\}$ е множество од сите долни суми на Дарбу за функцијата f во однос на сите поделби π_n на сегментот $[a, b]$. Според особината 2.2 тоа множество е ограничено одгоре, на пример со број еднаков на горна сума на Дарбу во однос на конкретна поделба на $[a, b]$, и според аксиомата 6 за непрекинатост кај реалните броеви ќе постои супремум кој ќе го означиме со I_*.

Нека $\{S(\pi_n)\}$ е множество од сите горни суми на Дарбу за функцијата f во однос на сите поделби π_n на сегментот $[a, b]$. Поради истата особина 2.2 тоа множество е ограничено оддолу, на пример со број еднаков на долна сума на Дарбу во однос на конкретна поделба на $[a, b]$, и според последицата на аксиомата 6 за непрекинатост ќе постои инфимум кој ќе го означиме со I^*.

Ќе покажеме дека за која било поделба π_n на $[a, b]$ важи $s(\pi_n) \le I_* \le I^* \le S(\pi_n)$. Неравенствата $s(\pi_n) \le I_*$ и $I^* \le S(\pi_n)$ се точни, бидејќи I_* и I^* се супремум односно инфимум на множествата од сите долни односно горни суми на Дарбу за функцијата f во однос на сите можни поделби π_n на сегментот $[a, b]$.

Да претпоставиме дека важи обратното неравенство, односно дека $I^* < I_*$. Бидејќи I^* е конкретен реален број, според дефиницијата за супремум за I_* ќе постои конкретна долна сума на Дарбу $s(\pi_n^*)$, така што $I^* \le s(\pi_n^*) \le I_*$. Бидејќи пак $s(\pi_n^*)$ е конкретен број, според дефиницијата за инфимум за I^* ќе постои конкретна горна сума на Дарбу $S(\pi_m^*)$, така што $I^* \le S(\pi_m^*) \le s(\pi_n^*)$, што е контрадикторност на особината 2.2. Според тоа важи неравенството $I_* \le I^*$.

***Теорема* 2.1.** Нека е дадена функција f, дефинирана и ограничена на $[a, b]$. Функцијата f е интеграбилна на $[a, b]$ ако и само ако $\lim\limits_{d_n \to 0}[S(\pi_n) - s(\pi_n)] = 0$, каде што d_n е дијаметар на поделбата π_n.

Доказ: Да претпоставиме дека I постои според Риман. Тогаш $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, така што за сите поделби π_n на $[a, b]$ со дијаметри d_n, за кои $d_n < \delta$, важи неравенството $|\sigma(\pi_n) - I| < \varepsilon$, односно неравенството $I - \varepsilon < \sigma(\pi_n) < I + \varepsilon$, независно од изборот на точките ξ_i кај интегралните суми $\sigma(\pi_n)$ формирани во однос на соодветните поделби со дијаметри d_n.

Нека π_n е поделба на сегментот $[a, b]$ со дијаметар $d_n < \delta$. Тогаш важат неравенствата $I - \varepsilon < s(\pi_n) \le \sigma(\pi_n) \le S(\pi_n) < I + \varepsilon$, каде што $s(\pi_n)$ и $S(\pi_n)$ се долната и горната сума на Дарбу во однос на поделбата π_n. Од неравенствата $I - \varepsilon < s(\pi_n) < I + \varepsilon$ следува неравенството $|I - s(\pi_n)| < \varepsilon$. Од произволноста на изборот на поделбата π_n со дијаметар $d_n < \delta$ следува дека за сите поделби π_n со дијаметри $d_n < \delta$ ќе важи $|I - s(\pi_n)| < \varepsilon$, што повлекува $\lim\limits_{d_n \to 0} s(\pi_n) = I$.

На ист начин, тргнувајќи од неравенствата $I - \varepsilon < S(\pi_n) < I + \varepsilon$, се добива $\lim\limits_{d_n \to 0} S(\pi_n) = I$. Според тоа, $\lim\limits_{d_n \to 0} S(\pi_n) = \lim\limits_{d_n \to 0} s(\pi_n)$, од што следува $\lim\limits_{d_n \to 0}[S(\pi_n) - s(\pi_n)] = 0$.

Нека сега важи $\lim\limits_{d_n \to 0}[S(\pi_n) - s(\pi_n)] = 0$ и нека I_* и I^* се супремум односно инфимум на множествата од сите долни односно горни суми на Дарбу за функцијата f во однос на сите можни поделби π_n на сегментот $[a, b]$. Од $\lim\limits_{d_n \to 0}[S(\pi_n) - s(\pi_n)] = 0$ следува дека $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, така што за сите поделби π_n на $[a, b]$ со дијаметри d_n за кои $d_n < \delta$ важи неравенството $S(\pi_n) - s(\pi_n) < \varepsilon$, односно $S(\pi_n) < s(\pi_n) + \varepsilon$.

Нека π_n е поделба со дијаметар $d_n < \delta$. Тогаш за соодветните долна и горна сума на Дарбу важат следните неравенства:

$$s(\pi_n) - \varepsilon < s(\pi_n) \le I_* \le I^* \le S(\pi_n) < s(\pi_n) + \varepsilon.$$

Од овие неравенства следува $s(\pi_n) - \varepsilon < I_* < s(\pi_n) + \varepsilon$, односно $|I_* - s(\pi_n)| < \varepsilon$. Од произволноста на изборот на поделбата π_n со дијаметар $d_n < \delta$ следува дека за сите поделби π_n со дијаметри $d_n < \delta$ ќе важи $|I_* - s(\pi_n)| < \varepsilon$, што повлекува $\lim\limits_{d_n \to 0} s(\pi_n) = I_*$.

На ист начин, тргнувајќи од неравенствата $s(\pi_n) - \varepsilon < I^* < s(\pi_n) + \varepsilon$, односно $|I^* - s(\pi_n)| < \varepsilon$, се добива $\lim\limits_{d_n \to 0} s(\pi_n) = I^*$. Поради еднозначноста на границата на конверентна низа од последните граници се добива $I_* = I^*$, т.е. егзистенцијата и единственоста на бројот $I = I_* = I^*$.

Нека сега $\sigma(\pi_n)$ е интегрална сума за функцијата f во однос на поделбата π_n со дијаметар $d_n < \delta$. Тогаш за долната и горната сума на Дарбу во однос на истата поделба π_n ќе важат неравенствата $s(\pi_n) \le \sigma(\pi_n) \le S(\pi_n)$ за кој било избор на точките ξ_i . За таа поделба ќе важат неравенствата $S(\pi_n) < s(\pi_n) + \varepsilon$ и $s(\pi_n) \le I$, од каде што се добиваат неравенствата $\sigma(\pi_n) \le S(\pi_n) < s(\pi_n) + \varepsilon \le I + \varepsilon$. Од друга страна, за истата поделба π_n ќе важи неравенството $\sigma(\pi_n) > s(\pi_n)$ за кој било избор на точките ξ_i, како и неравенствата $s(\pi_n) > S(\pi_n) - \varepsilon$ и $S(\pi_n) > I$, од кои се добиваат неравенствата $\sigma(\pi_n) > s(\pi_n) > S(\pi_n) - \varepsilon > I - \varepsilon$. Значи, $\sigma(\pi_n) < I + \varepsilon$ и $\sigma(\pi_n) > I - \varepsilon$, т.е. $|\sigma(\pi_n) - I| < \varepsilon$ за кој било избор на точките ξ_i.

Од произволноста на изборот на поделбата π_n следува дека $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, така што за сите поделби π_n на сегментот $[a, b]$ со дијаметри d_n, за кои $d_n < \delta$, важи неравенството $|\sigma(\pi_n) - I| < \varepsilon$, независно од изборот на точките ξ_i, што значи дека функцијата f е интеграбилна и $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Нека $S(\pi_n)$ и $s(\pi_n)$ се суми на Дарбу за функцијата f во однос на една иста поделба π_n на сегментот $[a, b]$ со дијаметар d_n и нека $\omega_i = M_i - m_i$, $i = \overline{0, n-1}$. Тогаш $S(\pi_n) - s(\pi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$. Значи, според последната теорема 2.1 функцијата f е интеграбилна на сегментот $[a, b]$ ако и само ако важи $\lim_{d_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$.

***Теорема* 2.2.** Ако f е функција непрекината на $[a, b]$, тогаш е интеграбилна на истиот сегмент.

Доказ: Од теоремата на Вајерштрас за непрекинати функции на сегмент следува дека f е и рамномерно непрекината, т.е. го има својството за произволен реален број $\varepsilon > 0$ да постои реален број $\delta > 0$, така што за кои било x_1, x_2 од $[a, b]$ за кои $|x_1 - x_2| < \delta$ важи неравенството $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Нека π_n е поделба на сегментот $[a, \mathrm{b}]$ со дијаметар $d_n < \delta$. Од втората теорема на Вајерштрас за непрекинати функции на сегмент следува дека постојат $\xi_i^*, \xi_i^{**} \in [x_i, x_{i+1}]$ за кои $|\xi_i^* - \xi_i^{**}| < \delta$ ($|\xi_i^* - \xi_i^{**}| < d_n < \delta$, бидејќи $d_n = \max_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$), така што

$$M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(\xi_i^*), \qquad m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(\xi_i^{**}), \quad \forall i = \overline{0, n-1}.$$

Во согласност со претходната особина ($\xi_i^*, \xi_i^{**} \in [a, b]$) ќе важи неравенството $|f(\xi_i^{**}) - f(\xi_i^*)| < \varepsilon$, односно неравенствата

$$\omega_i = M_i - m_i = f(\xi_i^{**}) - f(\xi_i^*) < \varepsilon, \quad \forall i = \overline{0, n-1}.$$

Значи, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, така што за секоја од поделбите π_n, за чии дијаметри важи $d_n < \delta$, ќе важи

$$0 < S(\pi_n) - s(\pi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x_i = \varepsilon (b - a).$$

Според тоа, $\lim_{d_n \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0$ и во согласност со соодветната теорема 2.1 функцијата f е интеграбилна функција.

Досега $a < b$, бидејќи беше даден сегмент $[a, b]$. Ако $a > b$, тогаш според дефиниција се зема $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, а ако $a = b$ тогаш според дефиниција се зема $\int_a^a f(x)dx = 0$.

***Пример* 2.2.** Покажи дека $\int_a^b dx = b - a$.

Решение: Бидејќи подинтегралната функција $f(x) = 1$ е непрекината на сегментот $[a, b]$, што значи дека е и интеграбилна, можеме да избереме погодна специјална основна низа од поделби, така што лесно може да се најде границата од низата соодветни суми (било интегрални при конкретен избор на точките ξ_i било суми на Дарбу), а со тоа и определениот интеграл како број.

Да избереме специјална основна низа од поделби π_n дадени со $n + 1$ делбени точки на еднакво растојание $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \Delta x$. Значи, $x_i = a + i\Delta x$, $d_n = \frac{b-a}{n}$ и, избирајќи $\xi_i = x_i$, $i = 0, n$, добиваме $\sigma(\pi_n) = \sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\Delta x = b - a$. Според тоа $\lim_{d_n \to 0}\sigma(\pi_n) = \int_a^b dx = b - a$.

***Пример* 2.3.** Кај $\int_a^b x dx$, $f(x) = x$ е функција непрекината на сегментот $[a, b]$, што значи дека е и интеграбилна. Нека поделбата π_n е дадена со $n + 1$ делбени точки x_i на еднакво растојание $\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = \Delta x$, така што $x_i = a + i\Delta x$, $i = 0, n$.

Бидејќи функцијата $f(x) = x$ е строго монотоно растечка непрекината функција, $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i$, соодветната долна сума на Дарбу за поделбата π_n ќе биде дадена со формулата:

$$s(\pi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta x_i = \Delta x \sum_{i=0}^{n-1}(a + i\Delta x) = \Delta x[na + \Delta x(1 + 2 + ... + (n-1))] =$$

$$(b - a)(a + \frac{b-a}{2}\cdot\frac{n-1}{n}).$$

Бидејќи $d_n = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, ако $d_n \to 0$, тогаш $n \to \infty$, па значи дека

$$\lim_{d_n \to 0} s(\pi_n) = \lim_{n\to\infty} (b-a)(a + \frac{b-a}{2} \cdot \frac{n-1}{n}) = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Според тоа, $\int_a^b x dx = \dfrac{b^2-a^2}{2}$.

Пресметувањето на определен интеграл обично не се врши непосредно според дефиницијата, бидејќи е поврзано со тешкотии, а понекогаш е и неизводливо. Да забележиме уште дека определениот интеграл понекогаш се користи и за наоѓање граница на некоја посложена бројчена низа.

***Пример* 2.4.** Да се најде

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\pi}{n} \left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + ... + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} \right] \right\}.$$

Решение: За функцијата $f(x) = \sin x$ и за поделбата π_n на сегментот $[0, \pi]$ дефинирана со делбените точки $x_i = \dfrac{i\pi}{n}$, $\Delta x = \dfrac{\pi}{n} = d_n$, формираме соодветна интегрална сума

$$\sigma(\pi_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (\sin\frac{i\pi}{n})\frac{\pi}{n},$$

каде што $\xi_i = x_i$, $i = 0, n-1$. Бидејќи функцијата $f(x) = \sin x$ е непрекината на сегментот $[0, \pi]$, ќе постои $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(\pi_n) = \int_0^\pi \sin x dx = 2$. При тоа како познат резултат е користено дека $\int_0^\pi \sin x dx = 2$. Значи,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\pi}{n} \left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + ... + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} \right] \right\} = 2.$$

Ќе наведеме неколку особини на определениот интеграл.

***Особина* 2.3.** Ако функциите f и g се интеграбилни на сегментот $[a, b]$, тогаш и функциите Kf (K е константа) и $f+g$ се интеграбилни на $[a, b]$, при што важи

$$\int_a^b Kf(x)dx = K\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Оваа особина може да се прошири и на конечен број функции.

***Особина* 2.4.** Ако функцијата f е интеграбилна на сегментот $[a, b]$ и $c\in(a, b)$, тогаш f е интеграбилна на сегментите $[a, c]$ и $[c, b]$, при што важи

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Важи и обратното тврдење: ако функцијата f е интеграбилна на сегментите $[a, c]$ и $[c, b]$, тогаш f е интеграбилна на сегментот $[a, b]$, при што важи истото равенство.

***Особина* 2.5.** Ако f е интеграбилна функција на $[a, b]$, при што $\forall x\in[a, b]$, $f(x)\geq 0$ ($f(x)\leq 0$), тогаш важи

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \qquad (\int_a^b f(x)dx \leq 0).$$

***Последица* 2.1.** Ако f и g се интеграбилни функции на сегментот $[a, b]$ и ако $\forall x\in[a, b], f(x)\leq g(x)$, тогаш важи

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

При доказот, особината 2.5 се применува на нова функција $F(x) = g(x) - f(x)$ и притоа се користи особина 2.3.

Доказите на особините 2.3, 2.4 и 2.5 произлегуваат непосредно од дефиницијата на определен интеграл и особините на бројчени низи.

***Особина* 2.6.** Ако функцијата f е интеграбилна на $[a, b]$, тогаш и функцијата $|f|$ е интеграбилна на $[a, b]$, при што

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Доказ: Нека $S(\pi_n)$ и $s(\pi_n)$ се суми на Дарбу за функцијата f и $S^*(\pi_n)$, $s^*(\pi_n)$ суми на Дарбу за функцијата $|f|$ на $[a, b]$ во однос на една иста поделба π_n. Според неравенството $||a| - |b|| \le |a - b|$ ќе важат неравенствата $M_i^* - m_i^* \le M_i - m_i$, $\forall i = 0, n-1$, каде што

$$m_i = \inf_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad m_i^* = \inf_{x\in[x_i, x_{i+1}]} |f(x)|,$$

$$M_i^* = \sup_{x\in[x_i, x_{i+1}]} |f(x)|, \quad i = 0, n-1,$$

односно неравенството $0 \le S^*(\pi_n) - s^*(\pi_n) \le S(\pi_n) - s(\pi_n)$.

Според тоа, ако $\lim\limits_{d_n\to 0} [S(\pi_n) - s(\pi_n)] = 0$, тогаш и $\lim\limits_{d_n\to 0} [(S^*(\pi_n) - s^*(\pi_n)] = 0$, што значи $|f|$ е интеграбилна функција.

Од друга страна, за соодветните интегрални суми $\sigma(\pi_n)$, $\sigma^*(\pi_n)$ во однос на една иста поделба π_n добиваме

$$|\sigma(\pi_n)| = |\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)|\Delta x_i = \sigma^*(\pi_n)$$

и при фиксно избрани ξ_i, $i = 0, n-1$ (веќе е докажано дека $|f|$ е интеграбилна функција), со граничен процес $d_n\to 0$ се добива бараното неравенство (особина кај конвергентни бројчени низи).

***Особина* 2.7.** Ако f е интеграбилна функција на $[a, b]$ и ако $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, тогаш важи оцената

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Доказ: За ново дефинираната функција $F_1(x) = M - f(x)$ важи $F_1(x) \ge 0$, $\forall x \in [a, b]$, и од особината 2.5 следува $\int_a^b [M - f(x)]dx \ge 0$, од каде што со користење на особината 2.3 и $\int_a^b dx = b - a$ (пример 2.2) се добива $M(b-a) \ge \int_a^b f(x)dx$.

На ист начин за нова функција $F_2(x) = m - f(x)$, $\forall x\in[a, b]$, се добива и второто неравенство $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx$.

***Особина* 2.8.** (Теорема за средна вредност.) Ако функцијата f е интеграбилна на $[a, b]$ и ако $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, тогаш постои број $\mu \in \mathrm{R}$, $m \le \mu \le M$, така што важи равенството

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\mu .$$

Доказ: Според особината 2.7 ќе важи неравенството

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

и тогаш $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ е точно бараниот број.

***Последица* 2.2.** Ако f е и непрекината функција на $[a, b]$, тогаш постои $\xi \in [a, b]$, така што важи равенството

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\xi).$$

Всушност $\mu = f(\xi)$, што произлегува од особината на непрекинати функции за бројот μ, при што m и M се најмалата и најголемата вредност на функцијата f на $[a, b]$ и $m \le \mu \le M$.

***Особина* 2.9.** (Обопштена теорема за средна вредност.) Ако g и $f{\cdot}g$ се интеграбилни функции на сегментот $[a, b]$, ако $\forall x\in[a, b]$ важи $m \le f(x) \le M$ (f е ограничена функција на $[a, b]$) и ако g не го менува знакот на $[a, b]$ (секогаш е или ненегативна или непозитивна), тогаш постои број $\mu\in\mathrm{R}$, $m \le \mu \le M$, за кој важи:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int_a^b g(x)dx .$$

Доказ: Нека $\forall x\in[a, b]$ $g(x) \ge 0$. Тогаш за $\forall x\in[a, b]$ важат неравенствата $mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x)$, од каде што според својствата ќе важат и неравенствата

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx .$$

Ако $\int_a^b g(x)dx = 0$, тогаш $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ и μ може да биде кој било број меѓу m и M.

Ако пак $\int_a^b g(x)dx > 0$, тогаш од последните неравенства се добива $m \le \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \le M$, од каде што $\mu = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ е точно бараниот број.

Случајот $\int_a^b g(x)dx < 0$ не е можен, бидејќи $g(x) \ge 0$, $\forall x \in [a, b]$.

На ист начин се добива бараното равенство и во случајот $g(x) \le 0$, $\forall x \in [a, b]$.

2.2. Њутн-Лајбницова формула

Ќе покажеме дека постои тесна врска меѓу определен и неопределен интеграл, со што во голема мера ќе се олесни пресметувањето на определениот интеграл користејќи го апаратот за пресметување на неопределен интеграл.

Пред да преминеме на наредните особини со кои ќе биде дадена врската меѓу определен и неопределен интеграл преку таканаречената Њутн-Лајбницовата формула, ќе разгледаме некои аспекти за определениот интеграл. Имено, кај определениот интеграл, кој е конечен број, ознаката за подинтегралната променлива не е битна. Тоа значи дека

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz,$$

т.е. определениот интеграл зависи само од самата функција f и од сегментот на интеграција $[a, b]$, односно од неговите крајни точки.

Нека f е интеграбилна функција на $[a, b]$ и нека $x \in [a, b]$. Тогаш f е интеграбилна и на сегментот $[a, x]$ и постои бројот

$\int_a^x f(t)dt$. Значи, од произволноста на x можеме да заклучиме дека за секое $x \in [a, b]$ постои еднозначно дефиниран број $\int_a^x f(t)dt$.

Затоа може да се дефинира нова функција $\Phi: x \to \int_a^x f(t)dt$ на сегментот $[a, b]$, која се нарекува определен интеграл со променлива горна граница.

***Особина* 2.10.** Ако f е интеграбилна функција на $[a, b]$, тогаш функцијата Φ дефинирана со $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ е непрекината функција на $[a, b]$.

Доказ: Нека $h \neq 0$ е нараснување на променливата x во точката $x_0 \in (a, b)$ така што $x_0 + h \in (a, b)$. Тогаш со користење на особината 2.4 се добива

$$\Phi(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt = \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt,$$

т.е. $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$.

Од особината 2.8 за секое $h \neq 0$ постои број $\mu \in \mathrm{R}$, $m_0 \leq \mu \leq M_0$, каде што

$$m_0 = \inf_{t \in [x_0, x_0+h]} f(t), \qquad M_0 = \sup_{t \in [x_0, x_0+h]} f(t),$$

за $h > 0$, и

$$m_0 = \inf_{t \in [x_0+h, x_0]} f(t), \qquad M_0 = \sup_{t \in [x_0+h, x_0]} f(t),$$

за $h < 0$, така што $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \mu(x_0 + h - x_0) = \mu h$.

Бидејќи μ зависи од h и е ограничен, при граничниот процес $h \to 0$ добиваме $\lim_{h \to 0} \mu h = 0$ (теорема за производ на ограничена и бесконечно мала функција), односно $\lim_{h \to 0} [\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)] = 0$, што значи дека Φ е непрекината функција во точката x_0. Од произволноста на изборот на точката x_0 заклучуваме дека Φ е непрекината на (a, b). На соодветен начин се покажува и непрекинатост одлево во точката b и непрекинатост оддесно во точката a.

***Особина* 2.11.** Ако f е интеграбилна на $[a, b]$ и непрекината функција во точката $x_0 \in (a, b)$, тогаш функцијата Φ дефинирана во особината 2.10 има извод во точката x_0, при што $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Доказ: Нека f е непрекината функција во $x_0 \in (a, b)$. Според особината 2.10 за секое нараснување $h \neq 0$ за кое важи $x_0 + h \in (a, b)$ постои број $\mu \in \mathrm{R}$ (значи, μ зависи од h) со својство $m_0 \leq \mu \leq M_0$, така што $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) = \mu h$.

Од непрекинатоста на функцијата f во точката x_0 следува дека $\forall \varepsilon > 0$ ќе постои $\delta > 0$, така што за $\forall t$ за кои $|\, t - x_0 \,| < \delta$ важи неравенството $|\, f(t) - f(x_0) \,| < \varepsilon$, т.е. $\forall t \in \mathrm{V}(x_0, \delta)$, $f(t) \in \mathrm{V}(f(x_0), \varepsilon)$, односно $f(x_0) - \varepsilon$, $f(x_0) + \varepsilon$ се миноранта и мајоранта за множеството $\{f(t) \mid |\, t - x_0 \,| < \delta\}$.

Земајќи нараснување $h \neq 0$ така што $t = x_0 + h$, добиваме дека $\forall h$ за кое $|\, h \,| < \delta$ ќе важи неравенството $f(x_0) - \varepsilon < f(x_0 + h) < f(x_0) + \varepsilon$, односно неравенството $f(x_0) - \varepsilon \leq m_0 \leq M_0 \leq f(x_0) + \varepsilon$ (m_0 и M_0 се инфимум и супремум дефинирани во особина 2.10, а $f(x_0) - \varepsilon$ и $f(x_0) + \varepsilon$ се миноранта и мајоранта). Поради $m_0 \leq \mu \leq M_0$ следува $f(x_0) - \varepsilon \leq \mu \leq f(x_0) + \varepsilon$, односно $|\mu - f(x_0)| < \varepsilon$.

Значи, за $\forall \varepsilon > 0$ најдовме δ (егзистенцијата е преку непрекинатоста), така што за $\forall h$, за кое $|\, h - 0 \,| < \delta$, важи $|\mu - f(x_0)\,| < \varepsilon$, што значи дека постои $\lim\limits_{h \to 0} \mu = f(x_0)$ односно

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0)\,.$$

Според тоа $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Од произволноста на изборот на $x_0 \in (a, b)$ следува дека за $\forall x \in (a, b)$ ќе важи $\Phi'(x) = f(x)$, па можеме да заклучиме дека Φ е една примитивна функција за функцијата f на (a, b).

Нека се задоволени условите од особина 2.11 и F е која било друга примитивна функција на f. Тогаш ќе постои константа C, така што $\Phi(x) = F(x) + C$. За определување на константата C се користи дека $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ и се добива $C = \Phi(a) - F(a) = -F(a)$, што значи дека $\Phi(x) = F(x) - F(a)$ $\forall x \in [a, b]$.

За $x = b$ се добива конечната Њутн-Лајбницова формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\,|_a^b,$$

каде што F е конкретна примитивна функција на подинтегралната функција f.

Да заклучиме дека за пресметување на определен интеграл е доволно да се најде една примитивна функција на подинтегралната функција, т.е. да се реши неопределениот интеграл и да се примени Њутн-Лајбницовата формула.

***Пример* 2.5.** Со Њутн-Лајбницовата формула да се реши интегралот $\int_0^1 x^5 dx$.

Бидејќи $\frac{x^6}{6}$ е една примитивна функција на функцијата x^5, ќе добиеме $I = \left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$.

***Пример* 2.** Со Њутн-Лајбницовата формула да се реши интегралот $\int_0^\pi \sin x dx$.

Бидејќи $-\cos x$ е една примитивна функција на функцијата $\sin x$, ќе добиеме $I = (-\cos x)|_0^\pi = -(-1 - 1) = 2$.

2.3. Метод на замена и метод на парцијална интеграција кај определениот интеграл

***Теорема* 2.3.** Нека е даден $\int_a^b f(x)dx$, каде што f е непрекината функција на $[a, b]$. Нека φ е функција на замена на подинтегралната променлива x со нова подинтегрална променлива t, така што $x = \varphi(t)$, и нека φ ги задоволува следните услови:

а) φ е непрекината на сегментот $[\alpha, \beta]$, така што $\forall t \in [\alpha, \beta]$,

$\varphi(t) \in [a, b]$,

б) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ или $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$,

в) постои непрекинат извод $\varphi'(t) \neq 0$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$.

Тогаш важи равенството $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ или равенството $\int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Доказ: Ако F е една примитивна функција на функцијата f на сегментот $[a, b]$, тогаш $\Phi(t) = F(\varphi(t))$ е една примитивна функција на функцијата $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на сегментот $[\alpha, \beta]$ (покажано кај неопределениот интеграл).

Според тоа, со примена на Њутн-Лајбницовата формула се добива $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ и

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

за $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $\varphi'(t) > 0$, со што е докажано равенството.

***Особина* 2.12.** Нека е дадена функција f интеграбилна на сегментот $[-a, a]$. Ако f е парна функција на $[-a, a]$, тогаш важи $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$, а ако f е непарна функција на $[-a, a]$, тогаш важи $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Доказ: Нека f е парна функција на $[-a, a]$. Според особина 2.4

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx .$$

Со замената $x = -t$ во првиот интеграл се добива

$$\int_{-a}^a f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx .$$

Притоа е користена релацијата $f(-t) = f(t)$ (f е парна функција) и дефиницијата $\int\limits_a^0 f(x)dx = -\int\limits_0^a f(x)dx$.

Нека f е непарна функција на $[-a, a]$. Според особината 2.4 $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = \int\limits_{-a}^0 f(x)dx + \int\limits_0^a f(x)dx$. Со замената $x = -t$ во првиот интеграл се добива $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = -\int\limits_a^0 f(-t)dt + \int\limits_0^a f(x)dx = 0$. Притоа е користена релацијата $f(-t) = -f(t)$ (f е непарна функција) и дефиницијата $\int\limits_a^0 f(x)dx = -\int\limits_0^a f(x)dx$.

Нека се дадени две функции $u(x)$ и $v(x)$ дефинирани на сегментот $[a, b]$. Ако $u(x)$ и $v(x)$ заедно со своите изводни функции се непрекинати на $[a, b]$, тогаш важи равенството:

$$\int\limits_a^b u(x)dv(x) = [u(x)v(x)]\big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)du(x).$$

Навистина од равенството

$$u(x)dv(x) = d[u(x)v(x)] - v(x)du(x)$$

со интегрирање и користење на особините на определениот интеграл и Њутн-Лајбницовата формула се добива бараното равенство.

Овој начин на решавање на определен интеграл се нарекува метод на парцијална интеграција кај определениот интеграл и скратено се сведува на формулата $\int\limits_a^b udv = (uv)\big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$, со забелешка дека тоа е всушност равенство на броеви, а не на функции.

***Пример* 2.6.** Со метод на парцијална интеграција да се реши $\int\limits_0^1 xe^x dx$.

$$\int\limits_0^1 xe^x dx = xe^x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x dx = e - e + 1 = 1.$$

Притоа $u = x$, $dv = e^x dx$.

***Пример* 2.7.** Да се пресмета сумата $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}$.

Решение: Со парцијална интеграција се добива рекурентната формула

$$\int (a^2-x^2)^n\,dx = \frac{x(a^2-x^2)^n}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1}\int (a^2-x^2)^{n-1}dx\,.$$

Со користење на оваа формула се добива

$$\int_0^a (a^2-x^2)^n\,dx = \frac{2na^2}{2n+1}\int_0^a (a^2-x^2)^{n-1}dx\,,$$

и со математичка индукција се добива

$$\int_0^a (a^2-x^2)^n\,dx \;=\; a^{2n+1}\,\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,.$$

Значи, $\int\limits_0^1 (1-x^2)^n\,dx \;=\; \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

Од друга страна,

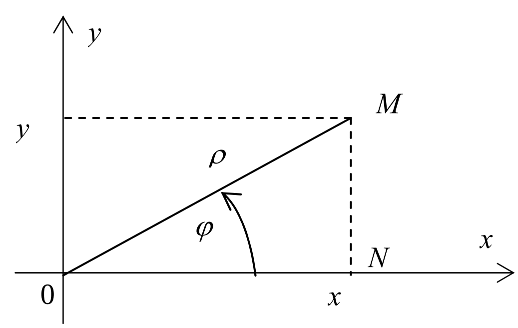
$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx \;=\int_0^1\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^{2k}\right]dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k}.$$

Според тоа, $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

2.4. Поларен координатен систем

Во досегашните излагања за определување на положбата на дадена точка во рамнина, како и за прикажување график на некои функции, се користеше Декартовиот правоаголен координатен систем во рамнина. Но многу проблеми од геометријата, механиката и други области полесно се решаваат ако се користи еден друг систем наречен поларен координатен систем во рамнина. Положбата на една точка M во рамнината во Декартов правоаголен координатен систем беше целосно определена со подреден пар од две координати, апсциса и ордината, кои всушност беа проекции на радиус-векторот на таа точка врз две нормални меѓусебно ориентирани прави наречени координатни оски.

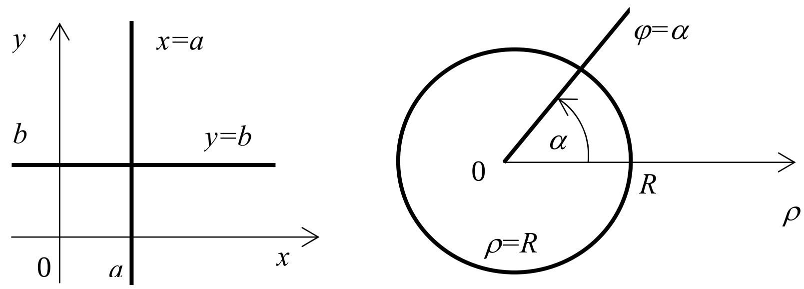
Положбата на една точка M во рамнината е целосно определена и во поларниот координатен систем исто така со две координати, од кои едната е растојанието ρ на таа точка од една фиксна точка 0, наречена пол, а втората е аголот φ меѓу една фиксна ориентирана полуправа со почеток во точката 0, наречена поларна оска, и со векторот со почеток во точката 0 и крај во точката M. Координатата ρ се вика поларно растојание, а координатата φ е поларен агол кој се мери во позитивна насока (спротивно од движењето на стрелките на часовникот). За да се добијат врските меѓу Декартовите координати x, y и поларните координати ρ, φ на една иста точка M во рамнината, ќе претпоставиме дека координатниот почеток се поклопува со полот, а апсцисата со поларната оска (цртеж 1).



Цртеж 1

Тогаш од правоаголниот триаголник $0MN$ се добиваат врските $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Нека f е функција дадена со равенката $\rho = f(\varphi)$, чиј график може геометриски да се интерпретира како множество точки од рамнината (крива) во поларен координатен систем. Истата функција геометриски може да се разгледува и во Декартов правоаголен координатен систем.

Да забележиме дека на графици на исти функции можат да одговараат сосема различни криви во правоаголен и во поларен координатен систем. Исто така и исти криви можат да бидат геометриска интерпретација на графици на различни функции. На пример, во поларен координатен систем графикот на функцијата $f(\varphi) = \rho = R$ (R е константа) е кружница со радиус R и центар во полот О, а графикот на функцијата $g(\rho) = \varphi = \alpha$ (α е константа) е полуправа со почеток во полот О, додека во Декартов правоаголен координатен систем графиците на истите функции $f(x) = y = b$, односно $g(y) = x = a$ (a, b се константи), се хоризонтална односно вертикална права (цртеж 2).



Црӣеж 2

Од друга страна, хоризонталната права, која е график на функцијата f зададена со равенката $f(x) = y = b$ (b е константа) во Декартов правоаголен координатен систем, е график и на друга функција h зададена со равенката $\rho\sin\varphi = b$, или $\rho = \dfrac{b}{\sin\varphi}$, во поларен координатен систем, при што за добивање на функционалната врска h се користени врските меѓу поларните и Декартовите координати.

Очевидно е дека во вториот случај функцијата h е доста посложена. Ако пак се разгледа полукружницата која е график на функцијата зададена имплицитно со равенката $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geq 0$, тогаш со користење на врските меѓу поларните и Декартовите координати се добива дека таа е график на функцијата зададена со равенката $\rho = R$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, во поларен координатен систем, која има доста поедноставен аналитички израз .

Нека е дадена функцијата $\rho = f(\varphi)$ дефинирана на множество D_φ и нека φ и ρ се поларни координати. Со користење на врските меѓу поларните и Декартовите координати се добива функција која може да се запише во параметарски вид земајќи ја координатата φ за параметар: $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$, каде што x и y се Декартови координати.

Притоа треба да се има предвид дека во општ случај дефиниционата област на функцијата f не мора да биде иста со дефиниционата област на добиената функција дадена во параметарски вид.

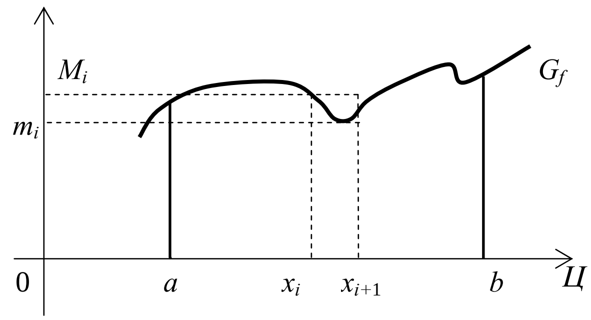
Да забележиме дека секогаш треба да се има предвид дека функцијата е аналитички поим заедно со нејзиниот график дефиниран како множество од подредени парови, додека кривата е геометриско место од точки во определен координатен систем, чии координати имаат некое заедничко својство (врска), на пример функционална врска кај графикот на функција и сл.

Притоа графикот може да содржи и подреден пар со негативни броеви (x_0, y_0), $x_0 < 0$, $y_0 < 0$, што не претставува проблем за геометриско интерпретирање како точка $A(x_0, y_0)$ во правоаголен Декартов координатен систем. Во поларниот координатен систем се јавува проблем, бидејќи според дефиницијата втората координата ρ на некоја точка $M(\varphi, \rho)$ секогаш е позитивен број (растојание). За да се разреши овој проблем во поларен координатен систем, подредениот пар (φ_0, ρ_0), каде што $\rho_0 < 0$, се индентификува со точката $M(\varphi_0 + \pi, -\rho_0)$.

2.5. Примена на определен интеграл за пресметување плоштина на рамнинска фигура, должина на рамнинска крива и волумен и плоштина на просторно тело, како и примена во физиката и електротехниката

Нека е дадена функција f непрекината и ненегативна на сегментот $[a, b]$. Нејзиниот график да го разгледаме како крива во Декартов правоаголен координатен систем и да го поставиме проблемот за наоѓање плоштина на криволиниски трапез како геометриска слика ограничена со правите $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и кривата која го претставува графикот на функцијата f како множество точки од рамнината. Да избереме една поделба π_n на $[a, \mathrm{b}]$ со делбени точки $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$, на еднакви растојанија $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Нека m_i

и M_i се најмалата и најголемата вредност на функцијата f на потсегментите $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, n-1$ (цртеж 3).



Цртеж 3

Според формулата за плоштина на правоаголник, плоштините на правоаголниците со основа Δx и висини m_i, односно M_i се дадени со формулите $\Delta x \cdot m_i$ односно $\Delta x \cdot M_i$, $i = 0, n - 1$. Образуваме суми од плоштините на сите такви правоаголници $\sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x$ и $\sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x$, кои всушност се суми на Дарбу $s(\pi_n)$ и $S(\pi_n)$ за функцијата f за поделбата π_n на сегментот $[a, b]$.

Според условот функцијата f е непрекината, што значи интеграбилна, и за неа постои определениот интеграл $\int_a^b f(x)dx$ за кој важи $s(\pi_n) < \int_a^b f(x)dx < S(\pi_n)$.

Од друга страна, $s(\pi_n)$ и $S(\pi_n)$ се суми на плоштини од правоаголници и плоштината на криволинискиот трапез се наоѓа меѓу нив за секоја поделба на сегментот $[a, b]$. Според тоа, земајќи го предвид граничниот процес кај дефиницијата за определен интеграл, можеме да кажеме дека плоштината на криволинискиот трапез е бројот кој се добива како определен интеграл $\int_a^b f(x)dx$, што е во согласност со геометриската претстава за плоштина (на пример плоштина на правоаголник).

***Дефиниција* 2.5.** Нека е дадена функција f дефинирана и непрекината на $[a, b]$ и за $\forall x \in [a, b]$ нека $f(x) \geq 0$. Бројот $\int_a^b f(x)dx$ се вика плоштина на криволиниски трапез образуван со графикот на таа функција.

На сличен начин се доаѓа и до формулата за пресметување плоштина на криволиниски трапез и во случај кога функцијата е непозитивна на $[a, b]$, при што за плоштина се зема апсолутната вредност на добиениот број. Во согласност со оваа констатација се покажува следното тврдење:

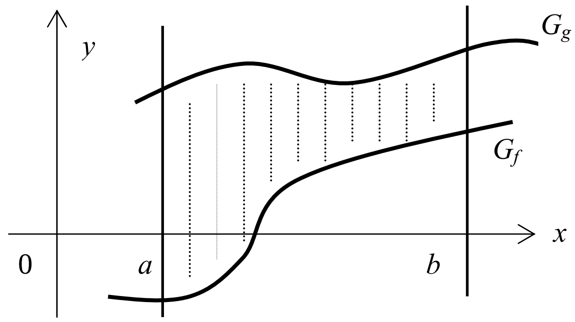
***Теорема* 2.4.** Нека f е непрекината функција на $[a, b]$. Плоштината на геометриската слика ограничена со правите $x = a$, $x = b$ и кривата која одговара на графикот на функцијата f на $[a, b]$ се пресметува со користење на особината за адитивност на определен интеграл откако претходно сегментот $[a, b]$ ќе се подели на потсегменти во кои функцијата f е или само ненегативна или само непозитивна. Сумирањето се врши како сума на апсолутни вредности.

***Пример* 2.8.** Да се најде плоштина на геометриска слика ограничена со оската x и графикот на функцијата $f(x) = \sin x$ дефинирана на сегментот $[0, 2\pi]$.

Ако го пресметаме интегралот $\int_0^{2\pi} \sin x dx$, ќе добиеме како резултат 0. Но ако сакаме да ја пресметаме плоштината, тогаш

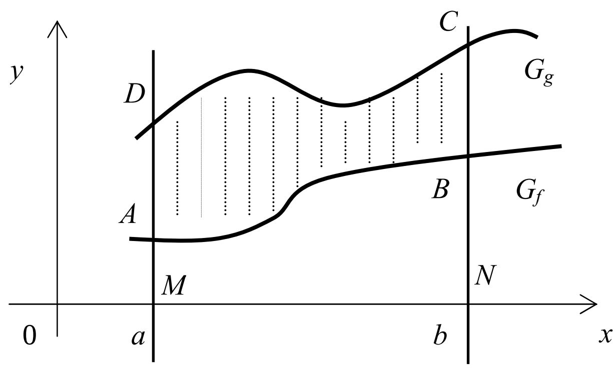
$$P = \int_0^{\pi} \sin x dx + \left| \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx \right| = -(-2) + |-2| = 4.$$

***Теорема* 2.5.** Нека f, g се две непрекинати функции на сегментот $[a, b]$ и за $\forall x \in [a, b]$ нека $f(x) \leq g(x)$. Плоштината на геометриската слика ограничена со правите $x = a$, $x = b$ и кривите кои одговараат на графиците на функциите f и g на $[a, b]$ (цртеж 4) се пресметува со формулата $P = \int_a^b [g(x) - f(x)]dx$.



Цртеж 4

Доказ: Да претпоставиме дека за $\forall x \in [a, b], f(x) \geq 0$. Во согласност со дефиницијата, плоштината на криволинискиот трапез *MNCD* е дадена со бројот $\int_a^b g(x)dx$, а плоштината на криволинискиот трапез *MNBA* со бројот $\int_a^b f(x)dx$ (цртеж 5).

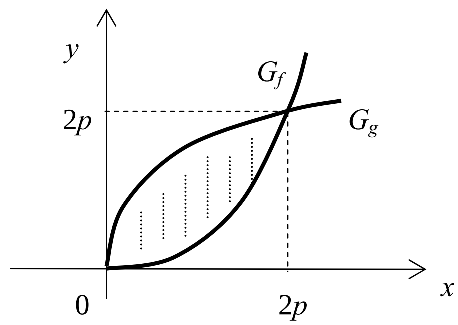


Цртеж 5

Геометриски е јасно дека плоштината на геометриската слика *ABCD* ќе биде дадена со бројот $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx$, од каде во согласност со особината за адитивност кај определени интеграли се добива бараната формула.

Ако пак не е задоволен условот $\forall x\in[a, b], f(x) \geq 0$, тогаш секогаш постои константа K, така што $\forall x\in[a, b], f(x) + K \geq 0$, и доказот е ист со тоа што за $f(x)$ се зема $f(x) + K$, за $g(x)$ се зема $g(x) + K$ и на крајот се добива истата формула.

***Пример* 2.9.** Да се најде плоштина на геометриска слика ограничена со кривите кои се графици на функциите $f(x) = \dfrac{x^2}{2p}$, $g(x) = \sqrt{2px}$, $p > 0$ (цртеж 6).



Цртеж 6

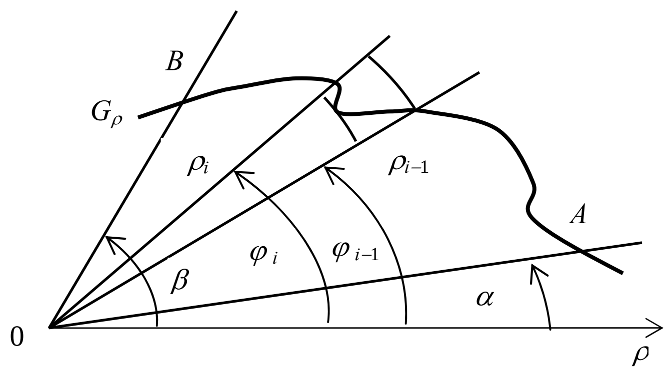
Решение: Во согласност со формулата се добива

$$P = \int_0^{2p} \left(\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}\right)dx = \frac{4}{3}p^2 .$$

Нека е даден поларен координатен систем и нека е дадена функција $\rho = f(\varphi)$, непрекината ненегативна на сегментот $[\alpha, \beta]$, чиј график може геометриски да се интерпретира како крива во поларниот координатен систем.

Бидејќи според условот f е функција, кривата ја има особината $\forall \varphi_1, \varphi_2\in[\alpha, \beta]$, за кои важи $\varphi_1 \neq \varphi_2$, да следува $M_1(\varphi_1, f(\varphi_1)) \neq M_2(\varphi_2, f(\varphi_2))$. Нека π_n е една поделба на сегментот $[\alpha, \beta]$ со делбени точки $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 <...< \varphi_n = \beta$ на еднакви растојанија $\Delta\varphi = \dfrac{\beta-\alpha}{n} = d_n$. Нека m_i и M_i се најмалата и најголемата вредност на функцијата f на потсегментите $[\varphi_{i-1}, \varphi_i]$, $i = \overline{1, n}$.

Од геометриски аспект ќе го разгледаме криволинискиот сектор $0AB$, ограничен со отсечките $0A$, $0B$ и кривата AB која одговара на дел од графикот на функцијата $\rho = f(\varphi)$, при што $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ (цртеж 7).



Цртеж 7

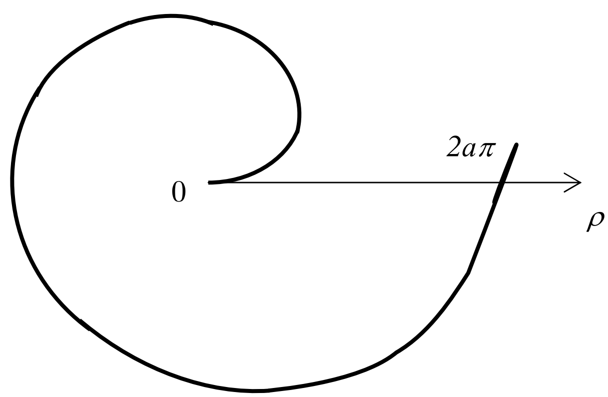
Според формулата за плоштина на кружен исечок, плоштините на кружните исечоци ограничени со полуправите $\varphi = \varphi_{i-1}$, $\varphi = \varphi_i$ и дел од кружницата $\rho = m_i$, односно кружницата $\rho = M_i$, се дадени со формулите $p_i = \dfrac{m_i^2\Delta\varphi}{2}$, односно $P_i = \dfrac{M_i^2\Delta\varphi}{2}$, $i = \overline{1,n}$.

Образуваме суми $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{m_i^2\Delta\varphi}{2}$ и $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{M_i^2\Delta\varphi}{2}$ кои се суми на Дарбу $s(\pi_n)$ и $S(\pi_n)$ за функцијата $\dfrac{f^2(\varphi)}{2}$ на сегментот $[\alpha, \beta]$ во однос на поделбата π_n. Според условот функцијата $\dfrac{f^2(\varphi)}{2}$ е непрекината, што значи и интеграбилна, на сегментот $[\alpha, \beta]$ и за неа постои определениот интеграл $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi$.

Од друга страна, плоштината на криволинискиот сектор $0AB$ се наоѓа секогаш меѓу сумите на Дарбу во однос на која било поделба на сегментот $[\alpha, \beta]$. Според тоа, земајќи го предвид граничниот процес $d_n \to 0$, можеме да кажеме дека и во овој случај плоштината на криволинискиот сектор $0AB$ е еднаква на определениот интеграл $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi$.

Со оваа формула се дефинира плоштина на криволиниски сектор.

***Пример* 2.10.** Да се најде плоштина на криволиниски сектор дефиниран со функцијата $\rho = a\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $a > 0$ (Архимедова спирала, цртеж 8).

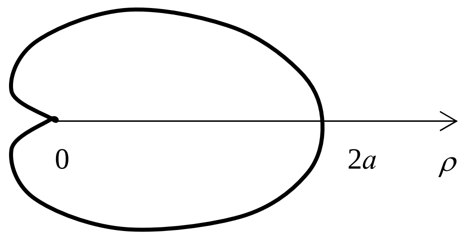


Цртеж 8

Според формулата се добива

$$P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} a^2\varphi^2 d\varphi = \frac{4}{3}a^2\pi^3 .$$

***Пример* 2.11.** Да се најде плоштина на геометриска слика во поларен координатен систем ограничена со крива како график на функцијата $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$, $\varphi\in[0, 2\pi]$ (кардиоида, цртеж 9).



Цртеж 9

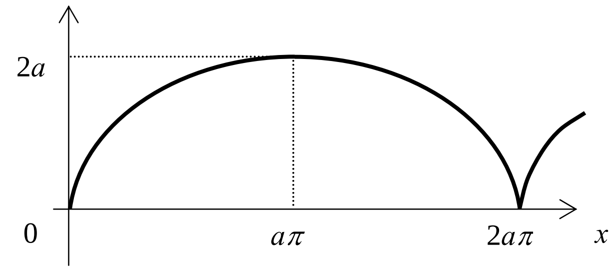
Решение: $P = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2}a^2\pi$.

Нека функцијата f, дефинирана на сегментот $[a, b]$, е дадена во параметарски вид со равенките $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, при што $a < \varphi(t) < b$, $\psi(t) \geq 0$, $\forall t\in[\alpha, \beta]$. Нека φ, φ' и ψ се непрекинати функции на (α, β). Плоштината на криволиниски трапез ограничен со правите $x = a$, $x = b$ и кривата која одговара на графикот на функцијата f во Декартов правоаголен координатен систем се пресметува со определениот интеграл $\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt$. (Тука $dx = \varphi'(t)dt$, $y = f(x) = \psi(t)$ и се користи соодветната формула за плоштина на криволиниски трапез.)

***Пример* 2.12.** Да се најде плоштина на криволиниски трапез дефиниран со функцијата $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t\in[0, 2\pi]$, $a > 0$ (циклоида, цртеж 10).

$$P = \int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt = \int_{0}^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2\left[2\pi - 2\sin t\Big|_{0}^{2\pi} + \int_{0}^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt\right] = 3a^2\pi.$$



Цртеж 10

***Пример* 2.13.** Да се најде плоштина на геометриска слика во Декартов правоаголен координатен систем, ограничена со криви како графици на функциите f: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t\in[0, \pi]$ и g: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t\in[\pi, 2\pi]$ (елипса) .

Поради симетрија и соодветни услови најпрвин се пресметува определениот интеграл на сегментот $[0, \pi]$:

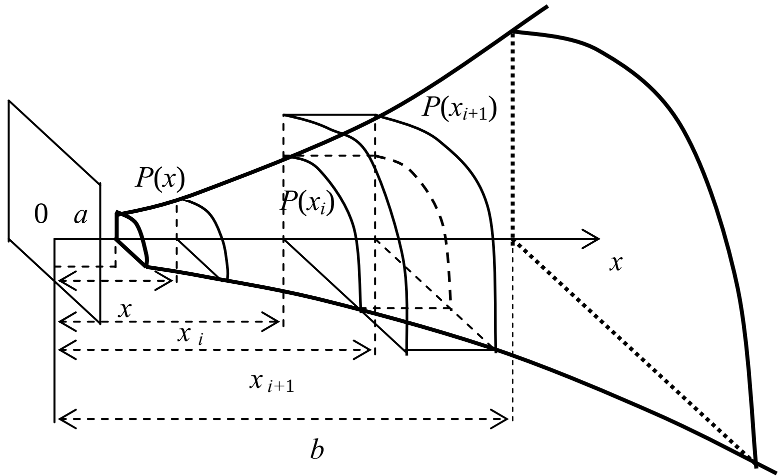
$$P_1 = \int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\varphi'(t)dt = \int_{\pi}^{0} b\sin t\cdot a(-\sin t)dt = ab\int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{ab\pi}{2}.$$

Значи, $P = 2P_1 = ab\pi$.

Доколку формулата за пресметување на плоштина не може да се примени поради незадоволување на некои услови (непрекинатост, ненегативност и сл.), тогаш во тие случаи се користи особината за адитивност кај определени интеграли.

Да разгледаме тело во простор во кој е даден просторен Декартов правоаголен координатен систем, кое се наоѓа меѓу рамнини дадени со равенките $x = a$ и $x = b$. Да разгледаме произволен пресек на тоа тело со рамнина паралелна со тие рамнини и дадена со равенката $x = t$, $a \le t \le b$. Пресекот ќе има плоштина P која очевидно ќе зависи единствено од t. Нека таа функционална врска на плоштината P од променливата t е непрекината функција на сегментот $[a, b]$ со ознака $P(t)$ (цртеж 11).

Нека π_n е една поделба на сегментот $[a, b]$ со делбени точки $a = x_0 < x_1 < x_2 <\ldots< x_n = b$ на еднакви растојанија $\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = d_n$ и нека на потсегментите $[x_{i-1}, x_i]$ функцијата $P(t)$ има најголеми вредности M_i и најмали вредности m_i, $i = \overline{1, n}$.



Цртеж 11

Соодветно на таа поделба телото е поделено на слоеви со рамнини $x = x_i$, $i = 0,n$. Да разгледаме произволен слој меѓу рамнините $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$ и соодветни цилиндри со плоштина на основите m_i односно M_i и висина Δx. Волумените на тие цилиндри ќе бидат еднакви на $m_i\Delta x$ односно $M_i\Delta x$ (на цртеж 11 се дадени само делови од цилиндрите). Со сумирање на сите волумени за $i = 1, n$ се добиваат сумите $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x$, односно $\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x$, кои всушност се сумите на Дарбу $s(\pi_n)$ и $S(\pi_n)$ за функцијата $P(t)$ во однос на поделбата π_n на сегментот $[a, b]$. Бидејќи $P(t)$ е непрекината функција, ќе постои бројот $\int_a^b P(t)dt$.

Од друга страна, волуменот на телото ќе биде меѓу сумите на Дарбу при која било поделба на сегментот $[a, b]$, па според тоа, земајќи го предвид граничниот процес при дефинирањето на определениот интеграл, можеме да заклучиме дека волуменот е еднаков на бројот $\int_a^b P(t)dt$.

***Пример* 2.14.** Да се пресмета волуменот на елипсоидот дефиниран со равенката $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ во Декартов просторен координатен систем.

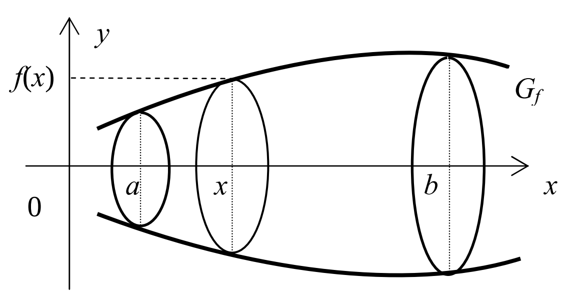
Решение: Нека пресекот на телото е добиен со рамнина нормална на оската x. Пресекот е дефиниран како елипса со полуоски $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ и $c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, каде $-a \le x \le a$. Плоштината на таа елипса е дадена со формулата

$$P(x) = \pi b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pi bc(1-\frac{x^2}{a^2}).$$

Според соодветната формула за волумен се добива

$$V = \pi bc\int_{-a}^{a}(1-\frac{x^2}{a^2})dx = 2\pi bc(x-\frac{x^3}{3a^2})\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Специјален случај ќе биде ротационо тело добиено со ротација на криволиниски трапез околу оската x. Ако криволинискиот трапез е образуван со крива која е график на функција f дадена со равенка $y = f(x)$, непрекината и ненегативна на сегментот $[a, b]$, тогаш плоштината на пресекот на ротационото тело со рамнина нормална на оската x ќе биде плоштина на круг со радиус $y = f(x)$, $x\in[a, b]$, т.е. $P(x) = \pi[f(x)]^2 = \pi y^2$, па во согласност со претходно добиената формула волуменот на ротационото тело ќе биде даден со формулата $V = \pi\int_a^b y^2dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx$ (цртеж 12).



Цртеж 12

Доколку функцијата f е дадена со параметарски равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, тогаш волуменот V на соодветното ротационо тело ќе биде даден со формулата

$$V = \pi\int_{\alpha}^{\beta}[y(t)]^2 x'(t)dt\,.$$

***Пример* 2.15.** Да се пресмета волуменот на телото (торус) што се добива со ротација на кривата составена од графици на функциите

$$f\colon\ f(x) = b + \sqrt{a^2-x^2}\,,\quad g\colon\ g(x) = b - \sqrt{a^2-x^2}\,,\quad -a \le x \le a,\quad b > a$$

(кружница), околу оската x.

$$V = \pi\int_{-a}^{a}(b+\sqrt{a^2-x^2}\,)^2dx - \pi\int_{-a}^{a}(b-\sqrt{a^2-x^2}\,)^2dx = 2\pi\int_{0}^{a}[(b+$$

$$\sqrt{a^2-x^2}\,)^2 - (b-\sqrt{a^2-x^2}\,)^2\,]dx = 8\pi b\int_{0}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= 8\pi ba^2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt = 2a^2b\pi^2$$

(замена $x = a\sin t$).

***Пример* 2.16.** Да се пресмета волуменот на телото што се добива со ротација на дел од астроида $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t\in[0, \pi]$, $a>0$, околу оската x.

Решение: Според соодветната формула

$$V = 2\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a^2\sin^6 t\,(-3a\cos^2 t\sin t)dt = \frac{32}{105}a^3\pi\,.$$

На сличен начин се добива и формулата за пресметување плоштина на ротационо тело, претходно дефинирано, без плоштината на основите, со

$$P = 2\pi\int_{a}^{b}f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\,.$$

***Дефиниција* 2.6.** Нека се дадени две реални функции φ и ψ од една реална променлива t, дефинирани на сегментот $[\alpha, \beta]$. Множеството точки $M(\varphi(t), \psi(t))$ во Декартов правоаголен координатен систем се вика рамнинска крива зададена со равенките $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и со почетна точка $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ и крајна точка $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$. Ако функциите φ и ψ се непрекинати на $[\alpha, \beta]$, тогаш кривата се вика непрекината крива.

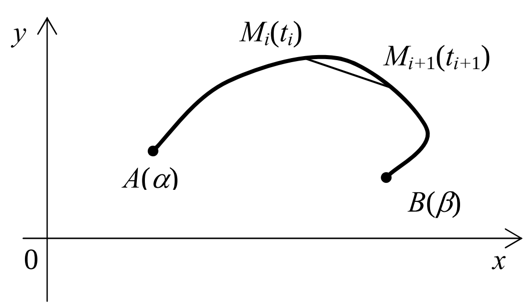
Под Жорданова проста крива се подразбира непрекината крива за која важи условот за $\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ да важи

$$t_1 \neq t_2 \Rightarrow M_1(\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq M_2(\varphi(t_2), \psi(t_2)).$$

Ако $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) \equiv B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$, тогаш велиме дека Жордановата крива е затворена, а ако функциите φ и ψ се непрекинато диференцијабилни ($\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ се непрекинати функции) на интервалот (α, β) и $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$ за $\forall t \in (\alpha, \beta)$, тогаш Жордановата крива се вика глатка Жорданова проста крива. Доколку тој услов е задоволен на конечен број подинтервали, тогаш Жордановата крива се вика по делови глатка крива.

Се поставува проблем да се најде формула за пресметување должина на една глатка Жорданова крива зададена со равенките $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Нека π_n е една произволна поделба на сегментот $[\alpha, \beta]$ со делбени точки $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = \beta$ и дијаметар $d_n = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i$,. На тие точки им одговараат точки од кривата $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$, каде што $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$, $i = 0, n$, при што $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$, $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$. Со тоа добиваме една искршена линија $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$ (цртеж 13).



Цртеж 13

Должините на отсечките $M_{i-1}M_i$ се дадени со

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}\,,$$

каде што $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, при што $x_i = \varphi(t_i)$, $y_i = \psi(t_i)$, $x_{i-1} = \varphi(t_{i-1})$, $y_{i-1} = \psi(t_{i-1})$, $i = 1, n$.

Според Лагранжовата теорема применета за функциите φ и ψ на сегментот $[t_{i-1}, t_i]$ ќе постојат $c_i, c_i^* \in (t_{i-1}, t_i)$, така што ќе важи $\Delta x_i = \varphi'(c_i)\Delta t_i$, $\Delta y_i = \psi'(c_i^*)\Delta t_i$, при што $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} > 0$, $i = 1, n$. Според тоа,

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{[\varphi'(c_i)]^2 + [\psi'(c_i^*)]^2}\,\Delta t_i\,,\ i = 1,n.$$

Со собирање на должините на сите отсечки од искршената линија ќе се добие нејзината должина

$$p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(c_i)]^2 + [\psi'(c_i^*)]^2}\,\Delta t_i\,.$$

Ако во последното равенство ставиме $c_i^* = c_i$, $i = 1, n$, тогаш ќе добиеме сума $\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi'(c_i)]^2 + [\psi'(c_i)]^2}\,\Delta t_i$, која е една интегрална сума $\sigma(\pi_n)$ за функцијата $\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}$ на сегментот $[\alpha, \beta]$ при поделбата π_n и соодветен конкретен избор на $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, n$. Бидејќи според условот таа функција е непрекината на $[\alpha, \beta]$, ќе постои определен интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$, кој ќе биде граница на интегралните суми при граничниот процес кога $d_n \to 0$. Може да се докаже дека тогаш и $\max\limits_{1\le i\le n} \overline{M_{i-1}M_i} \to 0$.

Навистина, според условот φ' и ψ' се ограничени функции на $[\alpha, \beta]$ и ќе постојат константи $K_1 > 0$ и $K_2 > 0$, така што за

$$\forall t \in [\alpha, \beta] \quad |\varphi'(t)| \le K_1\,, \quad |\psi'(t)| \le K_2.$$

Од равенствата

$$\overline{M_{i-1}M_i} = \sqrt{[\varphi'(c_i)]^2 + [\psi'(c_i^*)]^2}\,\Delta t_i$$

следуваат неравенствата

$$\overline{M_{i-1}M_i} \le K\cdot \Delta t_i \le K\cdot d_n\,, \forall i = 1,n,$$

каде $K = \sqrt{{K_1}^2 + {K_2}^2}$. Според тоа важи неравенството

$$\max_{1\le i\le n} \overline{M_{i-1}M_i} < K\cdot d_n$$

со што е докажано тврдењето.

На сличен начин може да се докаже и обратното, т.е. ако $\max\limits_{1\le i\le n} \overline{M_{i-1}M_i} \to 0$, тогаш $d_n \to 0$.

При тој граничен процес и должината на искршената линија p има граница еднаква на тој определен интеграл. За да се докаже тоа тврдење, доволно е да се докаже дека при тој граничен процес разликата $p - \sigma(\pi_n)$ се стреми кон нула. За таа цел се испитува оцената

$$| p - \sigma(\pi_n)| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \sqrt{[\varphi'(c_i)]^2 + [\psi'(c_i^*)]^2} - \sqrt{[\varphi'(c_i)]^2 + [\psi'(c_i)]^2} \right| \Delta t_i$$

и со користење на неравенството

$$\left| \sqrt{a^2 + b_1^2} - \sqrt{a^2 + b^2} \right| \le |b_1 - b|, \ \forall a, b, b_1 \in \mathrm{R},$$

се добива

$$|p - \sigma(\pi_n)| \le \sum_{i=1}^{n} | \psi'(c_i^*) - \psi'(c_i) | \Delta t_i .$$

Понатаму

$$\sum_{i=1}^{n} | \psi'(c_i^*) - \psi'(c_i) | \Delta t_i \le S(\pi_n) - s(\pi_n)$$

каде што $S(\pi_n)$ и $s(\pi_n)$ се горна и долна сума на Дарбу за функцијата ψ'. Бидејќи ψ' е интеграбилна функција на сегментот $[\alpha, \beta]$, според теорема 2.1 за $\forall\varepsilon > 0$ ќе постои $\delta > 0$, така што за сите поделби π_n со дијаметри $d_n < \delta$ важи неравенството $S(\pi_n) - s(\pi_n) < \varepsilon$. Според тоа важи и неравенството $| p - \sigma(\pi_n)| < \varepsilon$, од каде што произлегува тврдењето.

Значи, можеме да заклучиме дека должината на глатката крива може да се пресмета со формулата

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Со оваа формула можеме да дефинираме должина на глатка крива.

***Пример* 2.17.** Да се пресмета должината на првиот лак од циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t\in[0, 2\pi]$, $a > 0$.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\ dt\ = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 8a.$$

Нека сега кривата е зададена со равенката $y = f(x)$, $x\in[a, b]$, при што f и f' се непрекинати функции на интервалот (a, b). Земајќи го x за параметар и користејќи ја последната формула за должина на рамнинска крива, се добива формулата

$$L = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx\ .$$

Ако пак кривата е зададена со равенката $\rho = f(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha, \beta]$ во поларен координатен систем, тогаш во согласност со врските меѓу поларните и Декартовите координати се добиваат параметарските равенки на кривата $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$. Земајќи го φ за параметар и користејќи ја добиената формула за должина на рамнинска крива, се добива формулата

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi\,.$$

Пример **2.18.** Да се најде должината на лакот кој е график во поларен координатен систем на функцијата $\rho = a(1 + \cos\varphi)$, $a > 0$, $\varphi\in[0, 2\pi]$ (кардиоида).

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi\ = 4a\int_0^\pi \sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\ d\varphi\ = 8a.$$

Нека е дадена проста глатка Жорданова крива AB со равенките $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, при што се $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$, $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$. Ако на кривата AB се земе точка M која одговара на произволна вредност на параметарот t, тогаш во согласност со добиената формула за должина на крива должината на лакот AM е дадена со формулата

$$L(t) = \int_\alpha^t \sqrt{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2}\ du.$$

Значи, од произволноста на t може да се дефинира нова функција $s(t)$ на сегментот $[\alpha, \beta]$ со равенката

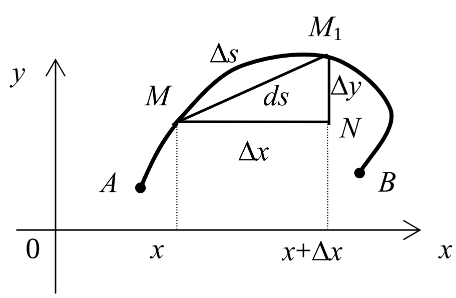
$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2}\, du,$$

која е строго монотоно растечка (должината на лакот е поголема со зголемување на t) и непрекината (според особината 2.12 кај Њутн-Лајбницовата формула, при што според условот подинтегралната функција е непрекината).

Така се доаѓа до релацијата $s'(t) = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} > 0$, од каде $s'^2(t) = [\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2$ и со множење со $dt^2 \neq 0$, земајќи ги предвид равенките $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и дефиницијата за првиот диференцијал, се добива релацијата

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (s'(t)dt = ds, \quad \varphi'(t)dt = dx, \quad \psi'(t)dt = dy).$$

Интересна е геометриската интерпретација. Имено, за нараснувањата Δx, Δy, Δs не важи на некој начин Питагорината теорема, туку за нивните главни делови – диференцијалите (цртеж 14).



Цртеж 14

Функцијата $s(t)$ е непрекината строго монотоно растечка функција, па според тоа има своја инверзна функција $t = w(s)$, дефинирана на $[0, L]$, каде што L е должината на кривата AB. Ако во параметарските равенки на кривата се стави $t = w(s)$, ќе се добијат равенките $x = \varphi(w(s)) = F(s)$, $y = \psi(w(s)) = G(s)$ кај кои параметар е самата должина $s \in [0, L]$ (природни равенки).

Да забележиме дека за конкретниот случај кај кривата AB, всушност за параметарот $t \in [\alpha, \beta]$ важи својството при негово растење да се зголемува (расте) и должината s односно $s(t)$, со што кривата AB е ориентирана со почетна точка A. Ако пак во параметарските равенки се воведе нов параметар τ со равенката $t = \chi(\tau)$, при што χ е непрекинато диференцијабилна функција на $[c, d]$, $\chi'(\tau) \neq 0$, $\forall \tau \in [c, d]$ и $\alpha = \chi(c)$, $\beta = \chi(d)$ ако $\chi'(\tau) > 0$, односно $\alpha = \chi(d)$, $\beta = \chi(c)$ ако $\chi'(\tau) < 0$, тогаш

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{ds}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{ds}{dt}\chi'(\tau) = \pm\sqrt{[\varphi'(\chi(\tau))]^2 + [\psi'(\chi(\tau))]^2},$$

односно $ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2}$, при што знакот "+" се зема ако $\chi'(\tau) > 0$, а знакот "–" се зема ако $\chi'(\tau) < 0$.

Математичкото дефинирање на определениот интеграл е последица на потребата да се обопшти третирањето на повеќе проблеми од примената. Покрај веќе разгледаните проблеми од геометријата (плоштина, волумен, должина на рамнинска крива), соодветни проблеми третирани во диференцијалната геометрија и примената во геодезијата, ќе наведеме уште три од нив.

***Пример* 2.19.** Нека е дадена функција $v(t)$ која ја дава законитоста на менувањето на брзината на една материјална точка во зависност од времето и нека таа е непрекината функција. Се поставува проблем да се најде должината S на патот што ќе го помине таа точка за некој временски интервал од $t = a$ до $t = b$. Претпоставуваме дека $v(t)$ е ненегативна функција на тој интервал.

Сегментот $[a, b]$ го делиме со поделба π_n со еквидинстантни делбени точки $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Во секој временски мал интервал (сегмент) $[t_k, t_{k+1}]$ земаме брзината да е константна и еднаква на $v(\xi_k)$, $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, n-1$. Од познатата формула $s = vt$ за пресметување должина на пат кога брзината е константна (праволиниско рамномерно движење) ќе добиеме $\Delta S_k = v(\xi_k)\Delta t_k$, каде што $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = \Delta t$, а ΔS_k е должината на патот што материјалната точка го поминала за време Δt. Со тоа добивме сума $\sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\Delta t$ која е всушност една интегрална сума $\sigma(\pi_n)$ за функцијата $v(t)$ за соодветна поделба π_n на сегментот $[a, b]$ и соодветен избор на точките $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, n-1$.

Јасно е дека вистинската должина S на патот ќе ја добиеме при граничен процес $\Delta t \to 0$. Од друга страна, определениот интеграл постои, бидејќи $v(t)$ е непрекината функција. Значи,

$$S = \lim_{\Delta t \to 0} \sigma(\pi_n) = \int_a^b v(t)dt.$$

***Пример* 2.20.** Нека материјална точка M се движи праволиниски вдолж права под дејство на променлива сила F. Се поставува проблем да се најде работата W која ја врши таа сила кога точката M се движи од положбата A до положбата B, т.е. поминува пат со должина S.

Нека правата е оската x со фиксен почеток 0, со точка A која е на растојание a од 0 и точка B која е на растојание b од точката 0, $a < b$. Нека големината односно јачината на силата F се менува во зависност од местоположбата на точката M која се наоѓа меѓу точките A и B и нека таа промена е дадена со непрекината функција $F(x)$, каде што $x \in [a, b]$.

Сегментот $[a, b]$ го делиме со поделба π_n со еквидистантни делбени точки $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. Во секој мал интервал (сегмент) $[x_k, x_{k+1}]$ земаме силата да е константна и еднаква на $F(\xi_k)$, $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, n-1$. Од механика е познато дека работата ΔW_k, што ја врши константната сила $F(\xi_k)$ на сегментот $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, n-1$, се пресметува со формулата $\Delta W_k = F(\xi_k)\, \Delta x$, каде што $\Delta x = \Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Со тоа добивме сума $\sum_{k=0}^{n-1} v(\xi_k)\Delta x_k$ која е, всушност, една интегрална сума $\sigma(\pi_n)$ за функцијата $F(x)$ за соодветна поделба на сегментот $[a, b]$ и соодветен избор на точките $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, n-1$. Јасно е дека вистинската работа W ќе ја добиеме при граничен процес $\Delta x \to 0$. Од друга страна, определениот интеграл постои, бидејќи $F(x)$ е непрекината функција. Значи, $W = \int_a^b F(x)dx$.

***Пример* 2.21.** Нека се дадени два точкести полнежа со количества електрицитет $q_1 > 0$ и $q_2 > 0$ кои се наоѓаат во точките M_1 и M_2, соодветно, и $r = \overline{M_1M_2}$. Се поставува проблем да се најде работата која ја врши некоја сила кога количеството електрицитет q_1 е придвижено од точката M_1 во точката M_2.

Според Coulomb-ов закон силата е дадена со формулата $F = k\dfrac{q_1q_2}{r^2}$, каде што r е растојание меѓу двата полнежа и k е константа. Тогаш со користење на формулата од претходниот пример 2.19, земајќи растојанијата од почетокот 0 до точките M_1 односно M_2 да бидат r_1 односно r_2, се добива формулата

$$W = \int_{r_1}^{r_2} k\frac{q_1 q_2}{r^2}dr = k\, q_1\, q_2\, (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}).$$

2.6. Несвојствени определени интеграли

При дефинирањето на определен интеграл претпоставивме дека интервалот на интеграција е конечен и дека подинтегралната функција на тој интервал е ограничена. Меѓутоа, во примена се среќаваат определени интеграли кај кои барем еден од овие два ограничувачки услова не е задоволен. Тие интеграли се викаат сингуларни или несвојствени интеграли.

Ќе разгледаме два основни вида.

I. Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана на бескрајниот полусегмент $[a, +\infty)$ и интеграбилна на кој било сегмент $[a, t]$, $a < t < +\infty$. Тогаш несвојствениот интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ постои, односно конвергира, ако постои $\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$ и во тој случај

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx\, .$$

Ако граничната вредност не постои, тогаш несвојствениот интеграл не постои, односно дивергира.

Аналогно се дефинираат и следните интеграли:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^b f(x)dx\, ;\ (u<b),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^c f(x)dx + \lim_{t\to+\infty}\int_c^t f(x)dx\, ,$$

каде што c е кој било конечен реален број.

Ако постои $\lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_{-t}^{t} f(x)dx$, тогаш таа гранична вредност се вика главна вредност на сингуларниот интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ и се бележи со:

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_{-t}^{t} f(x)dx \qquad \text{(v.p. = valeur principal).}$$

Во тој случај се вели дека функцијата f е интеграбилна на R според Коши.

***Пример* 2.22.** Најди $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$.

$$I = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_{1}^{t}\frac{dx}{x^2} = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{1}^{t} = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t}+1\right) = 1.$$

***Пример* 2.23.** Нека S_0, S_1, ... S_n , ... е низа од плоштини на ликови ограничени со оската x и полубрановите на кривата дадена како график на функцијата $y = e^{-\alpha x}\sin\beta x$, $x > 0$. Да се покаже дека таа низа е геометриска со количник $q = e^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}$.

Од неопределен интеграл е познато дека

$$\int e^{-\alpha x}\sin\beta x dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2+\beta^2}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x) + C.$$

Со користење на овој интеграл и на Њутн-Лајбницовата формула се добива

$$S_n = \int\limits_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}} |e^{-\alpha x}\sin\beta x|\,dx = (-1)^n\int\limits_{\frac{n\pi}{\beta}}^{\frac{(n+1)\pi}{\beta}} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}e^{-\frac{\alpha n\pi}{\beta}}\left(1+e^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}\right),$$

од каде се добива $\frac{S_n}{S_{n-1}} = e^{-\frac{\alpha\pi}{\beta}}$.

II. Нека е даден интеграл од видот $\int_a^b f(x)dx$, каде што подинтегралната функција во $x = a$ добива вредност ∞, т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$, а во другите точки од сегментот $[a, b]$ е ограничена. Ако за секој позитивен реален број ε функцијата е интеграбилна на конечниот сегмент $[a + \varepsilon, b]$ и ако постои граничната вредност $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$, тогаш велиме дека несвојствениот интеграл $\int_a^b f(x)dx$ конвергира и е еднаков на таа гранична вредност.

Аналогно се дефинира конвергенцијата на несвојствен интеграл кога функцијата добива вредност ∞ во точката $x = b$ т.е. $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$, со егзистенција на граничната вредност $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

Во случај кога функцијата добива вредност ∞ во точката $x = c$, каде што $a < c < b$ т.е. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$, а во другите точки од сегментот $[a, b]$ е ограничена, тогаш за конвергенција на несвојствениот интеграл се бара егзистенција на граничните вредности

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx\ , \qquad \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx,$$

каде што $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, и во тој случај

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Притоа за $\forall\varepsilon > 0$ и за $\forall\delta > 0$ е потребно функцијата f да е интеграбилна и на сегментите $[a, c - \varepsilon]$, $[c + \delta, b]$.

Постојат повеќе критериуми за егзистенција на несвојствени интеграли, односно за испитување на нивна конвергенција.

Еден од поважните несвојствени интеграли е Ојлер-Поасоновиот интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$, кој има важно место во теоријата на веројатноста и ќе биде пресметан понатаму со помош на двојни интеграли.

Г Л А В А   В Т О Р А

РЕАЛНА ФУНКЦИЈА ОД ДВЕ И ПОВЕЌЕ РЕАЛНИ ПРОМЕНЛИВИ. ГРАНИЧНИ ПРОЦЕСИ

§3. ГРАНИЧНИ ПРОЦЕСИ

3.1 Евклидови простори

***Дефиниција* 3.1.** Нека е даден Декартов производ $\mathrm{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathrm{R},\ i = 1,n\}$. Множеството подредени n-торки R^n, во кое се дефинирани операциите собирање и множење со скалар на следниот начин:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \quad cx = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n), \quad \forall x, y \in \mathrm{R}^n,$$

каде што $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $x_i \in \mathrm{R}$, $y_i \in \mathrm{R}$, $c \in \mathrm{R}$, $i = 1,n$, се вика n-димензионален векторски простор. Притоа $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$. Елементите од тоа множество ќе ги викаме точки, а соодветните реални броеви од n-торките координати на тие точки.

Очевидна е аналогијата со реалниот простор R^3, со дефиниран просторен правоаголен Декартов координатен систем .

***Дефиниција* 3.2.** Нека е даден n-димензионален координатен векторски простор R^n и нека дефинираме пресликување d: $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ со равенството

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

за секоја подредена двојка (x, y) од директниот Декартов производ $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^n$ на елементи $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathrm{R}^n$. Тогаш двојката ($R^n$, d) се вика n-димензионален Евклидов простор, а пресликувањето d е растојание меѓу точките x и y .

И овде е очевидна аналогијата со реалниот простор R^3, со просторен правоаголен Декартов координатен систем, па дури и со R кога растојанието е апсолутна вредност.

***Теорема* 3.1.** (Коши-Шварцово неравенство.) За кои било реални броеви $a_1, a_2,..., a_n, b_1, b_2,..., b_n$ е задоволено следното неравенство:

$$[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i]^2 \le [\sum_{i=1}^{n} a_i^2][\sum_{i=1}^{n} b_i^2].$$

Доказ: За кое било $\lambda \in R$ важи неравенството $\sum_{i=1}^{n} (a_i\lambda + b_i)^2 \ge 0$ (како сума од ненегативни броеви), односно неравенството

$$[\sum_{i=1}^{n} a_i^2]\lambda^2 + 2[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i]\lambda + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \ge 0.$$

Бидејќи левата страна е квадратен трином во однос на λ, неговата дискриминанта е секогаш непозитивна. Значи,

$$[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i]^2 - [\sum_{i=1}^{n} a_i^2][\sum_{i=1}^{n} b_i^2] \le 0,$$

од каде се добива бараното неравенство ($\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0$).

***Теорема* 3.2.** За кои било реални броеви $a_1, ... , a_n$, $b_1, ... , b_n$ е задоволено следното неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 \le [\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\,]^2.$$

Доказ: Ако неравенството на Коши - Шварц го помножиме со 2 и потоа на двете страни го додадеме збирот $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$, ќе добиеме

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2,$$

од каде се добива бараното неравенство.

Со помош на овие две теореми се покажува дека и во R^n за $n > 3$ исто така важи таканареченото неравенство на триаголник, т.е. дека $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ за $\forall x, y, z \in R^n$.

Имено, ако $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $z = (z_1, z_2, .., z_n) \in R^n$ и ако ставиме $x_i - z_i = a_i$, $z_i - y_i = b_i$, тогаш $a_i + b_i = x_i - y_i$, $i = 1,n$, со замена во последното неравенство се добива

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq [\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i - y_i)^2}\,]^2$$

или $[d(x, y)]^2 \leq [d(x, z) + d(z, y)]^2$, од каде следува бараното неравенство.

Уште да забележиме дека така дефинираното растојание d ги има и следните својства:

а) $d(x, y) > 0$, за $x \neq y$, и $d(x, x) = 0$; б) $d(x, y) = d(y, x)$,

кои веднаш произлегуваат од самата дефиниција.

***Дефиниција* 3.3.** Множеството $\{x \mid x \in R^n, d(x, a) < r\}$, каде што $a = (a_1, a_2, ..., a_n) \in R^n$ и $r > 0$, се вика отворена топка во R^n со центар во a и радиус r. Ако пак важи неравенството $d(x, a) \leq r$, тогаш тоа множество се вика затворена топка.

***Дефиниција* 3.4.** Нека $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) \in R^n$, $\delta_i \geq 0$, $i = 1, n$. Множеството $\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x \in R^n, |x_i - a_i| < \delta_i, i = 1,n\}$ се вика отворен паралелопипед во просторот R^n. Ако пак важат неравенствата $|x_i - a_i| \leq \delta_i$, $i = 1,n$, тогаш тоа множество се вика затворен паралелопипед .

***Дефиниција* 3.5.** Нека $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $b = (b_1, b_2, ..., b_n) \in R^n$ и $a_i < b_i$, $i = 1,n$. Множеството $\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x \in R^n, a_i < x_i < b_i, i = 1,n\}$ се вика отворен паралелопипед во просторот R^n . Ако пак важат неравенствата $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1,n$, тогаш тоа множество се вика затворен паралелопипед .

***Дефиниција* 3.6.** Отворена топка со радиус ε и центар во a се вика ε-околина на точката a и се означува со $V(a, \varepsilon)$.

***Дефиниција* 3.7.** Отворен паралелопипед дефиниран со точките a и δ, односно со точките a и b, се вика паралелопипедна околина, со ознака $V(a, \delta)$ односно $V(a, b)$.

***Дефиниција* 3.8.** Нека $\Delta > 0$. Δ-околина се вика множеството $\{x \mid x \in R^n, d(x, 0) > \Delta\}$.

***Дефиниција* 3.9.** Нека $E \subseteq \mathrm{R}^n$. Точката $x \in \mathrm{R}^n$ се вика внатрешна точка на E ако постои нејзина околина $\mathrm{V}(x, \delta)$ која е подмножество на E.

***Дефиниција* 3.10.** Нека $E \subseteq \mathrm{R}^n$. Точката $x \in \mathrm{R}^n$ се вика гранична точка на E ако секоја нејзина околина содржи барем една точка од E и барем една точка која не припаѓа на E.

***Дефиниција* 3.11.** Множеството $E \subseteq \mathrm{R}^n$ се вика отворено множество ако сите негови точки се внатрешни точки.

***Дефиниција* 3.12.** Множеството од сите гранични точки на едно множество $E \subseteq \mathrm{R}^n$ се вика негова граница. Унијата од множеството E и неговата граница се вика затворено множество.

***Дефиниција* 3.13.** Нека $x, y \in \mathrm{R}^n$. Множеството $\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid x, y \in \mathrm{R}^n, 0 \le \lambda \le 1\}$ се вика отсечка.

***Дефиниција* 3.14.** Множеството $E \subseteq \mathrm{R}^n$ се вика конвексно ако за секое $x, y \in E$ и $0 \le \lambda \le 1$ важи $\lambda x + (1 - \lambda)y \in E$.

***Дефиниција* 3.15.** Множеството $E \subseteq \mathrm{R}^n$ се вика едноставно сврзливо (едносврзно, сврзливо, едноставно) ако кои било две негови точки можат да се поврзат со непрекината крива која припаѓа на E.

Да забележиме дека постојат и повеќесврзни множества.

***Дефиниција* 3.16.** Множеството $E \subseteq \mathrm{R}^n$ се вика ограничено ако постои $K \in \mathrm{R}^+$, така што за секои $x, y \in E$ важи $d(x, y) < K$.

***Дефиниција* 3.17.** Секое отворено едноставно сврзливо множество $E \subseteq \mathrm{R}^n$ се вика област. Областа заедно со својата граница се вика затворена област.

Поради очигледната целосна аналогија со геометриската интерпретација точката $0(0, 0, \dots, 0) \in \mathrm{R}^n$ ќе ја викаме координатен почеток, а множеството точки $\{e_i = (0, 0, \dots, x_i, \dots, 0) \mid x_i \in \mathrm{R}, i = 1,n\}$ ќе го викаме i-та координатна оска.

3.2. Низи од точки во Евклидов простор

***Дефиниција* 3.18.** Нека е даден m-димензионален Евклидов простор R^m. Ако според некое правило на секој природен број n му одговара една точка M_n од R^m, тогаш велиме дека е зададена низа од точки во R^m, со ознака $\{M_n\}$, каде што M_n се вика општ член на низата.

***Дефиниција* 3.19.** Низата $\{M_n\}$ е конвергентна ако постои точка $A\in R^m$, наречена граница на низата, таква што за кој било произволен позитивен реален број ε може да се најде природен број $n_0(\varepsilon)$ таков што $\forall n > n_0$ е задоволено неравенството $d(M_n, A) < \varepsilon$. Притоа пишуваме $M_n\to A$ кога $n\to\infty$, или $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = A$.

***Теорема* 3.3.** Низата $\{M_n\}$, $M_n(x_1^n, x_2^n,..., x_m^n)$ конвергира кон точката $A(a_1, a_2,..., a_m)$ ако и само ако низите од реални броеви $\{x_1^n\}, \{x_2^n\},..., \{x_m^n\}$ конвергираат соодветно кон реалните броеви a_1, a_2,..., a_m.

Доказ: Нека $M_n\to A$ кога $n\to\infty$. Тоа значи дека за кој било произволен позитивен реален број ε може да се најде природен број $n_0(\varepsilon)$ таков што $\forall n > n_0$ е задоволено неравенството $d(M_n, A) < \varepsilon$, односно

$$\sqrt{(x_1^n - a_1)^2 + (x_2^n - a_2)^2 + ... + (x_m^n - a_m)^2} < \varepsilon .$$

Бидејќи

$$|x_i^n - a_i| < \sqrt{(x_1^n - a_1)^2 + (x_2^n - a_2)^2 + ... + (x_m^n - a_m)^2} < \varepsilon, \ \forall i = 1,n,$$

ќе бидат задоволени неравенствата $|x_i^n - a_i| < \varepsilon$, $\forall i = 1,n$, од што заклучуваме дека низите $\{x_1^n\}, \{x_2^n\}, ..., \{x_m^n\}$ конвергираат соодветно кон границите $a_1, a_2,..., a_m$.

Обратно, нека низите $\{x_1^n\}, \{x_2^n\},..., \{x_m^n\}$ конвергираат кон $a_1, a_2,..., a_m$, соодветно. Тогаш за произволно $\varepsilon > 0$ можат да се најдат природни броеви $n_i(\varepsilon)$ такви што за $\forall n > n_i(\varepsilon)$ ќе важат соодветно неравенствата $|x_i^n - a_i| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$, $i = 1,m$. Земајќи $n_0 = \max\{n_1, n_2, ... , n_m\}$, последните неравенства ќе важат истовремено $\forall n > n_0$. Бидејќи $\forall n > n_0$

$$d(M_n, A) = \sqrt{(x_1^n - a_1)^2 + (x_2^n - a_2)^2 + ... + (x_m^n - a_m)^2} <$$
$$\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m} + \frac{\varepsilon^2}{m} ... + \frac{\varepsilon^2}{m}} = \sqrt{m\frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon,$$

со егзистенцијата на n_0 покажавме дека низата $\{M_n\}$ конвергира кон точката A.

Последната теорема овозможува сите својства на низите од реални броеви, како и поимот Кошиева низа, да можат да се пренесат и кај низи од точки во R^m. Сепак ќе наведеме една дефиниција и една теорема.

***Дефиниција* 3.20.** Низата $\{M_n\}$ е ограничена ако постои реален број $a > 0$ таков што за секој природен број n е задоволено неравенството $d(M_n, 0) \leq a$, каде што $0(0, 0,..., 0) \in \mathrm{R}^m$ е координатниот почеток во R^m.

***Теорема* 3.4.** Од секоја ограничена низа може да се издвои конвергентна подниза.

Дефиницијата на подниза е идентична со соодветната дефиниција на подниза кај низите од реални броеви.

Геометриската интерпретација на дефиницијата на конвергентна низа исто така е слична со соодветната геометриска интерпретација на дефиницијата на конвергентна низа кај низите од реални броеви, со тоа што овде околината е отворена топка.

***Дефиниција* 3.21.** Низата $\{M_n\}$ се стреми кон бесконечност кога $n \to \infty$ ако $\forall \Delta > 0$ постои $n_0 \in \mathrm{N}$, така што $\forall n > n_0$ важи $d(M_n, 0) > \Delta$.

3.3. Реална функција од две и повеќе реални променливи

***Дефиниција* 3.22.** Нека $E \subseteq \mathrm{R}^n$ е област. Ако на секоја точка од областа E според некое правило □ одговара единствен соодветен реален број, тогаш велиме дека е зададена реална функција од n реални променливи од множеството R^n во множеството R. Областа E се вика дефинициона област (домен), а множеството

$$f(E) = \{u \mid u \in \mathrm{R},\ u = f(x),\ x = (x_1, x_2,..., x_n) \in E,\ x_i \in \mathrm{R}\} \subseteq \mathrm{R}$$

се вика множество од вредностите на функцијата f (кодомен) .

Вредноста на функцијата f во точката $x \in \mathrm{R}^n$ се бележи со $f(x)$ или со $f(x_1, x_2,..., x_n)$, каде што $x = (x_1, x_2,..., x_n)$. Ако се работи со ознаката $M(x_1, x_2,..., x_n) \in \mathrm{R}^n$ за точка $x = (x_1, x_2,..., x_n)$, тогаш вредноста се бележи и со $f(M)$. За $n = 2$ вообичаена е ознаката $z = f(x, y)$.

***Дефиниција* 3.23.** Нека f е реална функција од n реални променливи дефинирана на областа $E\subseteq R^n$. Тогаш множеството од подредени двојки $\{(x, f(x))|x\in E\}$ се вика график на функцијата f.

Да забележиме дека графикот всушност е множество од подредени $(n+1)$-торки од реални броеви, т.е. е подмножество од R^{n+1}, бидејќи $(x_1, x_2, \dots, x_n, f(x_1, x_2, \dots, x_n))\in R^{n+1}$.

Ако $n = 2$, тогаш графикот може геометриски да се интерпретира како множество точки $M(x, y, z)$, $z = f(x, y)$, во реалниот простор R^3, така што за некои функции (линеарна функција) графикот би бил рамнина или, општо, некоја површина во просторот.

Како и функцијата од една реална променлива, така и функцијата од повеќе реални променливи може да биде зададена на повеќе начини (аналитички со формула експлицитно или имплицитно, табеларно, описно и сл.). Во случај кога функцијата е дадена со формула без однапред зададена дефинициона област, тогаш дефиниционата област се определува како множество од оние точки од соодветниот простор за кои таа формула овозможува да се добие соодветна вредност на функцијата во тие точки.

Збирот, разликата, производот и количникот на две функции се дефинираат на ист начин како и кај реалните функции од една реална променлива. Од посебен интерес се класата конвексни функции, класата полиномни функции, а посебно квадратните форми.

***Дефиниција* 3.24.** Нека f е реална функција од n реални променливи, дефинирана на областа $E\subset R^n$. За функцијата f велиме дека е ограничена ако е ограничено множеството $f(E)$.

***Дефиниција* 3.25.** Нека на областа $E_1\subset R^k$ се зададени m реални функции φ_i, $i = 1,m$, од k реални променливи t_j, $j = 1,k$. Нека понатаму f е реална функција од m реални променливи x_i, $i = 1,m$, дефинирана на областа E, зададена со равенката $u = f(x_1, x_2,\dots, x_m)$, каде што $x_i = \varphi_i(t_1, t_2,\dots, t_k)$. Тогаш велиме дека е дефинирана сложена реална функција w, од k реални променливи t_j, $j = 1,k$, зададена со равенката

$$w(t_1, t_2,\dots, t_k) = f(\varphi_1(t_1, t_2,\dots, t_k), \varphi_2 (t_1, t_2,\dots, t_k), \dots, \varphi_m (t_1, t_2,\dots, t_k)),$$

дефинирана на областа E_1 .

Дефиниционата област на функцијата f е областа $E \subset R^m$, $E = \{(x_1, x_2,\dots, x_m)\in R^m \mid x_i = \varphi_i(t_1, t_2,\dots, t_k),\ i = 1,m,\ (t_1, t_2,\dots, t_k)\in E_1\}$. Значи, сложената функција всушност е зададена со m реални функции од k

реални променливи и една реална функција од m реални променливи.

***Дефиниција* 3.26.** Нека f е функција дадена со равенката $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$, дефинирана на областа $E \subset \mathrm{R}^m$, и нека $A(a_1, a_2,..., a_m)$ е внатрешна точка од E. Функцијата f има локален максимум (минимум) во точката A ако постои околина (паралелопипедна) на точката A во која припаѓаат точки $M(x_1, x_2,..., x_m)$, дефинирани со неравенствата $|x_j - a_j| < \delta_j$, $\delta_j > 0$, $j = 1,m$ (или околина $\mathrm{V}(A, \delta)$ во која припаѓаат точките M за кои $d(M, A) < \delta$), така што за сите точки M од таа околина важи неравенството $f(M) \le f(A)$ ($f(M) \ge f(A)$).

***Дефиниција* 3.27.** Нека f е функција дадена со равенката $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$, дефинирана на областа $E \subset \mathrm{R}^m$ и нека $f(E) \subset \mathrm{R}$ е нејзиниот домен. Ако постои точка $A_1 \in E$ ($A_2 \in E$) таква што $\inf f(E) = f(A_1)$ ($\sup f(E) = f(A_2)$), тогаш бројот $f(A_1)$ ($f(A_2)$) се нарекува најмала (најголема) вредност на функцијата f во областа E (глобални екстреми).

***Пример* 3.1.** Функцијата

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} + \ln(x^2 + y^2 - 1)$$

има дефинициона област дефинирана со неравенствата $x^2 - y^2 \ge 0$ и $x^2 + y^2 - 1 > 0$.

***Пример* 3.2.** Функцијата $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, R > 0$, има дефинициона област дефинирана со неравенството $R^2 - x^2 - y^2 \ge 0$.

3.4. Гранична вредност и непрекинатост на реални функции од две и повеќе реални променливи

***Дефиниција* 3.28** (Хајне). Нека е дадена реална функција f од m реални променливи со равенката $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$ или $u = f(M)$, $M(x_1, x_2,..., x_m)$, дефинирана на област $E \subseteq \mathrm{R}^m$, и нека $A(a_1, a_2,..., a_m) \in \mathrm{R}^m$ е точка која може, но не мора, да припаѓа на E со својство во која било нејзина околина да има барем една точка од E различна од A.

Конечниот реален број b се вика гранична вредност на функцијата f во точката A ако за која било конвергентна низа од точки $\{M_n\}$, $M_n \in E$, $M_n \ne A$, $\forall n \in \mathrm{N}$, со граница A, соодветната низа од реални броеви $\{f(M_n)\}$ е конвергентна со граница b.

Дефиниција* 3.28 (Коши). Нека е дадена реална функција f од m реални променливи со равенката $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$ или $u = f(M)$, $M(x_1, x_2,..., x_m)$, дефинирана на област $E \subseteq R^m$, и нека $A(a_1, a_2,..., a_m) \in R^m$ е точка која може, но не мора, да припаѓа на E со својство во која било нејзина околина да има барем една точка од E различна од A.

Конечниот реален број b се вика гранична вредност на функцијата f во точката A (или кога M се стреми кон A) ако за кој било позитивен реален број ε може да се најде реален број $\delta > 0$, така што за која било точка $M \in E$ која го задоволува условот $0 < d(M, A) < \delta$ да важи неравенството $|f(M) - b| < \varepsilon$.

Како ознаки се користат

$$\lim_{M \to A} f(M) = b, \qquad \lim_{\substack{x_1 \to a_1 \\ x_2 \to a_2 \\ ---- \\ x_m \to a_m}} f(x_1, x_2, ..., x_m) = b.$$

Доказот за еквивалентноста на двете дефиниции се спроведува на ист начин како и кај функциите со една променлива.

Лесно се докажува и следното тврдење.

***Теорема* 3.5.** Нека функциите f и g, дефинирани на исто множество $E \subseteq R^m$ имаат во точката A конечни гранични вредности b и c, соодветно. Тогаш и функциите $f + g$, $f - g$, fg и $\dfrac{f}{g}$, дефинирани на ист начин како кај функциите со една променлива, имаат во точката A гранични вредности $b + c$, $b - c$, bc, $\dfrac{b}{c}$, соодветно. Притоа дополнителен услов за последното тврдење е $c \neq 0$.

***Дефиниција* 3.29.** Нека е дадена реална функција f од m реални променливи со равенката $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$ или $u = f(M)$, $M(x_1, x_2,..., x_m)$, дефинирана на област $E \subseteq R^m$. Нека областа E на која е дефинирана функцијата f ја има особината за кое било $\Delta > 0$ секогаш да постои точка $M \in E$ која се наоѓа надвор од топка со радиус Δ и центар во $0(0,0,...,0) \in R^m$.

Конечниот реален број b се вика гранична вредност на функцијата f кога $M \to \infty$ ако за кој било позитивен реален број ε може да се најде реален број $\Delta > 0$, така што за која било точка

$M \in E$, која го задоволува условот $d(M, 0) > \Delta$, да важи неравенството $|f(M) - b| < \varepsilon$. Тогаш се користи ознака $\lim\limits_{M\to\infty} f(M) = b$.

***Дефиниција* 3.30.** Функцијата f се нарекува бесконечно мала функција кога $M \to A$, ако $\lim\limits_{M\to A} f(M) = 0$.

Ако функцијата f има гранична вредност b кога $M \to A$, тогаш функцијата α дефинирана со $\alpha(M) = f(M) - b$ ќе биде бесконечно мала кога $M \to A$. Значи, можеме да запишеме $f(M) = b + \alpha(M)$, каде што $\lim\limits_{M\to A} \alpha(M) = 0$.

Ако $\alpha(M)$ е бесконечно мала функција кога $M \to A$, $\beta(M)$ е ограничена функција во некоја околина на точката A, тогаш $(\alpha \cdot \beta)(M)$ е бесконечно мала функција кога $M \to A$, т.е.

$$\lim_{M\to A} \alpha(M) \cdot \beta(M) = 0.$$

Симболите на Ландау се дефинираат на ист начин како кај функција од една променлива.

***Дефиниција* 3.31.** Нека $m = 2$ и нека функцијата $z = f(x, y)$ е дефинирана во некоја правоаголна околина на точката $M_0(x_0, y_0)$ зададена со неравенствата $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$, при што f може, но не мора, да биде дефинирана и во M_0. Нека y^* го задоволува неравенството $0 < |y^* - y_0| < d_2$. Дефинираме нова функција f_1 од една променлива x со равенката $f_1(x) = f(x, y^*)$ на множеството зададено со неравенството $|x - x_0| < d_1$ (освен можеби во x_0). Нека постои гранична вредност $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)$ која е иста со граничната вредност $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y^*-\mathrm{const}}} f(x, y^*)$. Нека понатаму постојат вака дефинираните гранични вредности за сите вредности y кои го задоволуваат неравенството $0 < |y - y_0| < d_2$, со што можеме да дефинираме нова функција φ со равенството $\varphi(y) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y-\mathrm{const}}} f(x, y)$.

Нека постои и гранична вредност $\lim\limits_{y\to y_0} \varphi(y) = b$.

Тогаш велиме дека постои сукцесивна (последователна) гранична вредност b за функцијата f во точката M_0 со ознака $\lim\limits_{y\to y_0} \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y)$.

Аналогно се дефинира и сукцесивната гранична вредност со ознака $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$.

***Теорема* 3.6.** Нека функцијата $z = f(x, y)$ е дефинирана во некоја правоаголна околина на точката $M_0(x_0, y_0)$ зададена со неравенствата $|x - x_0| < d_1$, $|y - y_0| < d_2$, при што f може, но не мора, да биде дефинирана и во M_0. Нека f има гранична вредност $b = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ во точката M_0. Ако постојат граничните вредности $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y-\text{const}}} f(x,y)$ за кое било y кое го задоволува неравенството $0 < | y - y_0| < d_2$ и граничните вредности $\lim\limits_{\substack{y\to y_0\\ x-\text{const}}} f(x,y)$ за кое било x кое го задоволува неравенството $0 < |x - x_0| < d_1$, тогаш постојат сукцесивни граници и се еднакви на b.

Ако наместо дефиниционата област E земеме подмножество $E_1\subset E$ така што точката M_0 да го има својството во која било нејзина околина да има барем една точка од E_1 различна од M_0, тогаш според дефиницијата за гранична вредност (Коши) можеме да заклучиме дека функцијата f ќе ја има истата гранична вредност во точката M_0.

Од овој заклучок произлегува дека, ако не постои гранична вредност во точката M_0 кога се земе некое подмножество E_1 од E, тогаш за функцијата f не постои граничната вредност во точката M_0. Ако пак постојат гранични вредности во точката M_0 на две подмножества E_1 и E_2 од E, но тие се различни, тогаш исто така за функцијата f не постои гранична вредност во точката M_0.

***Пример* 3.3.** Нека $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, $E = \mathrm{R}^2 \setminus\{(0, 0)\}$. Нека $E_1 = \{(x, y)\in\mathrm{R}^2\ |x = t, y = t, t\in\mathrm{R}\setminus\{0\}\}$. Тогаш граничната вредност на функцијата f во точката $(0, 0)$ на множеството E_1 ќе биде

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in E_1}} f(x, y) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2 t}{t^4 + t^2} = 0.$$

Ако $E_2 = \{(x, y)\in\mathrm{R}^2\ |y = x^2, x\in\mathrm{R}\setminus\{0\}\}$, тогаш

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E_2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}.$$

Значи,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in E_2}} f(x,y),$$

па според тоа $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ не постои.

Да се покаже и со низи $\{\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\}$, $\{\frac{1}{n},\frac{1}{n}\}$.

На овој пример може да се покаже дека не е точно тврдењето дека граничната вредност постои ако постои во сите правци (во поларни координати, не зависи од φ) и е еднаква.

Секако дека овој критериум може само да го исклучи постоењето на граничната вредност. Ако пак граничните вредности на две множества се еднакви, тоа не мора да значи дека постои граничната вредност. Овде можат да се употребуваат и сукцесивните гранични вредности. Ако пак постои граничната вредност во точката M_0 (според дефиницијата), тогаш не мора да постојат и сите гранични вредности во однос на подмножества, а специјално и не мора да постојат и сукцесивните гранични вредности.

***Пример* 3.4.** Покажи дека постои $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$, а не постојат сукцесивните гранични вредности.

***Пример* 3.5.** Со користење на поларни координати (по правци) покажи дека $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ не постои.

***Пример* 3.6.** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\frac{x^4}{x^2+y^2} = ?$

Решение: Од неравенството $0 \le \dfrac{x^4}{x^2+y^2} \le x^2$, за $(x, y) \neq (0, 0)$, ќе имаме $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} = 0$, бидејќи $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2 = 0$.

Всушност, за функцијата $f(x, y) = x^2$, $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, што значи дека $|f(M) - 0| = |x^2 - 0| = |x|\,|x| < \sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$ ќе важи за секоја точка $M(x, y)$ за која $|x - 0| < \delta$, $|y - 0| < \delta$.

***Дефиниција* 3.32.** Нека функцијата f е дефинирана на областа $E \subset \mathrm{R}^m$ и нека $A \in E$. Функцијата f е непрекината во точката A ако постои гранична вредност во точката A еднаква на $f(A)$.

Бидејќи $A = \lim\limits_{M\to A} M$, можеме да заклучиме дека за непрекинати функции ќе важи симболиката $\lim\limits_{M\to A} f(M) = f(\lim\limits_{M\to A} M) = f(A)$.

Соодветните дефиниции на гранична вредност според Хајне и Коши можат лесно да се преформулираат и за непрекинатост со тоа што наместо гранична вредност b треба да се стави вредноста $f(A)$, и да се испуштаат ограничувањата $M_n \neq A$ кај Хајне и $d(M_n, A)>0$ кај Коши.

***Дефиниција* 3.33.** Функцијата f дефинирана на $E \subset \mathrm{R}^m$ е непрекината на E ако е непрекината во секоја точка од E.

Нека е дадена реална функција f од m реални променливи со равенката $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$, дефинирана во некоја околина на точката A и нека точката M припаѓа на таа околина. Разликата $f(M) - f(A)$, со ознака Δu, се вика нараснување на функцијата $u = f(M)$ во точката A. Ако $A(a_1, a_2,..., a_m)$ и $M(x_1, x_2,..., x_m)$, со ознаките $x_1 - a_1 = \Delta x_1$, ..., $x_m - a_m = \Delta x_m$ ќе добиеме $\Delta u = f(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2,..., a_m + \Delta x_m) - f(a_1, a_2,..., a_m)$.

Лесно може да се покаже дека функцијата f е непрекината во A ако и само ако нараснувањето Δu е бесконечно мала функција кога $\Delta x_i \to 0$, $i = 1,m$, т.е. кога $\lim\limits_{(\Delta x_1,...,\Delta x_m)\to(0,...,0)} \Delta u = 0$.

И овде важат аритметичките операции над непрекинати функции, како и теоремата за запазување на знакот и други својства како кај реална функција од една реална променлива.

***Теорема* 3.7.** Нека со функциите φ_i, $i = 1,m$, и функцијата f е зададена сложена функција w. Ако функциите φ_i, $i = 1,m$, се непрекинати во точката $A(a_1, a_2,..., a_k)$, а функцијата f е непрекината во точката $B(b_1, b_2,..., b_m)$, каде што $b_i = \varphi_i(a_1, a_2,..., a_k)$, $i = 1,m$, тогаш сложената функција w е непрекината во точката A.

Доказ: Нека $\varepsilon > 0$. Тогаш поради непрекинатоста на функцијата f во точката B ќе постои $\delta > 0$, така што за секоја точка $M(x_1, x_2,.., x_m)$, за чии координати важат неравенствата $|x_i - b_i| < \delta$, $i = 1,m$, важи неравенството $|f(M) - f(B)| < \varepsilon$.

Понатаму, бидејќи φ_i, $i = 1,m$ се непрекинати функции во точката A, следува дека за тоа $\delta > 0$ постои $\eta > 0$, така што за секоја точка $T(t_1, t_2,..., t_k)$, за чии координати важат неравенствата $|t_j - a_j| < \eta$, $j = 1,k$, важи неравенството $|\varphi_i(T) - \varphi_i(A)| < \delta$, односно $|x_i - b_i| < \delta$, каде што $i = 1,m$ $(\varphi_i(T) = x_i, \varphi_i(A) = b_i)$.

Значи, за произволно $\varepsilon > 0$ постои $\eta > 0$ (преку егзистенцијата на δ), така што за секоја точка $T(t_1, t_2,..., t_k)$, за чии координати важат неравенствата $|t_j - a_j| < \eta$, $j = 1,k$, важи неравенството $|f(M) - f(B)| < \varepsilon$, односно неравенството $|f(x_1(T),..., x_m(T)) - f(x_1(A),..., x_m(A))| < \varepsilon$, односно $|w(T) - w(A)| < \varepsilon$, со што е докажано тврдењето.

***Теорема* 3.8.** Ако функцијата f е непрекината на некоја затворена и ограничена област $E \subset \mathrm{R}^m$, тогаш е ограничена на E.

***Теорема* 3.9.** Ако функцијата f е непрекината на некоја затворена и ограничена област $E \subset \mathrm{R}^m$ и $f(E)$ е нејзин кодомен (множество вредности), тогаш таа ја достигнува својата најголема и најмала вредност на E, т.е. постојат точки $A_1, A_2 \in E$ така што

$$f(A_1) = \max f(E), \qquad f(A_2) = \min f(E).$$

***Дефиниција* 3.34.** Функцијата f е рамномерно непрекината во затворената област $E \subset \mathrm{R}^m$ ако за секое $\varepsilon > 0$ постои $\delta > 0$, така што за кои било две точки M_1, M_2 за кои $d(M_1, M_2) < \delta$ следува $d(f(M_1), f(M_2)) < \varepsilon$.

***Теорема* 3.10.** Ако функцијата f е непрекината на некоја затворена и ограничена област $E \subset \mathrm{R}^m$, тогаш таа е рамномерно непрекината на E.

Г Л А В А   Т Р Е Т А

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ НА РЕАЛНИ ФУНКЦИИ ОД ДВЕ И ПОВЕЌЕ РЕАЛНИ ПРОМЕНЛИВИ СО НЕКОИ ПРИМЕНИ

§4. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛ ОД ПРВ РЕД

4.1. Први парцијални изводи и прв диференцијал на реални функции од две и повеќе реални променливи

***Дефиниција* 4.1.** Нека е дадена функција f дефинирана на областа $E\subset \mathrm{R}^2$ со равенката $z = f(x, y)$ и нека $A(x_0, y_0)\in E$ е точка со особина да постои некоја нејзина околина $\mathrm{V}(A, \delta)$ која се содржи во E. Нека $\Delta x \neq 0$ е нараснување на променливата x така што точките $M(x_0 + \Delta x, y_0)$ секогаш да припаѓа во соодветната околина $\mathrm{V}(A, \delta)$.

Ако постои гранична вредност на функцијата F, зададена со равенката $F(\Delta x) = \dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ како реална функција од една реална променлива Δx дефинирана за сите вредности на $\Delta x \neq 0$ (не е дефинирана во $\Delta x = 0$) за кои точките $M(x_0 + \Delta x, y_0)$ припаѓаат во соодветната околина $\mathrm{V}(A, \delta)$, кога $\Delta x\to 0$, тогаш велиме дека функцијата f има прв парцијален извод во однос на променливата x во точката A, еднаков на таа гранична вредност, со ознаки

$$\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x},\quad \frac{\partial f(A)}{\partial x},\quad f'_x(x_0, y_0),\quad f'_x(A)\ .$$

На ист начин се дефинира и првиот парцијален извод на функцијата f во однос на променливата y во точката A, т.е. како гранична вредност (ако постои) на функцијата F^*, зададена со равенката $F^*(\Delta y) = \dfrac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$ како реална функција од една реална променлива Δy дефинирана за сите вредности на $\Delta y \neq 0$ (не е дефинирана во $\Delta y = 0$) за кои точките $M(x_0, y_0 + \Delta y)$ припаѓаат во соодветната околина $V(A, \delta)$, кога $\Delta y \to 0$, со ознаки

$$\frac{\partial f}{\partial y},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},\ \frac{\partial f(A)}{\partial y},\ f'_y(x_0, y_0),\ f'_y(A),\ z'_y .$$

Дефиниција* 4.1 (општа). Нека е дадена функција f дефинирана на областа $E \subset R^m$ со равенката $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$ и нека $A(a_1, a_2,..., a_m) \in E$ е точка со својство да постои некоја нејзина околина $V(A, \delta)$ која се содржи во E. Нека $\Delta x_k \neq 0$ е нараснување на променливата x_k, $k = \overline{1,m}$, така што секогаш точката $M(a_1, a_2,..., a_k + \Delta x_k,..., a_m)$ да припаѓа во соодветната околина $V(A, \delta)$.

Ако постои гранична вредност на функцијата F, зададена со равенката $F(\Delta x_k) = \dfrac{f(a_1, a_2,..., a_k + \Delta x_k,..., a_m) - f(a_1, a_2,..., a_m)}{\Delta x_k}$ како реална функција од една реална променлива Δx_k дефинирана за сите вредности на $\Delta x_k \neq 0$ (не е дефинирана во $\Delta x_k = 0$) за кои точките $M(a_1, a_2,..., a_k + \Delta x_k,..., a_m)$ припаѓаат во соодветната околина $V(A, \delta)$, кога $\Delta x_k \to 0$, тогаш велиме дека функцијата f има прв парцијален извод во однос на променливата x_k во точката A, еднаков на таа гранична вредност, со ознаки

$$\frac{\partial f}{\partial x_k},\frac{\partial u}{\partial x_k},\frac{\partial f(a_1, a_2,..., a_m)}{\partial x_k},\frac{\partial f(A)}{\partial x_k},\quad f'_{x_k}(a_1,..., a_m), f'_{x_k}(A), u'_{x_k} .$$

Од самата дефиниција е јасно дека првите парцијални изводи на функции од повеќе реални променливи всушност се први изводи на функции од една реална променлива, сметајќи ги другите променливи за константи. Имено, $f(x_0, y)$, $f(x, y_0)$ и $f(a_1,..., x_k,..., a_m)$ се функции од една реална променлива y, x, x_k, соодветно.

***Пример* 4.1.** Ако $z = \mathrm{arctg}(xy^2)$, тогаш

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + x^2 y^4} y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + x^2 y^4} 2xy .$$

Да забележиме дека ознаките за парцијалните изводи не треба да се сметаат за дропки како ознаките за први изводи кај функциите од една реална променлива. Подоцна ќе биде јасно и зошто. Исто така да забележиме дека кај функциите од една реална променлива егзистенцијата на првиот извод повлекува директно нејзина непрекинатост во соодветната точка (па и диференцијабилност), додека кај функциите од повеќе реални променливи тоа не е случај.

***Пример* 4.2.** Нека е дадена Mendeleev-Clapeyron-овата равенка $pv = RT$, каде p, v, T се променливи кои имаат свое значење во термодинамиката. Да се најде производот $\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p}$.

Бидејќи $\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}$ $\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p}$ $\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R}$, се добива $\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial p} = -1$.

Овој производ има важна примена во термодинамиката.

***Пример* 4.3.** Функцијата $z = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{за } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & , \text{за } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$

во точката $A(0, 0)$ има први парцијални изводи, но не е непрекината во A. Навистина,

$$\frac{\partial z(0,0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x \cdot 0}{(\Delta x)^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0,$$

$$\frac{\partial z(0,0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y)}{\Delta y} = 0,$$

додека $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{x\cdot x}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$, а $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \frac{x\cdot y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$.

***Дефиниција* 4.2.** Нека е дадена функција f со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана на областа $E \subset \mathrm{R}^2$ и нека $A(x_0, y_0)$, заедно со некоја своја околина $\mathrm{V}(A, \delta)$ припаѓа на E.

Ако за сите нараснувања h и k на променливите x и y, $h^2+k^2 \neq 0$, за кои точките $M(x_0 + h, y_0 + k)$ припаѓаат во $\mathrm{V}(A, \delta)$, постојат реални броеви A_1 и A_2 така што соодветните нараснувања $\Delta z = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ на функцијата во точката A можат да се претставаат во вид $\Delta z = A_1 h + A_2 k + o(\rho)$ или во вид $\Delta z = A_1 h + A_2 k + \alpha_1 h + \alpha_2 k$, каде што $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$, а $\alpha_1 = \alpha_1(h, k)$, $\alpha_2 = \alpha_2(h, k)$ се бесконечно мали реални функции од две реални променливи h и k кога $(h, k)\to(0, 0)$ ($o(\rho)$ – симбол на Ландау дефиниран со $\alpha = o(\beta) \Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{\alpha}{\beta} = 0$), тогаш велиме дека f е диференцијабилна функција во точката A .

Двете равенства можат да се претставаат и со егзистенција на граничните вредности:

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta z - A_1 h - A_2 k}{\rho} = 0, \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \frac{\Delta z - A_1 h - A_2 k}{\alpha_1 h + \alpha_2 k} = 0,$$

каде што $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \alpha_i(h,k) = 0$, $i = 1,2$, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \rho = 0$.

Да забележиме дека броевите A_1 и A_2 не зависат од нараснувањата h и k. Сумата $A_1 h + A_2 k$ се вика главен дел на нараснувањето на диференцијабилната функција f во точката A и е линеарна хомогена функција во однос на променливите h и k.

На ист начин се дефинира и диференцијабилност на функции од m променливи.

***Дефиниција* 4.3.** Нека f е функција зададена со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана на областа $E\subset \mathrm{R}^2$, чии точки го имаат својството да постои околина која припаѓа во E (отворено множество, внатрешни точки). Нека f има прв парцијален извод во однос на x во секоја точка од E. Тогаш дефинираме на E нова функција наречена изводна функција f'_x со $f'_x(x, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\forall(x, y)\in E$.

На ист начин се дефинира и изводната функција f'_y со $f'_y(x, y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $\forall(x, y)\in E$, секако под услов да постојат првите парцијални изводи во однос на y во секоја точка од E.

***Теорема* 4.1.** Нека f е функција зададена со равенката $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$, дефинирана на областа $E\subset \mathrm{R}^m$. Ако f е диференцијабилна во точката $A(a_1, a_2,..., a_m)\in E$, тогаш во таа точка постојат сите нејзини први парцијални изводи, при што $\frac{\partial f(A)}{\partial x_i} = A_i$, $i = 1,m$.

Доказ: Нека $m = 2$, $z = f(x, y)$, $A(x_0, y_0)$. Тогаш

$$\Delta z = A_1h + A_2k + \alpha_1 h + \alpha_2 k, \qquad \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \alpha_i(h,k) = 0,\ i = 1,2.$$

Ако $k = 0$, $h \neq 0$ (според дефиниција равенството важи за сите вредности на h и k кои не се истовремено еднакви на нула, т.е. $h^2 + k^2 \neq 0$), тогаш $\Delta z = A_1h + \alpha_1 h$, односно $f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = A_1h + \alpha_1 h$ или

$$\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - A_1 = \alpha_1 .$$

Бидејќи постои $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \alpha_1(h,k) = \lim\limits_{h\to 0} \alpha_1(h,0) = 0$, ќе постои и гранична вредност од левата страна, т.е.

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - A_1\right] = 0,$$

што значи дека $\dfrac{\partial f(A)}{\partial x} = A_1$ (A_1 не зависи од h и k, а тоа значи дека при овој граничен процес е константа).

На ист начин за $h = 0$, $k \neq 0$, се добива $\dfrac{\partial f(A)}{\partial y} = A_2$.

Доказот за $m > 2$ е идентичен. Обратното не мора да важи.

***Теорема* 4.2.** Нека f е функција зададена со равенката $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$, дефинирана на областа $E \subset \mathrm{R}^m$. Ако f е диференцијабилна функција во точката $A(a_1, a_2,..., a_m) \in E$, тогаш таа е непрекината во A.

Доказ: Од условот за диференцијабилност се добива дека $\Delta u = f(M) - f(A) = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_m\Delta x_m + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + ... + \alpha_m\Delta x_m$, каде што $\lim\limits_{(\Delta x_1, \Delta x_2,.., \Delta x_m)\to(0,0,...,0)} \alpha_i(\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_m) = 0$, за $\forall \Delta x_i$, така што $M(a_1 + \Delta x_1, a_2 + \Delta x_2,..., a_m + \Delta x_m) \in \mathrm{V}(A,\delta) \subset E$, $i = 1,m$.

Бидејќи постои гранична вредност од десната страна кога $(\Delta x_1, \Delta x_2,..., \Delta x_m) \to (0, 0,..., 0)$, ќе постои и гранична вредност и од левата страна, т.е. $\lim\limits_{(\Delta x_1, \Delta x_2,.., \Delta x_m)\to(0,0,...,0)} \Delta u = 0$, што е и услов f да биде непрекината во точката A.

***Теорема* 4.3** (Доволни услови за диференцијабилност). Нека f е функција зададена со равенката $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$, дефинирана на областа $E \subset \mathrm{R}^m$. Ако f има први парцијални изводи во однос на сите променливи во сите точки од некоја околина $\mathrm{V}(A, \delta)$ на точката

$A(a_1, a_2, ..., a_m) \in E$ и ако сите први изводни функции се непрекинати функции во точката A, тогаш f е диференцијабилна функција во точката A.

Доказ: Нека $m = 2$, $z = f(x, y)$, $A(x_0, y_0)$. Нека h и k се нараснувања на променливите x и y така што точките $M(x_0 + h, y_0 + k)$ да припаѓаат во соодветната околина $V(A, \delta)$ на точката A во која се дефинирани изводните функции f'_x и f'_y. Тогаш соодветното нараснување на функцијата може да се запише во вид

$$\Delta z = [f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] + [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)].$$

Изразот $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)$ претставува всушност нараснување на нова функција φ од една променлива x дефинирана на сегмент со крајни точки x_0 и $x_0 + k$ со равенката $\varphi(x) = f(x, y_0 + k)$. Бидејќи f има први парцијални изводи, и функцијата φ ќе има прв извод во соодветниот интервал, односно ќе биде диференцијабилна во тој интервал.

Тогаш, применувајќи ја теоремата на Лагранж, за функцијата φ на тој сегмент ќе постои точка $c_1 = x_0 + \theta_1 h$, $0 < \theta_1 < 1$, која припаѓа на тој интервал, така што ќе важи $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \varphi'_x(c_1)h$, односно $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) = f'_x(c_1, y_0 + k)\,h$ (бидејќи $\varphi'_x(x) = f'_x(x, y_0 + k)$).

Аналогно за изразот во втората заграда $f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ се добива егзистенција на точка $c_2 = y_0 + \theta_2 k$, $0 < \theta_2 < 1$, која припаѓа на интервал со крајни точки y_0 и $y_0 + k$, така што ќе важи $f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f'_y(x_0, c_2)k$.

Бидејќи според условот изводните функции f'_x и f'_y се непрекинати во точката A, ќе важи

$$f'_x(c_1, y_0 + k) = f'_x(x_0, y_0) + \alpha_1(h, k), \qquad f'_y(x_0, c_2) = f'_y(x_0, y_0) + \alpha_2(h, k),$$

каде што $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ k \to 0}} \alpha_i(h,k) = 0$, $i = 1,2$.

Значи, на крајот добивме

$$\Delta z = f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k + \alpha_1(h, k)h + \alpha_2(h, k)k,$$

од што следува дека f е диференцијабилна функција во точката A. Всушност ја добивме егзистенцијата на A_1 и A_2 и равенството, при што немаше ограничување за h и k (освен припадноста на точките во соодветната околина).

***Пример* 4.4.** Функцијата f дадена со равенките

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \quad \text{за } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ и} \qquad f(0, 0) = 0$$

не е диференцијабилна во точката $A(0, 0)$, бидејќи, иако постојат првите парцијални изводни функции f'_x, f'_y во некоја околина на точката A, тие не се и непрекинати функции во таа околина.

Навистина,

$$f'_x(x, y) = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad f'_y(x, y) = \frac{x^2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \text{за } x^2 + y^2 \neq 0,$$

и според дефиницијата за извод

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2 \cdot 0}{h^2 + 0^2} - 0}{h} = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0.$$

Граничната вредност $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f'_x(x, y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x \cdot x^3}{(x^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2}$ е различна од вредноста на изводната функција f'_x во точката A, која е $f'_x(0, 0) = 0$, што значи дека изводната функција f'_x има прекин во точката A.

На сличен начин се покажува дека изводната функција f'_y има прекин во точката $A(0, 0)$.

***Дефиниција* 4.4.** Нека f е функција зададена со равенката $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$, дефинирана на областа $E \subset \mathrm{R}^m$, диференцијабилна во точката $A(a_1, a_2,..., a_m) \in E$ и нека Δx_i, $i = 1,m$ се нараснувања на променливите x_i, $i = 1,m$ во точката A.

Главниот линеарен дел од соодветното нараснување на функцијата во таа точка се вика прв диференцијал на функцијата f во однос на нараснувањата Δx_i, $i = 1,m$, во точката A, со ознаки du, $df(A)$, df, $df(a_1, a_2,..., a_m)$. Значи,

$$du = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_m\Delta x_m = \frac{\partial f(A)}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2}\Delta x_2 + ... + \frac{\partial f(A)}{\partial x_m}\Delta x_m.$$

Ако $A_i = 0$, $i = 1,m$, тогаш велиме дека диференцијалот е 0 во таа точка.

На ист начин како кај функциите од една променлива и овде може да се оправда равенството $\Delta x_i = dx_i$, $i = 1,m$, така што ја добиваме конечната релација:

$$du(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2}\, dx_2 + ... + \frac{\partial f(A)}{\partial x_m}\, dx_m .$$

4.2. Први парцијални изводи од сложена функција

***Теорема* 4.4.** Нека е дадена функција f со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана на областа $E \subset \mathrm{R}^2$, диференцијабилна во секоја точка на E (диференцијабилна на отворено множество E). Нека понатаму φ и ψ се дадени реални функции од една реална променлива t со равенките $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и диференцијабилни на интервалот (α, β), со особина $\forall t \in (\alpha, \beta)$, $(\varphi(t), \psi(t)) \in E$. Нека w е сложена функција дефинирана на (α, β) со равенката $w(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$. Нека $A(x_0, y_0) \in E$ и нека $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, каде што $t_0 \in (\alpha, \beta)$.

Тогаш w е диференцијабилна функција во точката t_0 и важи

$$\frac{dw(t_0)}{dt} = \frac{\partial z(A)}{\partial x}\varphi'_t(t_0) + \frac{\partial z(A)}{\partial y}\psi'_t(t_0) .$$

Доказ: Нека $\Delta t \neq 0$ е нараснување на променливата t во точката t_0 со својство $t_0 + \Delta t \in (\alpha, \beta)$ и нека Δx и Δy се соодветните нараснувања на функциите φ и ψ, т.е. $\Delta x = \varphi(t_0 + \Delta t) - \varphi(t_0)$, $\Delta y = \psi(t_0 + \Delta t) - \psi(t_0)$.

Бидејќи според условот f е диференцијабилна во A, ќе важи

$$\Delta f(A) = \Delta z(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(A)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y,$$

каде што $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha_i(\Delta x, \Delta y) = 0$, $i = 1,2$. Со делење на последното равенство со $\Delta t \neq 0$ ќе добиеме

$$\frac{\Delta z(A)}{\Delta t} = \frac{\partial f(A)}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f(A)}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} .$$

Ако $\Delta t \to 0$, тогаш и $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, бидејќи φ и ψ се непрекинати функции и ќе постои гранична вредност од десната страна, од што произлегува и егзистенција на гранична вредност и од левата страна. Бидејќи

$$\Delta z(A) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(\varphi(t_0 + \Delta t),$$

$$\psi(t_0 + \Delta t)) - f(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = w(t_0 + \Delta t) - w(t_0),$$

добиваме

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta w(t_0)}{\Delta t}=\frac{\partial z(A)}{\partial x}\varphi_t'(t_0)+\frac{\partial z(A)}{\partial y}\psi_t'(t_0)+0+0$$

и оттука

$$\frac{dw(t_0)}{dt}=\frac{\partial z(A)}{\partial x}\varphi_t'(t_0)+\frac{\partial z(A)}{\partial y}\psi_t'(t_0)\,.$$

Значи, можеме да заклучиме дека и сложената функција е диференцијабилна во точката t_0 (поради егзистенцијата на соодветна гранична вредност, т.е. на првиот извод), што значи дека е и непрекината во таа точка.

***Теорема* 4.5.** Нека е дадена функција f со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана на областа $E\subset\mathrm{R}^2$, диференцијабилна во секоја точка на E (диференцијабилна на отворено множество E). Нека $A(x_0, y_0)\in E$ има особина да постои нејзина околина $\mathrm{V}(A, \delta_1)\subset E$.

Нека сега φ и ψ се дадени реални функции од две реални променливи u и v со равенките $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ и диференцијабилни на некоја околина $\mathrm{V}(B, \delta_2)$ на точката $B(u_0, v_0)$, $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$, со особина $\forall(u, v)\in\mathrm{V}(B, \delta_2) \Rightarrow (\varphi(u, v), \psi(u,v))\in\mathrm{V}(A, \delta_1)$.

Нека w е сложена функција дефинирана на $\mathrm{V}(B, \delta_2)$ со равенката $w(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$. Тогаш w е диференцијабилна функција во точката B и важи

$$\frac{\partial w(B)}{\partial u}=\frac{\partial z(A)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi(B)}{\partial u}+\frac{\partial z(A)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi(B)}{\partial u}\,,$$

$$\frac{\partial w(B)}{\partial v}=\frac{\partial z(A)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi(B)}{\partial v}+\frac{\partial z(A)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi(B)}{\partial v}\,.$$

Доказ: Да претпоставиме дека v е константа и за сложената функција w, сега како функција од една променлива u, да ја примениме веќе добиената релација од претходната теорема за прв извод во точката B. Притоа да забележиме дека и функциите φ и ψ ќе бидат третирани како функции од една променлива u.

Тогаш ќе постои прв парцијален извод на сложената функција w во однос на променливата u во точката B и ќе ја добиеме следната релација:

$$\frac{\partial w(B)}{\partial u}=\frac{\partial z(A)}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi(B)}{\partial u}+\frac{\partial z(A)}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi(B)}{\partial u}\ .$$

За u = константа на ист начин се добива и релацијата за првиот парцијален извод на сложената функција w во однос на променливата v во точката B:

$$\frac{\partial w(B)}{\partial v}=\frac{\partial z(A)}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi(B)}{\partial v}+\frac{\partial z(A)}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi(B)}{\partial v}.$$

Од забелешката кај првиот случај следува дека и првите парцијални изводи на функциите φ и ψ се непрекинати во B, па според соодветната теорема 4.3 и сложената функција е диференцијабилна во точката B (бидејќи има непрекинати први парцијални изводи).

Овие релации често се користат во следниот скратен вид:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Во општ случај ќе ја искажеме следната теорема:

***Теорема* 4.6.** Нека е дадена функција f со равенката $u = f(x_1. x_2,\dots , x_m)$, дефинирана на областа $E\subset\mathrm{R}^m$, диференцијабилна во секоја точка на E (диференцијабилна на отворено множество E). Нека $A(a_1,\ a_2,\dots,\ a_m)\in E$ е точка со особина да постои нејзина околина $\mathrm{V}(A,\ \delta_1)\subset E$.

Нека φ_i се дадени реални функции од k реални променливи со равенките $x_i = \varphi_i(t_1,\ t_2,\dots,\ t_k)$, $i = 1,m$, и диференцијабилни на некоја околина $\mathrm{V}(B,\ \delta_2)$ на точката $B(b_1,\ b_2,\dots,\ b_k)$, $a_i = \varphi_i(b_1,\ b_2,\dots,\ b_k)$, $i = 1,m$, со особина

$$\forall(t_1,\dots,\ t_k)\in\mathrm{V}(B,\ \delta_2) \Rightarrow (\varphi_1(t_1,\dots,\ t_k),\ \varphi_2(t_1,\dots,\ t_k),\dots,\ \varphi_m(t_1,\dots,\ t_k))\in\mathrm{V}(A,\ \delta_1).$$

Нека w е сложена функција дефинирана на $\mathrm{V}(B,\ \delta_2)$ со равенката

$$w(t_1,\ t_2,\dots,\ t_k) = f(\varphi_1(t_1,\ t_2,\dots,\ t_k),\ \varphi_2(t_1,\ t_2,\dots,\ t_k),\ \dots,\ \varphi_m(t_1,\ t_2,\dots,\ t_k)).$$

Тогаш w е диференцијабилна во точката B и нејзините први парцијални изводи се определени со формулите:

$$\frac{\partial w(B)}{\partial t_i}=\frac{\partial u(A)}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1(B)}{\partial t_i}+\frac{\partial u(A)}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2(B)}{\partial t_i}+\dots+\frac{\partial u(A)}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial \varphi_m(B)}{\partial t_i},\ i = 1,m,$$

односно

$$\frac{\partial u}{\partial t_i}=\frac{\partial u}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial t_i}+\frac{\partial u}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial t_i}+\dots+\frac{\partial u}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial x_m}{\partial t_i},\ i = 1,m,$$

со соодветни забелешки.

4.3. Инваријантност на формата на првиот диференцијал

Нека w е сложена функција дефинирана со функциите f, φ_i, $i = 1,m$, при што $u = f(x_1, x_2,\dots, x_m)$, $x_i = \varphi_i(t_1, t_2,\dots, t_k)$, $i = 1,m$.

Нека f е диференцијабилна во точката $A(a_1, a_2,\dots, a_m)$ и φ_i, $i = 1,m$, се диференцијабилни во точката $B(b_1, b_2,\dots, b_k)$, каде што $a_i = \varphi_i(b_1, b_2,\dots, b_k)$, $i = 1,m$.

Тогаш, според дефиницијата, првиот диференцијал на сложената функција w, дадена со равенката

$$w(t_1, t_2,\dots, t_k) = f(\varphi_1(t_1, t_2,\dots, t_k), \varphi_2(t_1, t_2,\dots, t_k),\dots, \varphi_m(t_1, t_2,\dots, t_k)),$$

диференцијабилна во точката B, е даден со формулата:

$$dw = \frac{\partial w(B)}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial w(B)}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial w(B)}{\partial t_k} dt_k.$$

Од друга страна, првите парцијални изводи на сложената функција w се дадени со формулите

$$\frac{\partial w(B)}{\partial t_i} = \frac{\partial u(A)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi_1(B)}{\partial t_i} + \frac{\partial u(A)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi_2(B)}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u(A)}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \varphi_m(B)}{\partial t_i}$$

или

$$\frac{\partial w(B)}{\partial t_i} = \frac{\partial u(A)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1(B)}{\partial t_i} + \frac{\partial u(A)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2(B)}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u(A)}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial x_m(B)}{\partial t_i}, \; i = 1,k,$$

и со нивна замена во формулата за првиот диференцијал со средување се добива релацијата:

$$dw = \frac{\partial u(A)}{\partial x_1} [\frac{\partial x_1(B)}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1(B)}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_1(B)}{\partial t_k} dt_k] + \dots +$$
$$+ \frac{\partial u(A)}{\partial x_m} [\frac{\partial x_m(B)}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m(B)}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_m(B)}{\partial t_k} dt_k].$$

Изразите во средните загради всушност се први диференцијали на функциите φ_i, $i = 1,m$, во точката B, со што се добива конечната формула:

$$dw = \frac{\partial u(A)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u(A)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u(A)}{\partial x_m} dx_m,$$

односно

$$dw = \frac{\partial f(A)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f(A)}{\partial x_m}dx_m,$$

која е со иста форма како и првиот диференцијал од функцијата f во точката A ако $x_1, x_2, ..., x_m$ се сметаат за независно променливи (а не функции φ_i, $i = \overline{1,m}$).

Ова особина на инваријантност на формата на прв диференцијал го оправдува и записот $\frac{\partial w}{\partial u} \equiv \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$, во кој сложената функција w се идентификува со функцијата z како една од функциите од кои самата е составена. Сепак треба секогаш за тоа да се води сметка, бидејќи во суштина се работи за различни функции.

Да забележиме уште дека овие правила за парцијални изводи од сложена функција (како и правилата за изводи воопшто) се применуваат обично во произволна точка, со што како резултат се добива повторно функција, а не број. Секогаш сепак треба да се има предвид дека правилата се изведени на начин кај кој изводите се броеви (гранични вредности) и тоа треба да се поврзе со изводните функции и нивна егзистенција во множество.

***Пример* 4.5.** Да се најде dz ако $z = e^{-x-2y}$ во случај кога x и y се независни променливи и во случај кога меѓу нив постои функционална врска $y = x^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^{-x-2y})(-1), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (e^{-x-2y})(-2), \quad dz = -e^{-x-2y}\,dx - 2\,e^{-x-2y}\,dy,$$

$$dz = -\,e^{-x-2x^2}(1 + 4x)dx.$$

Овде формално сложената функција е $z(x) = w(x) = e^{-x-2x^2}$.

***Пример* 4.6.** Да се најде dz ако $z = e^{x^2+y^2}$ во случај кога x и y се независни променливи и во случај кога се функции од една реална променлива t дефинирани со равенките $x = t$, $y = t^2$.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 2x\,e^{x^2+y^2}\,dx + 2y\,e^{x^2+y^2}\,dy,$$

односно

$$dz = (2te^{t^2+t^4} + 4t^3e^{t^2+t^4})dt\,.$$

Овде формално сложената функција е $z(t) = w(t) = e^{t^2+t^4}$.

***Особина* 4.1.** Нека u и v се две реални функции дадени со равенките $u = f_1(x_1, x_2,..., x_m)$, $v = f_2(x_1, x_2,..., x_m)$, диференцијабилни во точката $A(a_1, a_2,..., a_m)$. Тогаш важи $d(cu) = cdu$, c е константа; $d(u \pm v) = du \pm dv$; $d(u\cdot v) = udv + vdu$; $d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, при што сите диференцијали се земени во точката A.

Доказот се сведува на дефиницијата на првиот диференцијал и соодветните особини на првите парцијални изводи. Сепак, правилото за диференцијал од производ ќе го докажеме и со користење на инваријантноста на формата на првиот диференцијал. Ќе дефинираме реална функција w од две реални променливи u, v со равенката $w(u, v) = u\cdot v$. Тогаш

$$d(u\cdot v) = \frac{\partial(uv)}{\partial x}dx + \frac{\partial(uv)}{\partial y}dy = (\frac{\partial u}{\partial x}v + u\frac{\partial v}{\partial x})dx + (\frac{\partial u}{\partial y}v + u\frac{\partial v}{\partial y})dy =$$

$$(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy)v + (\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy)u = vdu + udv.$$

Истото може да се докаже и на следниот начин. Бидејќи $\frac{\partial w}{\partial u} = v$, $\frac{\partial w}{\partial v} = u$, за првиот диференцијал ќе добиеме:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + + \frac{\partial w}{\partial v}dv = vdu + udv.$$

Значи, $d(u\cdot v) = vdu + udv$.

Првиот диференцијал се вика и тотален диференцијал.

***Теорема* 4.7.** Нека е дадена равенката $F(x, y) = 0$. Ако функцијата F е диференцијабилна во некоја околина $\mathrm{V}(A, \delta)$ на точката $A(x_0, y_0)$, каде што $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ и $F(x_0, y_0) = 0$, тогаш постои правоаголник $\Delta = \{(x, y)|\ |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\} \subset \mathrm{V}(A, \delta)$ кој дефинира функција f со равенката $y = f(x)$, диференцијабилна на множеството $\{x \mid |x - x_0| < a\}$ на кое $F(x, f(x)) \equiv 0$.

***Пример* 4.7.** (Извод од имплицитно зададена функција.) Нека реалната функција f од една реална променлива е зададена имплицитно со равенката $F(x, y) = 0$, каде што $y = f(x)$, при што функцијата F, како реална функција од две реални променливи, е диференцијабилна во точката $A(x_0, y_0)$, каде што $y_0 = f(x_0)$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ и f е диференцијабилна во точката x_0.

Тогаш според правилото за извод од сложената функција w, дефинирана со равенката $w(x) = F(x, f(x))$, $w(x) \equiv 0$, ќе важи

$$\frac{dw(x_0)}{dx} = \frac{\partial F(A)}{\partial x}\frac{dx(x_0)}{dx} + \frac{\partial F(A)}{\partial y}\frac{dy(x_0)}{dx}.$$

(Доволно е во релацијата за извод од сложена функција да се земе $x = t = \varphi(t)$, $y = f(t) = \psi(t)$.) Значи,

$$0 = \frac{\partial F(A)}{\partial x} + \frac{\partial F(A)}{\partial y}\frac{dy(x_0)}{dx},$$

од каде што се добива првиот извод

$$f'(x_0) \equiv \frac{dy(x_0)}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F(A)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(A)}{\partial y}}.$$

Нека сега f е реална функција од две реални променливи x, y зададена имплицитно со равенката $F(x, y, z) = 0$, каде што $z = f(x, y)$. Нека реалната функција F од три реални променливи x, y, z е диференцијабилна во точката $A(x_0, y_0, z_0)$, а функцијата f е диференцијабилна во точката $B(x_0, y_0)$, при што $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, $z_0 = f(x_0, y_0)$. Тогаш се добива

$$0 = \frac{\partial w(B)}{\partial x} = \frac{\partial F(A)}{\partial x}\frac{dx(x_0)}{dx} + \frac{\partial F(A)}{\partial y}\frac{dy(x_0)}{dx} + \frac{\partial F(A)}{\partial z}\frac{\partial z(B)}{\partial x}$$

и

$$0 = \frac{\partial w(B)}{\partial y} = \frac{\partial F(A)}{\partial x}\frac{dx(x_0)}{dy} + \frac{\partial F(A)}{\partial y}\frac{dy(x_0)}{dy} + \frac{\partial F(A)}{\partial z}\frac{\partial z(B)}{\partial y},$$

од каде се добива

$$\frac{\partial z(B)}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F(A)}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(A)}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z(B)}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F(A)}{\partial y}}{\dfrac{\partial F(A)}{\partial z}},$$

при што $w(x, y) = F(x, y, f(x, y))$, $w(x, y) \equiv 0$. (Доволно е во релацијата за извод од сложена функција да се земе $x = u = \varphi(u, v)$, $y = v = \psi(u, v)$.)

4.4.Геометриско толкување на првите парцијални изводи . Извод по правец.

***Дефиниција* 4.5.** Нека f е функција дадена со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана на областа $E\subset\mathrm{R}^2$. Ако f е диференцијабилна на E, тогаш нејзиниот график G_f во реалниот простор со Декартов правоаголен координатен систем се вика глатка површина.

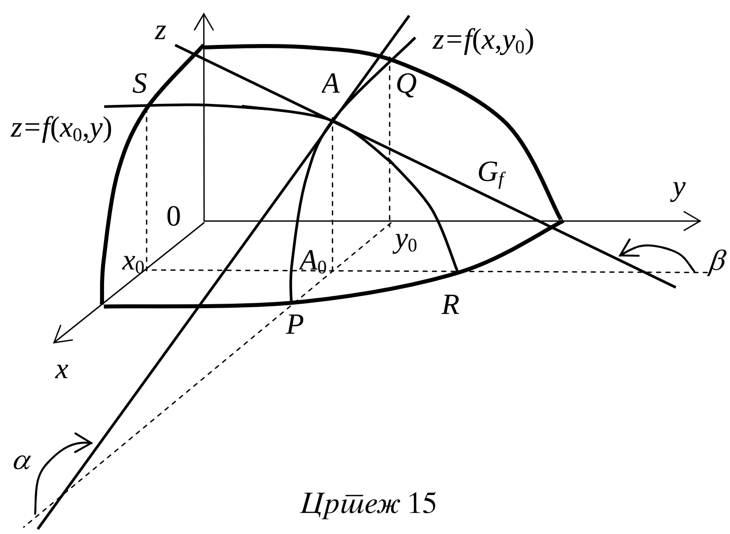
***Дефиниција* 4.6.** Нека е дадена функција $F(x, y, z)$ која е непрекината заедно со своите први парцијални изводи на областа $\Omega \subset \mathrm{R}^3$. Нека со равенката $F(x, y, z) = 0$ е дефинирано множество $S = \{(x, y, z)\in\Omega \mid F(x, y, z) = 0\}$. Ако за секое $(x, y, z)\in S \neq \varnothing$ важи

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 > 0\,,$$

тогаш S се вика глатка површина.

Нека f е функција дадена со равенката $z = f(x, y)$, диференцијабилна во некоја околина $\mathrm{V}(A_0, \delta)$ на точката $A_0(x_0, y_0)$. Нека нејзиниот график G_f може геометриски да се претстави како геометриско место од точки $M(x, y, f(x, y))$ (површина) во реалниот простор со Декартов правоаголен координатен систем.

Нека $A_0(x_0, y_0)$ е нормална проекција на точката $A(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, врз рамнината $X0Y$. Да поставиме две рамнини со равенки $y = y_0$, $x = x_0$, нормални на рамнината $X0Y$, кои минуваат низ точката $A(x_0, y_0, z_0)$. Нивните пресеци со површината ќе претставуваат криви PQ и RS кои лежат во тие рамнини соодветно (цртеж 15).



Цртеж 15

Аналитички тие криви се графици на функции φ и ψ, зададени со равенките $\varphi(x) = f(x, y_0)$, $\psi(y) = f(x_0, y)$. Според дефиницијата на првите парцијални изводи на функцијата f ќе важи

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial x} = \varphi'(x_0), \ \frac{\partial f(A_0)}{\partial y} = \psi'(y_0).$$

Значи, според геометриското толкување на првиот извод кај функции од една реална променлива првите парцијални изводи на функцијата f во точката A_0 геометриски претставуваат аглов коефициент на тангентите повлечени на кривите PQ и RS соодветно во точката $A(x_0, y_0, z_0)$, т.е.

$$\frac{\partial f(A_0)}{\partial x} = \mathrm{tg}\alpha, \qquad \frac{\partial f(A_0)}{\partial y} = \mathrm{tg}\beta,$$

каде што α и β се аглите меѓу позитивните насоки на оските x односно y и соодветните тангенти.

Во согласност со геометриското толкување на првите парцијални изводи на функции од две реални променливи и соодветното геометриско толкување на првиот извод кај функции од една реална променлива, векторите на тангентите на соодветните криви PQ и RS (цртеж 15) ќе бидат дадени со следните координати:

$$\vec{t}_{y_0} = (1, 0, \frac{\partial z(A_0)}{\partial x}), \qquad \vec{t}_{x_0} = (0, 1, \frac{\partial z(A_0)}{\partial y}).$$

Да забележиме дека нормалниот вектор $\vec{n}$ на рамнината која минува низ точката A, определена со векторите $\vec{t}_{y_0}$, $\vec{t}_{x_0}$, се добива како векторски производ

$$\vec{n} = \vec{t}_{y_0} \times \vec{t}_{x_0} = (-\frac{\partial z(A_0)}{\partial x}, -\frac{\partial z(A_0)}{\partial y}, 1).$$

Кај реалните функции од една реална променлива можеме да констатираме дека изводот во точка може да се разгледува и како брзина на промената на вредностите на функцијата во таа точка (моментална брзина). Тоа значи поголем извод како број, поголема промена на вредностите на функцијата и обратно.

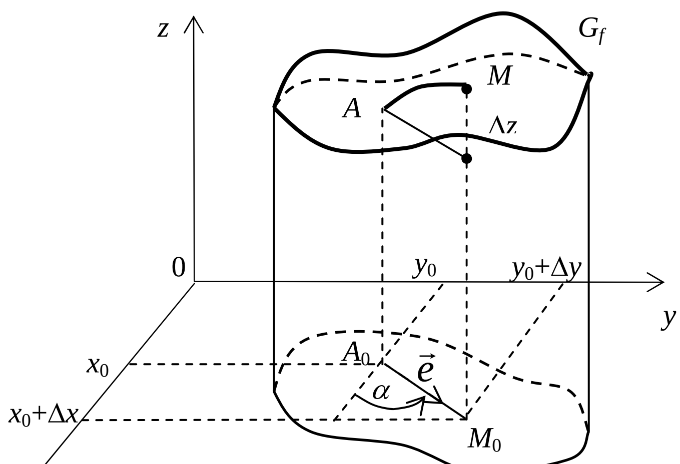
Аналогно, и првите парцијални изводи кај реална функција од две реални променливи можат да се разгледуваат како брзина на промената на вредностите на функцијата во однос на едната или другата променлива (или во насоката на соодветните координатни оски или во насоките на ортовите на координатните оски како вектори). Овој поим за извод може да се обопшти на следниот начин.

***Дефиниција* 4.7.** Нека f е функција дадена со равенката $z = f(x, y)$, диференцијабилна во некоја околина $V(A_0, \delta)$ на точката $A_0(x_0, y_0)$. Нека во Декартов правоаголен координатен систем е даден правец (ориентирана полуправа) со почеток во точката A_0, дефиниран со единичен вектор $\vec{e} = (\cos\alpha, \sin\alpha, 0)$. Нека $A(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, е точка од графикот G_f (површината) и нека Δx и Δy се нараснувања на променливите x и y во точката A_0 со својство точките $M_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in V(A_0, \delta)$ да се точки од полуправата дефинирана со единичниот вектор $\vec{e}$, дадена со параметарските равенки $x = x_0 + t\cos\alpha$, $y = y_0 + t\sin\alpha$, $z = 0$, t е параметар. Притоа $\Delta x = t\cos\alpha$, $\Delta y = t\sin\alpha$ (цртеж 16).

Дефинираме нова сложена функција F од една реална променлива со равенката $F(t) = f(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$ во некоја околина на точката $t = 0$ со особина $M(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha) \in V(A_0, \delta)$, $F(0) = f(x_0, y_0)$. Функцијата F како сложена функција е диференцијабилна во точката $t = 0$ (според условот f е диференцијабилна, а помошните функции $\varphi(t) = x_0 + t\cos\alpha$ и $\psi(t) = y_0 + t\sin\alpha$ се диференцијабилни како линеарни функции).

Тогаш постои прв извод $F'(0)$, кој се вика извод на функцијата f во точката A_0 по правец $\vec{e}$ со ознака $\dfrac{dz(A_0)}{dt}$ или $\dfrac{dz(A_0)}{d\vec{e}}$. Притоа

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\cos\alpha, y_0+t\sin\alpha)-f(x_0,y_0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}.$$



Цртеж 16

Ако $\alpha = 0$, тогаш $t = \Delta x$, $\Delta y = 0$, $\vec{e} = \vec{i}$ и се добива првиот парцијален извод на функцијата f во однос на променливата x во точката A_0, а ако $\alpha = \frac{\pi}{2}$, тогаш $t = \Delta y$, $\Delta x = 0$, $\vec{e} = \vec{j}$, и се добива првиот парцијален извод на функцијата f во однос на променливата y во точката A_0.

Овој извод може да се разгледува како брзина на промената на вредностите на функцијата f во правец на векторот $\vec{e}$.

Со користење на правилото за извод од сложена функција се добива

$$\frac{dz(A_0)}{dt} = \frac{\partial z(A_0)}{\partial x}\frac{dx(0)}{dt} + \frac{\partial z(A_0)}{\partial y}\frac{dy(0)}{dt} = \frac{\partial z(A_0)}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z(A_0)}{\partial y}\sin\alpha.$$

***Дефиниција* 4.8.** Векторот $\frac{\partial z(A_0)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial z(A_0)}{\partial y}\vec{j}$ се вика градиент на функцијата f во точката A_0 со ознака grad $f(A_0)$.

При ова важи релацијата $\frac{dz(A_0)}{dt} = (\text{grad } f(A_0), \vec{e})$ (скаларен производ на два вектора).

Нека φ е аголот меѓу векторите grad $f(A_0)$ и $\vec{e}$. Тогаш $(\text{grad} f(A_0), \vec{e}) = |\text{grad } f(A_0)|\,|\vec{e}|\cos\varphi = |\text{grad } f(A_0)|\cos\varphi$, па значи $\frac{dz(A_0)}{dt} = |\text{grad } f(A_0)|\cos\varphi$.

За $\varphi = 0$ изводот по правец ќе има најголема вредност, што значи дека најголемата промена на својата вредност функцијата ја има во насоката на својот градиент (во таа насока најбрзо расте или опаѓа). Тој факт се користи во методите за решавање на проблеми на оптимизација.

4.5. Тангентна рамнина и нормала на површина. Геометриско толкување на тоталниот диференцијал

Нека f е функција дадена со равенката $z = f(x, y)$, диференцијабилна во некоја околина $V(A_0, \delta)$ на точката $A_0(x_0, y_0)$. Нека нејзиниот график може геометриски да се претстави како геометриско место од точки $M(x, y, f(x, y))$ (површина) во реалниот простор со Декартов правоаголен координатен систем.

Нека A_0 е нормална проекција на точката $A(x_0, y_0, z_0) \in G_f$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, врз рамнината $X0Y$. Да поставиме две рамнини со равенки $y = y_0$, $x = x_0$, нормални на рамнината $X0Y$, кои минуваат низ точката A. Нивните пресеци со површината ќе претставуваат криви PQ и RS (цртеж 17) кои лежат во тие рамнини соодветно.

Во согласност со геометриското толкување на првите парцијални изводи соодветните тангенти на кривите PQ и RS ќе бидат прави дадени со равенките

$$t_{y_0} : z - z_0 = f\,'_x(x_0, y_0)(x - x_0),\ y = y_0; \qquad t_{x_0} : z - z_0 = f\,'_y(x_0, y_0)(y - y_0),\ x = x_0.$$

***Дефиниција* 4.9.** Рамнината определена со правите t_{y_0} и t_{x_0} се вика тангентна рамнина на површината G_f во точката $A(x_0, y_0, z_0) \in G_f$ и нејзината равенка ќе биде

$$z - z_0 = f\,'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f\,'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Може да се покаже дека секоја тангента на произволна крива која минува низ точката A и ѝ припаѓа на површината, лежи во тангентната рамнина.

Десната страна од равенката на тангентната рамнина може да се разгледува како тотален диференцијал ако се земе $x - x_0 = dx$, $y - y_0 = dy$ (како нараснувања на променливите x и y). Тогаш равенката на тангентната рамнина може да се запише во вид $z - z_0 = dz(A_0)$, каде што диференцијалот се зема во точката $A_0(x_0, y_0)$ во однос на нараснувањата dx и dy.

Со тоа се добива геометриското толкување на тоталниот диференцијал како разлика на третата координата z_0 на точката $A \in G_f$ и третата координата на точка M од тангентната рамнина чија прва координата е $x_0 + dx$ и втора координата $y_0 + dy$, т.е. $dz(A_0) = \pm\overline{MN}$, каде што

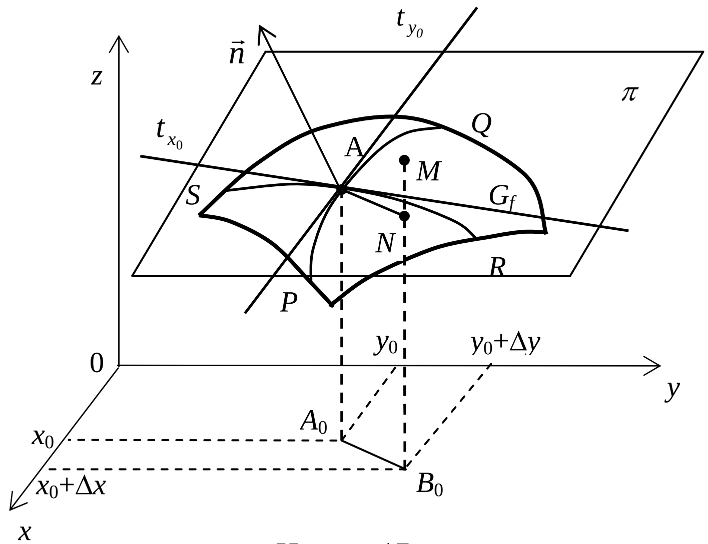
$$M(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + f\,'_x(x_0, y_0)dx + f\,'_y(x_0, y_0)dy), \qquad N(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0).$$

Ако f е зададена имплицитно со равенката $F(x, y, z) = 0$, $z = f(x, y)$, диференцијабилна во $A_0(x_0, y_0)$, при што функцијата F е диференцијабилна во точката $A(x_0, y_0, z_0)$ и $F\,'_z(A) \neq 0$, тогаш равенката на тангентната рамнина ќе гласи:

$$F\,'_x(x_0, y_0, z_0)\,(x - x_0) + F\,'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F\,'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Равенките на нормалата на тангентната рамнина на површината во точката A, а со тоа и на површината, се дадени со

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{\partial z(A_0)}{\partial x}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{\partial z(A_0)}{\partial y}}=\frac{z-z_0}{-1}\,; \qquad \frac{x-x_0}{F_x'(A)}=\frac{y-y_0}{F_y'(A)}=\frac{z-z_0}{F_z'(A)}\,.$$



Цртеж 17

За реалните функции од една реална променлива беше формулирана Лагранжовата теорема, односно теоремата за средна вредност. Слична теорема ќе биде формулирана и за реални функции од две реални променливи, која ќе може да се обопшти и за реални функции од повеќе реални променливи.

***Теорема* 4.8.** Нека е дадена функција f со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана на област E на која има непрекинати први парцијални изводи (значи, таа е диференцијабилна на E). Нека $A(x_0, y_0)$ и $B(x_0 + h, y_0 + k)$ се две точки од E со особината и отсечката AB, како множество точки $\{(x, y)\,|\, x = x_0 + t\,h,\ y = y_0 + t\,k,\ 0 \le t \le 1\}$, да припаѓа на E. Тогаш постои точка $C\,(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ за некое θ, $0 < \theta < 1$ од отсечката AB таква што важи $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f(C)}{\partial x}h + \dfrac{\partial f(C)}{\partial y}k$.

Оваа теорема покажува дека кај диференцијабилни функции може да се изврши апроксимација на функцијата со линеарна функција во доволно мала околина на конкретна точка, што е многу важен факт.

§5. ПАРЦИЈАЛНИ ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ ОД ВТОР И ПОВИСОК РЕД

5.1. Парцијални изводи и диференцијали од втор и повисок ред на реални функции од две и повеќе реални променливи

***Дефиниција* 5.1.** Нека f е функција дадена со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана на област E, и нека постојат нејзини први парцијални изводни функции f'_x, f'_y, дефинирани на E. Ако постои прв парцијален извод од функцијата f'_x во однос на променливата x во точката $A(x_0, y_0)\in E$, тогаш велиме дека е дефиниран втор парцијален извод на функцијата f во точката A во однос на променливата x, еднаков на првиот парцијален извод од функцијата f'_x во точката A во однос на променливата x, со ознаката

$$\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2},\quad \frac{\partial(f'_x)(A)}{\partial x},\quad \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})(A)}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})(A),\quad f''_{xx}(A),\quad f''_{x^2}(A).$$

На ист начин се дефинираат уште три втори парцијални изводи:

$$\frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2},\quad \frac{\partial(f'_y)(A)}{\partial y},\quad \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})(A)}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})(A),\quad f''_{yy}(A),\quad f''_{y^2}(A),$$

како втор парцијален извод на функцијата f во точката A во однос на променливата y ;

$$\frac{\partial^2 f(A)}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial(f'_y)(A)}{\partial x},\quad \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})(A)}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})(A),\quad f''_{yx}(A),$$

како втор парцијален извод на функцијата f во точката A во однос на променливите y и x;

$$\frac{\partial^2 f(A)}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial(f'_x)(A)}{\partial y},\quad \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})(A)}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(A),\quad f''_{xy}(A),$$

како втор парцијален извод на функцијата f во точката A во однос на променливите x и y.

Често се употребуваат и следните ознаки : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Последните два парцијални извода се викаат и втори мешани парцијални изводи. Сите четири изводи се викаат парцијални изводи од втор ред.

Аналогно се дефинираат и парцијални изводи од повисок ред. На ист начин се дефинираат и парцијални изводи од втор и повисок ред кај реални функции од повеќе реални променливи. Притоа е важно да забележиме дека сите изводи се во определена точка, иако речиси по правило се наоѓаат како изводни функции без да се назначи определената точка.

***Пример* 5.1.** Дадена е функцијата $z = f(x, y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ со дефинициона област $R^2\backslash\{(0, 0)\}$. Најди ги сите втори парцијални изводи.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Сите парцијални изводи се во точки $(x, y) \neq (0, 0)$.

Да забележиме дека $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

***Пример* 5.2.** Нека $z = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , x^2+y^2 = 0 \end{cases}$. Тогаш

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{y(x^4-y^4+4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & , \ x^2+y^2 = 0 \end{cases}.$$

Вториот парцијален извод $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ во точката (0, 0) се наоѓа според дефиницијата како гранична вредност:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{\partial z(0,\Delta y)}{\partial x} - \dfrac{\partial z(0,0)}{\partial x}}{\Delta y} = -1.$$

На ист начин се добива вториот мешан парцијален извод во точката (0, 0), $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$.

Во овој пример $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Забележуваме дека во општ случај не мора мешаните втори парцијални изводи да бидат еднакви.

***Дефиниција* 5.2.** Нека f е функција дадена со равенката $u = f(x_1, x_2, ..., x_m)$. Велиме дека функцијата f е n-пати диференцијабилна во точката $A(a_1, a_2, ..., a_m)$ ако сите нејзини парцијални изводи од $(n-1)$-виот ред, како функции, се диференцијабилни во точката A.

Јасно е дека според соодветната теорема доволен услов за диференцијабилност од n-ти ред е условот сите парцијални изводи од n-ти ред како функции да се непрекинати во точката A.

***Теорема* 5.1.** Ако функцијата f, дадена со равенката $z = f(x, y)$ е два пати диференцијабилна во точката $A(x_0, y_0)$, тогаш важи $f''_{xy}(A) = f''_{yx}(A)$, односно $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$.

Доказ: Нека $V(A, \delta)$ е околина на точката A во која се задоволени сите услови на теоремата. Нека $h \neq 0$ е нараснување на променливите x и y со својство за секои h_1, h_2, за кои важи $0 \leq |h_1| \leq |h|$, $0 \leq |h_2| \leq |h|$, да важи $M(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \in V(A, \delta)$. Нека со Φ е означен изразот $f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)$.

Дефинираме нова функција φ со равенката $\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$, која е диференцијабилна на интервал со крајни точки x_0 и $x_0 + h$ и непрекината на сегмент со крајни точки x_0 и $x_0 + h$ (поради диференцијабилноста на f). Тогаш $\Phi = \Delta\varphi = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$, па според Лагранжовата теорема, применета за функцијата φ на соодветниот сегмент, ќе постои $c = x_0 + \theta h$ од соодветниот интервал, $0 < \theta < 1$, така што

$$\Phi = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = \varphi'(c) \cdot h = [f'_x(c, y_0 + h) - f'_x(c, y_0)] \cdot h =$$

$$\{[f'_x(c, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0)] - [f'_x(c, y_0) - f'_x(x_0, y_0)]\} \cdot h.$$

Бидејќи f'_x е диференцијабилна функција во точката A според условот, ќе имаме:

$$f'_x(x_0+\theta h, y_0+h) - f'_x(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)\cdot\theta h + f''_{xy}(x_0, y_0)\cdot h + \alpha_1\cdot\theta h + \beta_1\cdot h$$

и

$$f'_x(x_0+\theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0) = f''_{xx}(x_0, y_0)\cdot\theta h + \alpha_2\cdot\theta h,$$

каде што $\lim\limits_{h\to 0}\alpha_1 = \lim\limits_{h\to 0}\alpha_2 = \lim\limits_{h\to 0}\beta_1 = 0$, т.е. α_1, α_2 и β_1 се бесконечно мали функции при граничниот процес $h\to 0$. Според тоа, $\Phi = [f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha]\cdot h^2$, каде што $\alpha = \alpha_1\theta + \beta_1 + \alpha_2\theta$ е бесконечно мала функција при граничниот процес $h\to 0$.

Со дефинирање на друга нова функција ψ со равенката $\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$ на сегментот со крајни точки y_0 и $y_0 + h$, на ист начин се добива $\Phi = [f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta]\cdot h^2$, каде што β е бесконечно мала функција при граничниот процес $h\to 0$.

Бидејќи $h \neq 0$, од двете равенства се добива

$$f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha = f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta,$$

од каде при граничниот процес $h\to 0$ се добива

$$f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0).$$

Да забележиме дека од диференцијабилноста на функциите f'_x и f'_y следува егзистенција и непрекинатост на сите парцијални изводни функции од втор ред на функцијата f во точката A. Сепак, равенството на мешаните парцијални изводи од втор ред важи и со ослабени услови, односно само со егзистенција и непрекинатост само на мешаните втори парцијални изводни функции f''_{xy} и f''_{yx} во точката A.

***Теорема* 5.2.** Нека f е функција дадена со равенката $z = f(x, y)$ и нека постојат парцијални изводи f'_x, f'_y, f''_{xy} и f''_{yx} во некоја околина $V(A, \delta)$ на точката $A(x_0, y_0)$. Ако f''_{xy} и f''_{yx}, како функции дефинирани на $V(A, \delta)$, се непрекинати во A, тогаш важи равенството $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.

Доказ: Сега повторно да го разгледаме истиот израз Φ од доказот на претходната теорема и да го земеме првиот трансформиран израз $\Phi = [f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)]\cdot h$, кој всушност претставува разлика на вредностите на функцијата f'_x во точките $(x_0 + \theta h, y_0 + h)$ и $(x_0 + \theta h, y_0)$ помножена со h (во зависност од знакот на h интервалите ќе бидат и со обратни крајни точки).

Понатаму дефинираме нова функција H со равенството $H(y) = f'_x(x_0 + \theta h, y)$, која според условот е диференцијабилна на интервалот со крајни точки y_0 и $y_0 + h$ и непрекината на сегментот со крајни точки y_0 и $y_0 + h$. Во согласност со теоремата на Лагранж ќе постои c_1 од тој интервал: $c_1 = y_0 + \theta_1 h$, $0 < \theta_1 < 1$, така што

$$\Phi = H(y_0 + h) - H(y_0) = f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h)\cdot h^2.$$

Според условот функцијата f''_{xy} е непрекината во точката A и ќе важи $f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta_1 h) = f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha$, $\lim\limits_{h\to 0}\alpha_1 = 0$, па се добива $\Phi = [f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha]\cdot h^2$.

На ист начин, со користење на трансформираниот израз добиен во доказот на претходната теорема со дефинирање на втората функција ψ, ќе добиеме $\Phi = [f''_{yx}(x_0, y_0) + \beta]\cdot h^2$, од каде при граничен процес $h\to 0$ се добива бараното равенство.

Овие тврдења можат да се обопштат и кај реални функции од повеќе реални променливи, како и за парцијални изводи од повисок ред.

Нека f е функција дадена со равенката $z = f(x, y)$, два пати диференцијабилна во точката $A(x_0, y_0)$, и нека нејзиниот прв диференцијал во точката A е даден со изразот $dz(A) = \dfrac{\partial z(A)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z(A)}{\partial y}dy$ во однос на нараснувањата односно диференцијалите dx и dy на променливите x и y во точката A.

Сега да ја разгледаме десната страна од изразот како функција од две променливи x и y, земајќи ги парцијалните изводни функции кои се според условот диференцијабилни во точката A наместо парцијалните изводи во точката A како броеви. Тој израз ќе биде диференцијабилна функција во точката A (dx и dy не зависат од x и y и во овој случај се третираат како константи).

***Дефиниција* 5.3.** Првиот диференцијал од така дефинираниот диференцијален израз, како функција од променливите x и y, во однос на истите нараснувања односно диференцијали dx и dy во точката A, се вика втор диференцијал на функцијата f во точката A и се означува со d^2z, d^2f, $d^2z(A)$, $d^2f(A)$.

На ист начин се дефинираат и диференцијали од повисок ред. Така се дефинираат и диференцијали од повисок ред за реални функции од повеќе реални променливи.

За да дојдеме до изразот за втор диференцијал кај реална функција од две реални променливи, ќе разгледаме два случаја.

Нека најпрвин x и y се независни променливи. Тогаш dx и dy не зависат од x и y и ќе важи:

$$d^2z(A) = d(dz(M))(A) = d(\frac{\partial z(M)}{\partial x}dx + \frac{\partial z(M)}{\partial y}dy)(A) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z(M)}{\partial x}dx + \frac{\partial z(M)}{\partial y}dy)(A)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z(M)}{\partial x}dx + \frac{\partial z(M)}{\partial y}dy)(A)dy =$$

$$\frac{\partial^2 z(A)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z(A)}{\partial x \partial y}dx \cdot dy + \frac{\partial^2 z(A)}{\partial y^2}dy^2.$$

Притоа $\frac{\partial}{\partial x}dx = \frac{\partial}{\partial x}dy = \frac{\partial}{\partial y}dx = \frac{\partial}{\partial y}dy = 0$ и $\frac{\partial^2 z(A)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z(A)}{\partial x \partial y}$ според условот, а точката M припаѓа во соодветната околина на точката A согласно со условот f да е два пати диференцијабилна во точката A.

Нека сега x и y се реални функции од две реални променливи u и v дадени со равенките $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, два пати диференцијабилни во точката $B(u_0, v_0)$, каде што $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$. Тогаш $dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$, $dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$ (или $dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv$, $dy = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv$) се диференцијални изрази како функции од две променливи u и v (du и dv не зависат од u и v и се третираат како константи) и ќе важи:

$$d^2z(A) = d(dz(M))(A) = d(\frac{\partial z(M)}{\partial x}dx + \frac{\partial z(M)}{\partial y}dy)(A) =$$

$$d(\frac{\partial z(M)}{\partial x})(A)\cdot dx(B) + \frac{\partial z(A)}{\partial x}\cdot d(dx)(B) + d(\frac{\partial z(M)}{\partial y})(A)\cdot dy(B) +$$

$$\frac{\partial z(A)}{\partial y}\cdot d(dy)(B) = (\frac{\partial^2 z(A)}{\partial x^2}\cdot dx(B) + \frac{\partial^2 z(A)}{\partial x \partial y}\cdot dy(B))\cdot dx(B) +$$

$$\frac{\partial z(A)}{\partial x}\cdot d^2x(B) + (\frac{\partial^2 z(A)}{\partial y \partial x}dx(B) + \frac{\partial^2 z(A)}{\partial y^2}dy(B))\cdot dy(B) + \frac{\partial z(A)}{\partial y}\cdot d^2y(B) =$$

$$\frac{\partial^2 z(A)}{\partial x^2}\cdot dx^2(B) + 2\frac{\partial^2 z(A)}{\partial x \partial y}\cdot dx(B)\cdot dy(B) + \frac{\partial^2 z(A)}{\partial y^2}\cdot dy^2(B) +$$

$$\frac{\partial z(A)}{\partial x}\cdot d^2x(B) + \frac{\partial z(A)}{\partial y}\cdot d^2y(B).$$

Со споредување на така добиените изрази за вториот диференцијал во двата случаја всушност докажавме дека вториот диференцијал го нема својството инваријантност на формата.

Сепак, лесно може да се покаже дека тоа својство е точно во случај кога функциите φ, ψ се линеарни функции ($d^2x(B) = d^2y(B) = 0$).

***Пример* 5.3.** Да се изврши замена на променливите x и y со нови променливи ρ и φ дефинирана со равенките $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ (поларни координати) во изразот $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, каде што $z = z(x, y)$.

Решение: Од равенките на замена со постапката за барање диференцијал се добива $dx = \cos\varphi d\rho - \rho\sin\varphi d\varphi$, $dy = \sin\varphi d\rho + \rho\cos\varphi d\varphi$ од каде што $d\rho = \sin\varphi dy + \cos\varphi dx$, $d\varphi = \frac{1}{\rho}(-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy)$. Понатаму

$$d^2\varphi = \frac{1}{\rho}(-\cos\varphi dx - \sin\varphi dy)d\varphi - (-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy)\frac{d\rho}{\rho^2} = -2\frac{d\rho d\varphi}{\rho},$$

$$d^2\rho = (-\sin\varphi dx + \cos\varphi dy)d\varphi = \rho(d\varphi)^2.$$

Бидејќи

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} d\rho^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\varphi} d\rho\, d\varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} d\varphi^2 + \frac{\partial z}{\partial\rho} d^2\rho + \frac{\partial z}{\partial\varphi} d^2\varphi,$$

со замена на изразите за диференцијалите $d\rho$, $d\varphi$, $d^2\varphi$ и $d^2\rho$ и со компарација со изразот

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

се добиваат бараните парцијални изводи. Значи

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho}.$$

Со користење на истата постапка за добивање на изразот за втор диференцијал и со математичка индукција може да се добие следната формула за диференцијали од повисок ред:

$$d^n z(A) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n z(A)}{\partial x^{n-i} \partial y^i} (dx)^{n-i} (dy)^i \text{ или } d^n z(A) = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n z(A) .$$

Да го разгледаме диференцијалниот израз

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

каде што P, Q се две реални функции од две реални променливи, а dx, dy се соодветни диференцијали односно нараснувања. Се поставува егзистенцијално прашање: кои услови треба да ги задоволуваат функциите P, Q овој диференцијален израз да може да биде тотален диференцијал од некоја реална функција f. Притоа велиме дека изразот $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ е тотален диференцијал ако постои функција $z = f(x, y)$ чиј тотален диференцијал е идентичен со тој израз на некоја област, т.е. $dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Второ прашање е како да се најде таа функција ако дадените функции P, Q ги задоволуваат тие услови.

***Теорема* 5.3.** (Потребен услов) Нека е даден диференцијален израз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ и нека функциите P, Q имаат непрекинати први парцијални изводи на областа $D \subseteq \mathrm{R}^2$. Ако $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ е тотален диференцијал на D, тогаш важи равенството $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ на D.

Доказ: Според условите постои функција f така што $dz = df(x) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, од каде следува $P(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x}$, $Q(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Со диференцирање на тие равенства се добива $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ на областа D. Бидејќи функциите P, Q имаат непрекинати први парцијални изводи на областа D, од теоремата 5.2 за еднаквост на мешаните изводи се добива равенството $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ на D.

Кај функции од една реална променлива дадениот диференцијален израз $f(x)dx$, каде f е непрекината функција на сегментот $[a, b]$, секогаш е тотален диференцијал. Притоа бараната функција е која било примитивна функција добиена од неопределениот интеграл $\int f(x)dx$.

***Пример* 5.4.** Нека $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = ydx - xdy$.

Бидејќи $\frac{\partial P}{\partial y} = 1 \neq -1 = \frac{\partial Q}{\partial x}$, не постои соодветна функција.

***Теорема* 5.4.** (Доволен услов) Нека е даден диференцијален израз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, и нека функциите P, Q имаат непрекинати први парцијални изводи на областа $D \subset \mathbb{R}^2$. Ако равенството $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ важи во сите точки од едноставно сврзлива област D, тогаш постои единствена реална функција f до константа, дадена со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана на D, чиј тотален диференцијал е диференцијалниот израз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$.

Методот за наоѓање на функцијата (при доказ на нејзина егзистенција) ќе го илустрираме на следниот начин:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P \Rightarrow z = \int_{x_0}^{x} Pdx + \varphi(y) \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'_y(y) \Rightarrow$$

$$Q = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y} dx + \varphi'_y(y) \Rightarrow \varphi(y) = \int_{y_0}^{y} [Q - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} Pdx]dy \Rightarrow$$

$$z = \int_{x_0}^{x} Pdx + \int_{y_0}^{y} [Q - \frac{\partial}{\partial y} \int_{x_0}^{x} Pdx]dy \ .$$

Може и на друг начин, ако се тргне од равенството $\frac{\partial z}{\partial y} = Q$.

***Пример* 5.5.** Да се најде функција $z = f(x, y)$ така што $dz = (e^y + x)dx + (xe^y - 2y)dy$.

Решение: Бидејќи $P(x, y) = e^y + x$, $Q(x, y) = xe^y - 2y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = e^y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^y$, потребниот услов е задоволен. Од релацијата $\frac{\partial z}{\partial x} = e^y + x$ со интегрирање во однос на променливата x се добива $z = \int (e^y + x)dx = xe^y + \frac{x^2}{2} + \varphi(y)$, каде $\varphi(y)$ е неопределена функција. Тогаш $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^y +$

$\varphi'_y(y)$ и од релацијата $\dfrac{\partial z}{\partial y} = Q(x,y)$ се добива $\varphi'_y(y) = -2y$ односно $\varphi(y) = -y^2 + C$. Значи, бараната функција е $z = x e^y + \dfrac{x^2}{2} - y^2$.

Во случај на диференцијален израз $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$, каде што P, Q, R се реални функции од три реални променливи, потребните услови изразот да биде тотален диференцијал од една реална функција од три реални променливи се дадени со релациите: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}$, $\dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z}$. Постапката за наоѓање на таа функција е аналогна на претходно дадената постапка.

5.2. Тајлорова формула

Кај функциите од една реална променлива за функцијата $F(t)$ важеше Тајлоровата формула

$$F(t) = F(t_0) + \frac{F'(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{F''(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \ldots +$$

$$\frac{F^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \frac{F^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}, \quad c = t_0 + \theta(t-t_0), \quad 0 < \theta < 1,$$

за секое t од околината $V(t_0, \delta)$, под услов да постојат нејзините изводи заклучно до $(n+1)$-виот во точката t_0 и $(n+1)$-вата изводна функција, непрекината во таа околина $V(t_0, \delta)$.

Ако ставиме $t - t_0 = \Delta t = dt$, согласно со дефиницијата за диференцијал, ќе добиеме

$$F(t_0+\Delta t) - F(t_0) \equiv \Delta F(t_0) = \frac{1}{1!}dF(t_0) + \frac{1}{2!}d^2F(t_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^nF(t_0) +$$

$$\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}F(c)\,.$$

Ќе покажеме дека последната форма на Тајлоровата формула може да се прошири и на функции од m реални променливи.

***Теорема* 5.5.** Нека f е функција дадена со равенката $z = f(x, y)$, $(n+1)$-пати диференцијабилна во точката $A(x_0, y_0)$. Тогаш за која било точка од соодветната околина V(A, δ) важи Тајлоровата формула:

$$\Delta f(x_0, y_0) \equiv f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{1!} d f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0) + R_n ,$$

каде што R_n е остаток даден со формулата

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \quad 0 < \theta < 1,$$

во Лагранжов вид. Остатокот во вид на Пеано е даден со формулата $R_n = o(\rho^n)$, каде што $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Притоа Δx, Δy се нараснувања еднакви на соодветните диференцијали dx, dy, со особина точките $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ да припаѓат во околината V(A, δ) и во однос на кои се соодветните диференцијали на функцијата f.

Доказ: Нека Δx и Δy се нараснувања на променливите x и y, соодветно. Да воведеме нови функции φ, ψ од нова реална променлива t, дадени со равенките $x = \varphi(t) = x_0 + t\Delta x$, $y = \psi(t) = y_0 + t\Delta y$, дефинирани на сегментот [0, 1]. Со тоа всушност дефинираме нова сложена функција F од една реална променлива t, дадена со равенката $F(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$, дефинирана на сегментот [0, 1].

Геометриски гледано, со равенките $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$ за кое било t од сегментот [0, 1] се добиваат координатите на сите точки од отсечката AM , каде што $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Тогаш $\Delta f(x_0, y_0) \equiv f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F(1) - F(0) = \Delta F(0)$. Од условот на теоремата следува дека и функцијата F, како сложена функција, има изводи заклучно со (n+1)-виот во точката $t = 0$ (φ и ψ се линеарни функции) и за неа Тајлоровата (Маклореновата) формула за $t = 1$ и $t_0 = 0$ ќе биде дадена со

$$\Delta F(0) = \frac{1}{1!} dF(0) + \frac{1}{2!} d^2F(0) + \ldots + \frac{1}{n!} d^nF(0) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1}F(\theta), \quad 0 < \theta < 1,$$

при што $dt = \Delta t = 1 - 0 = 1$.

Бидејќи φ и ψ се линеарни функции, својството за инваријантност на формата на диференцијалот ќе го имаат и диференцијалите од повисок ред. Без да го докажуваме тој факт, ќе го искористиме и ќе добиеме:

$$dF(0) = F'_t(0)dt = [\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{d\varphi(0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{d\psi(0)}{dt}]dt =$$

$$[\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\frac{dx(0)}{dt} + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\frac{dy(0)}{dt}]dt = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}dy =$$

$$df(x_0,y_0);$$

$$d^2F(0) = F''_{tt}(0)dt^2 =$$

$$\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}dx + 2\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}dy^2 = d^2f(x_0,y_0);$$

итн.;

$$d^{n+1}F(\theta) = d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y), \quad 0 < \theta < 1.$$

Притоа според дефиницијата за диференцијал имаме користено

$$dx = \varphi_t'(0) \cdot dt = (x_0 + t\Delta x)'_t(0) \cdot dt = \Delta x \cdot dt = \Delta x \cdot 1 = \Delta x,$$

$$dy = \psi_t'(0) \cdot dt = (y_0 + t\Delta y)'_t(0) \cdot dt = \Delta y \cdot dt = \Delta y \cdot 1 = \Delta y.$$

Со замена на диференцијалите во Тајлоровата (Маклореновата) формула за функцијата F се добива бараната Тајлорова формула за функцијата f.

Тајлоровата формула за функција од m променливи може да се запише во следната форма:

$$f(M) = f(A) + \frac{1}{1!}d\,f(A) + \frac{1}{2!}d^2 f(A) + ... + \frac{1}{n!}d^n f(A) + R_n,$$

каде што M е која било точка од соодветната околина $V(A,\delta)$.

5.3. Екстреми на реални функции од две и повеќе реални променливи. Врзани (условни) екстреми. Глобални екстреми

***Теорема* 5.6.** Нека f е функција дадена со равенката $u = f(x_1, x_2,..., x_m)$, дефинирана на областа $E \subset R^m$ и нека $A(a_1, a_2,..., a_m)$ е внатрешна точка од множеството E. Ако f има локален екстрем (локален максимум или минимум) во точката A и ако во таа точка постојат сите први парцијални изводи, тогаш тие се еднакви на нула (потребен услов за егзистенција на локален екстрем).

Доказ: Нека f има локален максимум во точката A и нека постојат сите нејзини први парцијални изводи во точката A. Дефинираме нова функција φ од една реална променлива x_1 со равенството $\varphi(x_1) = f(x_1, a_2,..., a_m)$.

Нека $\Delta x_1 \neq 0$ е нараснување на променливата x_1 во точката $A(a_1, a_2,..., a_m)$, така што точките $M_1(a_1 + \Delta x_1, a_2,..., a_m)$ припаѓаат во соодветната околина. Од равенството

$$\frac{\varphi(a_1 + \Delta x_1) - \varphi(a_1)}{\Delta x_1} = \frac{f(a_1 + \Delta x_1, a_2,..., a_m) - f(a_1, a_2,..., a_m)}{\Delta x_1}$$

заклучуваме дека при граничен процес $\Delta x_1 \to 0$ постои прв извод $\varphi'(a_1)$, еднаков на првиот парцијален извод $\dfrac{\partial f(A)}{\partial x_1}$.

Од друга страна, според условот f има локален максимум во точката A, па според дефиницијата следува дека постои околина на точката A дефинирана со неравенствата $|x_j - a_j| < \delta_j$, $\delta_j > 0$, $j = 1,m$, така што за секоја точка $M(x_1, x_2,..., x_m)$ од таа околина важи неравенството $f(M) \leq f(A)$, односно $f(x_1, x_2,..., x_m) \leq f(a_1, a_2,..., a_m)$.

Според тоа, можеме да констатираме дека постои околина на точката a_1, $V(a_1, \delta_1) \subset R$, така што за секое x_1 од таа околина ќе важи $\varphi(x_1) \leq \varphi(a_1)$, односно $\varphi(a_1)$ е локален максимум на функцијата φ (едноставно од соодветната околина на точката A земаме подмножество точки $M_1(x_1, a_2,..., a_m)$ за кои важи $|x_1 - a_1| < \delta_1$, $|a_j - a_j| = 0 < \delta_j$, $j = 2,m$, па и за нив ќе важи $f(x_1, a_2,..., a_m) \leq f(a_1, a_2,..., a_m)$, т.е. $\varphi(x_1) \leq \varphi(a_1)$).

Според теоремата на Ферма применета на функцијата φ важи $\varphi'(a_1) = 0$, од каде се добива условот $\dfrac{\partial f(A)}{\partial x_1} = 0$.

На ист начин се покажува дека важи $\dfrac{\partial f(A)}{\partial x_j} = 0$, $j = 2,m$.

Можеме да заклучиме дека точките во кои функциите кои имаат први парцијални изводи во некое множество можат да имаат локални екстреми, се точките M чиишто координати се решенија на системот равенки $\dfrac{\partial f(M)}{\partial x_j} = 0$, $j = 1,m$. Точките M чиишто координати се решенија на системот равенки $\dfrac{\partial f(M)}{\partial x_j} = 0$, $j = 1,m$, се викаат стационарни точки и се потенцијални точки кандидати во кои функцијата f може (но не мора) да има локални екстреми.

Од дефиницијата за прв диференцијал можеме да заклучиме дека потребен услов некоја точка A да биде точка во која функцијата има локален екстрем е првиот нејзин диференцијал во таа точка (ако постои), во однос на кои било нараснувања, да биде еднаков на нула, т.е.

$$df(A) = \frac{\partial f(A)}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f(A)}{\partial x_m}dx_m = 0.$$

***Пример* 5.6.** За функцијата $z = xy$ точката $A(0, 0)$ е стационарна точка, бидејќи $\dfrac{\partial z}{\partial x} = y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x$. Во таа точка функцијата нема локален екстрем, бидејќи за кои било нараснувања $h > 0$, $k > 0$ на променливите x, y, соодветно, во точката A, $f(0 + h, 0 + k) = hk > 0$, а за кои било нараснувања $h < 0$, $k > 0$, $f(0 + h, 0 + k) = hk < 0$.

Значи, во која било околина (доволно мала) на точката A секогаш ќе има точки M во кои вредноста на функцијата ќе биде и позитивна и негативна, т.е. $f(M) > 0 = f(A)$ и $f(M) < 0 = f(A)$.

***Теорема* 5.7.** (Доволни услови за локален екстрем за $m = 2$.) Нека е дадена функција $z = f(x, y)$, диференцијабилна во некоја околина на точката $A(x_0, y_0)$ и два пати диференцијабилна во точката A. Нека точката A е стационарна точка за функцијата f и нека

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2};\ a_{12} = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y};\ a_{22} = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2};\ \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2.$$

Тогаш:

а) за $\Delta > 0$ функцијата f има локален екстрем во точката A, и тоа локален максимум за $a_{11} < 0$ и локален минимум за $a_{11} > 0$;

б) за $\Delta < 0$ функцијата f нема локален екстрем во точката A;

в) за $\Delta = 0$ се потребни дополнителни испитувања.

Доказ: За функцијата f се задоволени сите услови за нејзината Тајлорова формула $f(M) = f(A) + \dfrac{1}{1!}df(A) + \dfrac{1}{2!}d^2f(A) + o(\rho^2)$, која важи за секоја точка M од соодветната околина на точката A во која се задоволени условите. Бидејќи $df(A) = 0$ (A е стационарна точка), со замена $h = dx = \Delta x$, $k = dy = \Delta y$, $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \neq 0$ се добива:

$$f(M) - f(A) = \frac{1}{2!}[a_{11}h^2 + 2a_{12}\,h\,k + a_{22}\,k^2] + \alpha(h, k)\rho^2,$$

при што $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\alpha(h,k) = 0$ ($\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\dfrac{\alpha\rho^2}{\rho^2} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\alpha(h,k) = 0$, па значи дека $\alpha(h, k)\,\rho^2 = o(\rho^2)$ – симбол на Ландау). Нараснувањата h, k на независно променливите x, y во точката A се со услов точките $M(x_0 + h, y_0 + k)$ да припаѓаат во соодветната околина на точката A.

Дефинираме функција F со равенката $F(h, k) = a_{11}h^2 + 2a_{12}\,h\,k + a_{22}\,k^2$ од две реални променливи h и k, во некоја околина на точката $0(0, 0)$ (квадратна форма).

а) Нека $\Delta > 0$, $a_{11} > 0$. Со трансформација добиваме

$$F(h, k) = a_{11}\left(h + \frac{a_{12}}{a_{11}}k\right)^2 + \frac{\Delta}{a_{11}}k^2 > 0$$

за кои било h, k. Специјално од $F(0, k) = a_{22}\,k^2$ следува $a_{22} > 0$. Ќе покажеме дека постои позитивен реален број ε, така што за кои било h, k ќе важи $F(h, k) \geq \varepsilon(h^2 + k^2)$.

Со трансформација лесно се добиваат следните неравенства:

$$F(h, k) > \frac{\Delta}{a_{11}}k^2; \qquad F(h, k) > \frac{\Delta}{a_{22}}h^2.$$

Нека $m = \min\{\dfrac{1}{a_{11}}, \dfrac{1}{a_{22}}\} > 0$ ($a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$). Тогаш $F(h, k) > m\Delta k^2$, $F(h, k) > m\Delta h^2$ и со собирање на двете неравенства се добива бараното неравенство $F(h, k) > \dfrac{m}{2}\Delta(h^2 + k^2)$, каде што $\varepsilon = \dfrac{m}{2}\Delta$.

Понатаму, за тоа ε ќе постои позитивен реален број δ, така што за секој реален позитивен број $\rho < \delta$ ќе важи $|\alpha\,(h, k)\,\rho^2| < \dfrac{\varepsilon}{4}\rho^2$ (од $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\alpha(h,k) = 0$ следува дека за секое ε ќе постои δ, така што за секоја точка $(h, k)\in V(0, \delta)$ ќе важи $|\alpha(h, k) - 0| < \dfrac{\varepsilon}{4}$, а бидејќи $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$, ќе важи и за секое $\rho < \delta$). Според тоа, добивме околина $V^*(A, \delta)$, така што за секој реален позитивен број $\rho < \delta$, односно за секоја точка од таа околина, ќе важи:

$$f(M) - f(A) = \frac{1}{2}F(h,k) + \alpha(h,k)\rho^2 > \frac{1}{2}F(h,k) - |\alpha(h,k)\rho^2| >$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon(h^2 + k^2) - \frac{\varepsilon}{4}\rho^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\rho^2 - \frac{\varepsilon}{4}\rho^2 = \frac{1}{4}\varepsilon\rho^2 > 0.$$

Значи, точката A е точка во која функцијата f има локален минимум.

Дефинирајќи нова функција $f^* = -f$, се добива и доказот за локален максимум ($a_{11}{}^* = -a_{11}$, $a_{12}{}^* = -a_{12}$, $a_{22}{}^* = -a_{22}$ и $f^*(M) - f^*(A) > 0$, па $f(M) - f(A) < 0$) .

б) Нека $\Delta < 0$, $a_{11} \neq 0$. Да избереме правец L_1 со почетна точка A, со точки $M(x_0 + h, y_0 + k)$ и со коефициент на правец $\dfrac{k}{h} = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}$,

така што $a_{11}h + a_{12}k = 0$ и тогаш $F(h,k) = \dfrac{\Delta}{a_{11}}k^2$. Бидејќи $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} =$

$\dfrac{1}{|a_{11}|}\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}\,k$, од Тајлоровата формула за секоја точка $M \in L_1$, односно за секое h и k за кои важи врската $a_{11}h + a_{12}k = 0$, ќе добиеме:

$$f(M) - f(A) = \frac{1}{2}\frac{\Delta}{a_{11}}k^2 + \alpha(h,k)\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2}{a_{11}^2}k^2 = [\frac{1}{2}\frac{\Delta}{a_{11}} + \alpha(h,k)\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2}{a_{11}^2}]k^2.$$

За разликата $f(M) - f(\mathrm{A})$ да може да има ист знак со бројот $\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta}{a_{11}}$,

очигледно е дека е доволно за $\alpha(h,k)$ да се избере таква вредност за која ќе важи

$$\left|\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2}{a_{11}^2}\alpha(h,k)\right| < \frac{1}{4}\left|\frac{\Delta}{a_{11}}\right|, \quad \text{т.е.} \quad |\alpha(h,k)| < \left|\frac{a_{11}\Delta}{4(a_{11}^2 + a_{12}^2)}\right|.$$

Бидејќи $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\alpha(h,k) = 0$, за $\varepsilon_1 = \left|\dfrac{a_{11}\Delta}{4(a_{11}^2 + a_{12}^2)}\right|$ сигурно постои позитивен реален број δ_1, така што за секоја точка $(h,k) \in \mathrm{V}(0, \delta_1)$ за која важи врската $a_{11}h + a_{12}k = 0$, односно за секое $\rho < \delta_1$ ќе важи:

$$|\alpha(h,k) - 0| < \left|\frac{a_{11}\Delta}{4(a_{11}^2 + a_{12}^2)}\right|.$$

Тоа значи дека најдовме околина $V^*(A,\ \delta_1)$, така што за секое $\rho < \delta_1$, односно за секоја точка M од таа околина која му припаѓа на правецот L_1, разликата $f(M) - f(A)$ ќе го има знакот на бројот $\frac{1}{2}\frac{\Delta}{a_{11}}$.

Да избереме друг правец L_2 со почетна точка A, со точки $M(x_0 + h,\ y_0)$ и со коефициент на правец 0, така што $k = 0$. Тогаш

$$F(h,\ 0) = a_{11}h^2,\quad f(M) - f(A) = \frac{1}{2}a_{11}h^2 + \alpha(h,\ k)\rho^2 = [\frac{1}{2}a_{11} + \alpha(h,\ k)]h^2$$

(бидејќи $\rho = h$) за точките M од правецот L_2. Според истото размислување го избираме $\alpha\ (h,\ k)$ така што $|\alpha\ (h,\ k)| < |\frac{1}{2}a_{11}|$ за разликата да го има знакот на бројот $\frac{1}{2}a_{11}$. Тоа е овозможено со $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}}\alpha(h,k) = 0$, така што за конкретно $\varepsilon_2 = |\frac{1}{2}a_{11}|$ сигурно постои позитивен реален број δ_2, а за секоја точка $T(h,\ 0)\in V(0,\ \delta_2)$, односно за секое $\rho = h < \delta_2$, ќе важи $|\alpha(h,\ 0) - 0| < |\frac{1}{2}a_{11}|$.

Тоа пак значи дека најдовме околина $V^*(A,\ \delta_2)$, така што за секоја точка M од таа околина, која му припаѓа и на правецот L_2, разликата $f(M) - f(A)$ ќе го има знакот на бројот $\frac{1}{2}a_{11}$.

Нека $\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$ и нека $a_{11} > 0$. Тогаш за секоја точка M од околината $V(A,\ \delta)$ која припаѓа на правецот L_1 ќе важи $f(M) - f(A) < 0$, додека за секоја точка M од истата околина $V(A,\ \delta)$ која припаѓа на правецот L_2 ќе важи $f(M) - f(A) > 0$, што значи дека во точката A функцијата f не може да има локален екстрем.

Аналогно се заклучува и во случајот кога $a_{11} < 0$.

Ако пак $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$, тогаш поради симетричноста на квадратната форма во однос на a_{11} и a_{22} се доаѓа до истиот заклучок.

Ако $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$, условот $\Delta \equiv -\ a_{12}^2 < 0$ е задоволен за која било вредност на a_{12}. Тогаш $F(h,\ k) = 2a_{12}\,h\,k$ и повторно избираме два правца.

Ако за L_1 избереме друг правец со почетна точка A, точки $M(x_0 + h,\ y_0 + h)$ и коефициент на правец 1 така што $h = k$, тогаш

$f(M) - f(A) = (a_{12} + a\sqrt{2})h^2$, $(\rho = \sqrt{2}\,h)$. Повторно по иста постапка може да се избере околина $V(A, \delta_1)$ така за секоја точка M од таа околина која му припаѓа на правецот L_1 разликата $f(M) - f(A)$ да го има знакот на бројот a_{12}.

Потоа избираме друг правец L_2 со почетна точка A, точки $M(x_0 + h, y_0 - h)$ и коефициент на правец -1, така што $h = -k$. Тогаш $f(M) - f(A) = [-a_{12} + \alpha(h, k)\sqrt{2}\,]h^2$, $(\rho = \sqrt{2}\,h)$ и повторно по иста постапка може да се избере околина $V^*(A, \delta_2)$ така за секоја точка M од таа околина која му припаѓа на правецот L_2 разликата $f(M) - f(A)$ да го има знакот на бројот $-a_{12}$.

Со $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ се добива околина $V^{**}(A,\delta)$ за која за точките M од таа околина, кои припаѓаат во двата избрани правца L_1 и L_2, разликата $f(M) - f(A)$ ќе биде и поголема и помала од нула и во двата случаја – кога $a_{12} > 0$ односно $a_{12} < 0$, поодделно. Тоа пак значи дека во точката A функцијата f не може да има локален екстрем.

в) Нека $\Delta = 0$, $a_{11} \neq 0$. Ако се избере правец L_1 со почетна точка A, точки $M(x_0 + h, y_0 + k)$ и со коефициент на правец $\dfrac{k}{h} = -\dfrac{a_{11}}{a_{12}}$ така што $a_{11}h + a_{12}k = 0$, ќе се добие $F(h, k) = 0$, па тогаш $f(M) - f(A) = \alpha(h, k)\rho^2$ за сите точки од правецот L_1, што значи дека со сигурност не може да се утврди дали постои околина во чии точки разликата $f(M) - f(A)$ ќе биде или само позитивна или само негативна (зависи од знакот на $\alpha(h, k)$).

Ако $a_{11} = 0$, $a_{22} \neq 0$, тогаш поради симетричност на квадратната форма во однос на a_{11} и a_{22} го добиваме истиот заклучок.

Ако пак $a_{11} = a_{22} = 0$, тогаш и $a_{12} = 0$ и затоа $d^2 f(A) = 0$, $f(M) - f(A) = o(\rho^2)$, па според тоа потребни се дополнителни испитувања (постоење на трет диференцијал и сл.).

***Пример* 5.7.** Да се покаже дека функцијата $z = x^2 + y^2$ има минимум во $A(0, 0)$.

Од $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y$ се добива стационарна точка $A(0, 0)$. Бидејќи

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x^2} = 2 > 0;\ a_{12} = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial x \partial y} = 0;\ a_{22} = \frac{\partial^2 f(A)}{\partial y^2} = 2,$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^{\ 2} = 4 > 0,$$

според теоремата 5.7 функцијата има минимум $z(A) = 0$.

За функции од повеќе од две реални променливи се употребува таканаречениот критериум на Силвестер, кој е поврзан со поими за квадратни форми (специјална класа полиномни функции). Всушност повторно се тргнува од Тајлоровата формула $f(M) = f(A) + \frac{1}{2!} d^2 f(A) + o(\rho^2)$, при што $d^2 f(A)$ е соодветната квадратна форма, т.е. специјална полиномна функција од втор степен од променливи кои се всушност соодветни нараснувања на независно променливите на функцијата f . Доказот е речиси идентичен, при што се употребува поимот дефинитност (позитивна или негативна) на квадратните форми и поимите матрица и детерминанта.

Во математиката, а особено во примената во голем број области, се среќаваат и задачи и проблеми во кои се бараат екстреми на функции, при што променливите се врзани со некои дополнителни услови (релации). Екстреми од таков вид се викаат условни (врзани) екстреми. Со овие проблеми се занимава теорија во која се изучуваат методи на оптимирање.

***Пример* 5.8.** Нека е дадена функција f со равенката $z = x^2 + y^2$ и нека е даден дополнителен услов $\varphi(x, y) \equiv x + y - 1 = 0$. Се бара условен екстрем на функцијата f. Овде очевидно се бара точка од точките кои се наоѓаат на правата $x + y - 1 = 0$, во која функцијата ќе има екстрем. Според тоа, со директна замена на една променлива од условот во равенката на функцијата проблемот се сведува на проблем за наоѓање точка во која функцијата од една реална променлива има екстрем. Значи, $z = x^2 + (1 - x)^2$, $z'_x = 4x - 2 = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $z''_{xx} = 4 > 0$ и точката $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ е точка во која функцијата има условен екстрем минимум со вредност $\frac{1}{2}$.

Доколку од условот не е можно да се изрази експлицитно една од променливите, се користи таканаречената функција на Лагранж. За да го дефинираме и објасниме воведувањето на оваа функција, ќе се задржиме на реална функција од две реални променливи дадена со равенката $z = f(x, y)$ со барање условен екстрем со услов даден со $\varphi(x, y) = 0$.

Тогаш $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, т.е. $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}$. Од $\varphi(x, y) = 0$ со формулата за барање извод од имплицитно зададена функција се добива $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$, од каде со замена се добива

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right).$$

Бидејќи во соодветната точка кандидат за точка во која функцијата f ќе има екстрем важи $dz = 0$, односно $\frac{dz}{dx} = 0$, се добива $\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$ (како однос на броеви, бидејќи тоа се парцијални изводи во точки кои се кандидати за точки во кои f ќе има екстрем) под услов $\varphi'_y \neq 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} \neq 0$. Да го означиме тој однос со $-\lambda$. Значи,

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\varphi'_x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\varphi'_y} = -\lambda,$$

односно

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\lambda\varphi'_x, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\lambda\varphi'_y.$$

Ако дефинираме нова функција од три променливи, наречена функција на Лагранж, со равенката $F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, тогаш потребните услови за добивање координати на точка во која F би имала екстрем се првите парцијални изводи да се еднакви на 0. Значи,

$$F'_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda\varphi'_x = 0,\ F'_y \equiv \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda\varphi'_y = 0,\ F'_\lambda \equiv \varphi(x, y) = 0,$$

кои се всушност веќе добиените равенки и условот $\varphi(x, y) = 0$ (бидејќи само меѓу точките кои го задоволуваат тој услов се бараат точки во кои е можен екстрем за функцијата f).

Бидејќи $d^2f = d^2F$ во стационарните точки во кои важи условот $\varphi(x, y) = 0$, следува дека доволните услови за локален екстрем кај функцијата F се исти со доволните услови за условен екстрем кај функцијата f. Имено, за секоја точка M за која важи условот $\varphi(M) = 0$ ќе имаме $f(M) - f(A) = F(M) - F(A)$, бидејќи $F(M) = f(M) + \lambda\varphi(M) = f(M)$, каде што A е можна точка во која функцијата f би имала условен екстрем.

Да забележиме дека проблемот може да се обопшти и на функции со повеќе од две реални променливи, како и со повеќе од еден услов.

***Пример* 5.9.** Да се најде условен екстрем на функцијата $z = x_1^2 + x_2^2 +...+ x_n^2$ под услов дефиниран со $x_1 + x_2 +...+ x_n - 1 = 0$.

Функцијата на Лангранж е:

$$F(x_1, x_2,..., x_n, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 +...+ x_n^2 + \lambda (x_1 + x_2 +...+ x_n - 1).$$

Системот равенки е:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \equiv 2x_i + \lambda = 0,\ i = \overline{1,n}; \qquad x_1 + x_2 +...+ x_n - 1 = 0,$$

чии решенија се $\lambda = \frac{2}{n}, x_i = -\frac{1}{n}$, $i = \overline{1,n}$, а точката е $A(-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n},..., -\frac{1}{n})$. Бидејќи $d^2F = 2(dx_1^2 + dx_2^2 +...+ dx_n^2) > 0$ и $d^3F = 0$, следува дека z има условен екстрем минимум во точката A при што $z(A) = \frac{1}{n}$.

Нека f е функција дефинирана и непрекината на затворена област E. Според теоремата на Вајерштрас ќе постои точка A од затворената област E во која функцијата има глобален екстрем. Барањето на точка во која една функција има глобален екстрем се базира на следниот принцип. Најпрвин се бараат сите стационарни точки во кои функцијата може да има локални екстреми. Потоа се бараат точки меѓу граничните точки на затворената област E, во кои функцијата има локални екстреми и со споредба на сите локални екстреми се наоѓа точката во која функцијата има глобален екстрем.

***Пример* 5.10.** Да се најдат глобалните екстреми на функцијата f дадена со равенката $z = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ на затворена област дадена со неравенките $x + y \le 2\pi, x \ge 0, y \ge 0$.

Стационарните точки кои припаѓаат во внатрешноста на дадената област се добиваат со решавање на системот

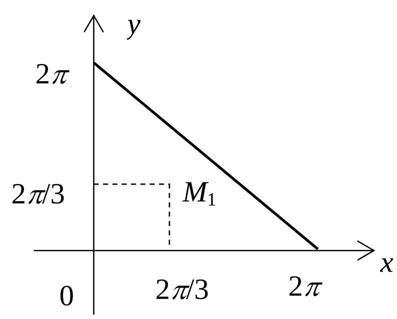
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y) = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y) = 0.$$

Единственото решение кое припаѓа во внатрешноста на дадената област е $x = \frac{2\pi}{3}$, $y = \frac{2\pi}{3}$, т.е. точката $M_1(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ и $f(M_1) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Понатаму за таа точка се добива $a_{11} = -\sqrt{3} < 0$, $a_{22} = -\sqrt{3} < 0$, $a_{12} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\Delta = \frac{9}{4} > 0$, од каде според веќе докажаниот критериум функцијата f во точката M_1 има локален максимум.

За точките од границите на областа добиваме:

$0P$:	$y = 0$,	$f(x, 0) = 0$;
$0Q$:	$x = 0$,	$f(0, y) = 0$;
PQ:	$x + y = 2\pi$,	$f(x, y) = f(x, 2\pi - x) = 0$.

Бидејќи во внатрешноста на областа (триаголникот) нема точка во која функцијата би имала локален минимум, заклучуваме дека глобална минимална вредност функцијата има во сите точки од границата и таа е еднаква на 0, додека локалната максимална вредност ќе биде и глобална максимална вредност еднаква на $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ во точката $M_1(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ (цртеж 18).



Цртеж 18

Г Л А В А Ч Е Т В Р Т А

ИНТЕГРАЛНО СМЕТАЊЕ НА РЕАЛНИ ФУНКЦИИ ОД ДВЕ И ПОВЕЌЕ РЕАЛНИ ПРОМЕНЛИВИ СО НЕКОИ ПРИМЕНИ

§6. ДВОЈНИ И ТРОЈНИ ИНТЕГРАЛИ

6.1. Двоен интеграл во однос на правоаголник

***Дефиниција* 6.1.** Нека е дадено множество точки (затворен правоаголник) $D = [a, b]\times[c, d] = \{(x, y)|x\in[a, b], y\in[c, d]\}$. Нека π_n и π_m се поделби на сегментите $[a, b]$ и $[c, d]$ соодветно, со делбени точки $a = x_0 < x_1 <...< x_n = b$, $c = y_0 < y_1 <...< y_m = d$.

Со множеството затворени правоаголници

$$D_{ij} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j],\ i = 1,n,\ j = 1,m,$$

велиме дека е дефинирана поделба π_{nm} на правоаголникот D.

Бројот $d_{nm} = \max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2}$, каде што $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $i = 1,n$, $j = 1,m$, се вика дијаметар на поделбата π_{nm}.

***Дефиниција* 6.2.** Нека е дадена реална функција f од две реални променливи со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана и ограничена на правоаголникот $D = [a, b]\times[c, d]$, и нека π_{nm} е една поделба.

Сумата $\sigma(\pi_{nm}) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} f(\xi_i, \zeta_j)\Delta x_i \Delta y_j$, каде што (ξ_i, ζ_j) се произволни точки од множествата $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$, $i = 1,n$, $j = 1,m$, се вика интегрална сума на функцијата f на правоаголникот D во однос на поделбата π_{nm}.

***Дефиниција* 6.3.** Ако постои реален број I со својство за секој позитивен реален број ε да постои позитивен реален број $\delta(\varepsilon)$, така што за сите поделби π_{nm} на правоаголникот D за кои дијаметрите $d_{nm} < \delta$ да важи неравенството $|\sigma(\pi_{nm}) - I| < \varepsilon$, независно од изборот на точките (ξ_i, ζ_j), тогаш бројот I се вика двоен (Риманов) интеграл на функцијата f во однос на правоаголникот D со ознака $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$.

Функцијата f се вика подинтегрална функција, x и y подинтегрални променливи, а D е област на интеграција.

Во тој случај велиме дека функцијата f е интеграбилна на D.

***Дефиниција* 6.4.** Нека е дадена реална функција f од две реални променливи со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана и ограничена на правоаголникот $D = [a, b]\times[c, d]$, и нека π_{nm} е една поделба. Тогаш сумите

$$s(\pi_{nm}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j\ , \qquad S(\pi_{nm}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j\ ,$$

каде што

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in D_{ij}} f(x, y), \qquad M_{ij} = \sup_{(x,y)\in D_{ij}} f(x, y),\ i = 1,n, j = 1,m,$$

се викаат долна и горна сума на Дарбу на функцијата f во однос на поделбата π_{nm} на правоаголникот D.

Бидејќи функцијата f е ограничена на правоаголникот D, постојат реални броеви M и m, така што за секоја точка $(x, y)\in D$ важи неравенството $m \le f(x, y) \le M$. Според тоа ќе важат и неравенствата

$$m(b-a)(d-c) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i \Delta y_j \le$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M\Delta x_i \Delta y_j = M(b-a)(d-c),$$

односно неравенствата

$$m(b-a)(d-c) \le s(\pi_{nm}) \le S(\pi_{nm}) \le M(b-a)(d-c).$$

Исто така важат и неравенствата $s(\pi_{nm}) \le \sigma(\pi_{nm}) \le S(\pi_{nm})$, каде што сите суми се земени во однос на една иста поделба π_{nm} на правоаголникот D, но за кој било избор на точките (ξ_i, ζ_j) кај интегралната сума $(m_{ij} \le f(\xi_i, \zeta_j) \le M_{ij})$.

Од сите овие неравенства можеме да заклучиме дека и овде, како и кај определениот интеграл, сумите на Дарбу се инфимум односно супремум на множеството интегрални суми во однос на една иста поделба на правоаголникот D и во однос на произволен избор на точките (ξ_i, ζ_j).

***Теорема* 6.1.** Реалната функција f, ограничена на затворениот правоаголник D, е интеграбилна тогаш и само тогаш кога за кој било позитивен реален број ε постои реален позитивен број $\delta(\varepsilon)$, така што за сите поделби π_{nm} на правоаголникот D, за кои дијаметрите $d_{nm} < \delta$, важи неравенството $S(\pi_{nm}) - s(\pi_{nm}) < \varepsilon$, т.е. кога $\lim\limits_{d_{nm}\to 0} [S(\pi_{nm}) - s(\pi_{nm})] = 0$.

Притоа $\lim\limits_{d_{nm}\to 0} S(\pi_{nm}) = \lim\limits_{d_{nm}\to 0} s(\pi_{nm}) = I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Забележуваме дека досега е запазена аналогијата со дефиницијата на определен интеграл, кој се нарекува и еднократен определен интеграл за да се разликува од двоен, троен и повеќекратен определен интеграл. Исто така и својствата искажани за еднократниот определен интеграл ќе важат и за двојниот интеграл.

***Особина* 6.1.** Ако реалните функции f и g од две реални променливи се интеграбилни на затворениот правоаголник D, тогаш и функциите $f \pm g$, Kf (K е константа), $|f|$, се интеграбилни на D, при што важи:

$$\iint\limits_D [f(x,y) \pm g(x,y)]dxdy = \iint\limits_D f(x,y)dxdy \pm \iint\limits_D g(x,y)dxdy;$$

$$\iint\limits_D Kf(x,y)dxdy = K\iint\limits_D f(x,y)dxdy;$$

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|\,dxdy.$$

***Особина* 6.2.** Ако реалната функција f од две реални променливи е интеграбилна и ненегативна на затворениот правоаголник D, тогаш важи неравенството $\iint\limits_D f(x,y)dxdy \ge 0$.

***Теорема* 6.2.** (Пресметување на двоен интеграл во однос на правоаголник.) Нека реалната функција f од две реални промeнливи, дадена со равенката $z = f(x, y)$, е интеграбилна на затворен право-аголник $D = [a, b]\times[c, d]$.

Нека за секое x од $[a, b]$ реалната функција φ од една реална променлива y, дефинирана со $\varphi(y) = f(x, y)$ (x е константа), е интеграбилна на сегментот $[c, d]$, т.е. постои еднократниот определен интеграл $\int_c^d \varphi(y)dy = \int_c^d f(x, y)dy$ (x е константа).

Тогаш функцијата I дефинирана на сегментот $[a, b]$ со равенката $I(x) = \int_c^d f(x, y)dy$, е интеграбилна на $[a, b]$, при што важи

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b I(x)dx .$$

Последниот интеграл се вика сукцесивен и се означува со

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy .$$

Доказ: Нека π_{nm} е произволна поделба на затворениот право-аголник D и нека

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \qquad D_{ij} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j],$$

$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in D_{ij}} f(x, y), \qquad M_{ij} = \sup_{(x,y)\in D_{ij}} f(x, y),\ i = 1,n,\ j = 1,m.$$

Тогаш ќе важат неравенствата

$$m_{ij}\Delta y_j \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy \le M_{ij}\Delta y_j, \qquad i = 1,n,\ j = 1,m.$$

Со сумирање во однос на j од последните неравенства се добиваат неравенствата

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \le I(\xi_i) \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta y_j ,\ i = 1,n,$$

бидејќи

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)dy = \int_c^d f(\xi_i, y)dy = I(\xi_i).$$

Множејќи ги последните неравенства соодветно со Δx_i, $i = 1,n$, и сумирајќи по i, се добива:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, I(\xi_i) \le \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \Delta y_j ,$$

т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j \le \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \, I(x_i) \le \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j ,$$

односно

$$s(\pi_{nm}) \le \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i) \Delta x_i \le S(\pi_{nm}),$$

каде што $s(\pi_{nm})$ и $S(\pi_{nm})$ се суми на Дарбу во однос на поделбата π_{nm}.

Бидејќи последното неравенство важи за која било поделба на затворениот правоаголник D независно од изборот на точките ξ_i ($\sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i$ е интегрална сума на функцијата I во однос на поделбата π_n на сегментот $[a, b]$ со дијаметар $d_n = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$), од условот дека f е интеграбилна функција (значи, $S(\pi_{nm}) - s(\pi_{nm}) \to 0$ кога $d_{nm} \to 0$) ќе постои $\lim\limits_{d_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b I(x)dx$, исто така независно од изборот на точките ξ_i, што значи дека функцијата I е интеграбилна на сегментот $[a, b]$. Притоа ќе важи и

$$\int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \iint_D f(x, y)dxdy$$

$$\left(\lim_{d_{nm} \to 0} S(\pi_{nm}) = \lim_{d_{nm} \to 0} s(\pi_{nm}) = \iint_D f(x, y)dxdy \right).$$

Ако во условот се претпостави егзистенција на $\int_a^b f(x, y)dx$ за секое y од сегментот $[c, d]$, тогаш на ист начин се покажува дека важи формулата

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx .$$

Ако пак f е непрекината функција на D, тогаш постојат сигурно и двата сукцесивни интеграла од теоремата и забелешката, па важи:

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)dx .$$

Забележуваме дека пресметувањето на двојниот определен интеграл со овие формули всушност се сведува на пресметување на два еднократни определени интеграла. Специјално може да се покаже дека ако $f(x, y) = f_1(x)\, f_2(y)$, каде што f_1 и f_2 се непрекинати функции на $[a, b]$ односно $[c, d]$ соодветно, тогаш ќе важи формулата

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_a^b f_1(x)dx\ ]\ [\int_c^d f_2(y)dy\ ]\ .$$

6.2. Двоен интеграл во однос на област

***Дефиниција* 6.5.** Нека е дадена затворена и ограничена област $D\subset\mathrm{R}^2$ и нека е дадена функцијата f дефинирана и ограничена на D. Нека D се содржи во затворениот правоаголник $D^* = [a, b]\times[c, d]$ и нека дефинираме нова функција F со равенките $F(x, y) = f(x, y)$, за $(x, y)\in D^*$, $F(x, y) = 0$, за $(x, y)\in D^*\backslash D$.

Велиме дека функцијата f е интеграбилна во однос на областа D ако функцијата F е интеграбилна во однос на затворениот правоаголник D^*.

Интегралот $\iint_{D^*} F(x, y)dxdy$ се вика двоен интеграл на функцијата f во однос на областа D и има ознака $\iint_D f(x, y)dxdy$. Функцијата f се вика подинтегрална функција, x и y се подинтегрални променливи, а D е област на интеграција.

***Дефиниција* 6.6.** Множеството $D\subset\mathrm{R}^2$ се вика правилна област ако е област ограничена со конечен број криви кои се графици на непрекинати функции од една променлива.

***Теорема* 6.3.** Нека затворената област $D\subset\mathrm{R}^2$ е унија од две правилни области D_1 и D_2. Ако реалната функција f од две реални променливи е интеграбилна во однос на областите D_1 и D_2, тогаш таа е интеграбилна и во однос на областа $D = D_1\cup D_2$, при што важи равенството

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy\,.$$

Ова тврдење може да се прошири и на случај кога областа D е конечна унија од правилни области.

***Дефиниција* 6.7.** Бројот $\iint\limits_D dxdy$ се вика плоштина на правилната област D.

Очигледно е дека оваа дефиниција е генерализација на поимот плоштина на рамнинска фигура во геометријата, бидејќи може лесно да се покаже дека, во случај D да е правоаголник, од теоремата за пресметување на двоен интеграл во однос на правоаголник се добива $\int_a^b dx \int_c^d dy = (b-a)(d-c)$. Притоа се зема функцијата $f(x, y) = 1$.

Лесно се покажува дека особините кои важат за двојни интеграли во однос на правоаголник важат и за двојни интеграли во однос на правилна област.

***Особина* 6.3.** Нека е дадена функција f непрекината на затворена правилна област D и нека m, M се најмалата и најголемата вредност на функцијата f во областа D, а $P(D)$ плоштина на D. Тогаш важат неравенствата $mP(D) \leq \iint\limits_D f(x,y)dxdy \leq MP(D)$.

***Особина* 6.4.** (Теорема за средна вредност.) Ако функцијата f е непрекината на затворена правилна област $D\subset\mathrm{R}^2$, а $P(D)$ е плоштина на D, тогаш постои точка $(x_0, y_0)\in D$, така што важи равенството $\iint\limits_D f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0)P(D)$.

Доказ: Во согласност со неравенство од особината 6.3, означувајќи со $\mu = \dfrac{\iint\limits_D f(x,y)dxdy}{P(D)}$, се добива $m \leq \mu \leq M$. Бидејќи f е непрекината функција, во согласност со теоремата за непрекинати функции ќе постои точка $(x_0, y_0)\in D$, така што $f(x_0, y_0) = \mu$.

***Дефиниција* 6.8.** За областа $D\subset\mathrm{R}^2$ велиме дека е елементарна во однос на оската x ако

$$D = \{(x, y)\in\mathrm{R}^2 \mid a \leq x \leq b,\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\},$$

каде што φ_1 и φ_2 се непрекинати функции на $[a, b]$ и $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ за секое $x\in(a, b)$.

За областа $D\subset\mathrm{R}^2$ велиме дека е елементарна во однос на оската y ако

$$D = \{(x, y)\in\mathrm{R}^2 \mid c \leq y \leq d,\ \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\},$$

каде што ψ_1 и ψ_2 се непрекинати функции на $[c, d]$ и $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ за секое $y \in (c, d)$.

Може да се покаже дека секоја правилна област може да се претстави како конечна унија од елементарни области во однос на оските x и y.

***Теорема* 6.4.** (Пресметување на двоен интеграл во однос на област.) Ако f е интеграбилна на елементарната област

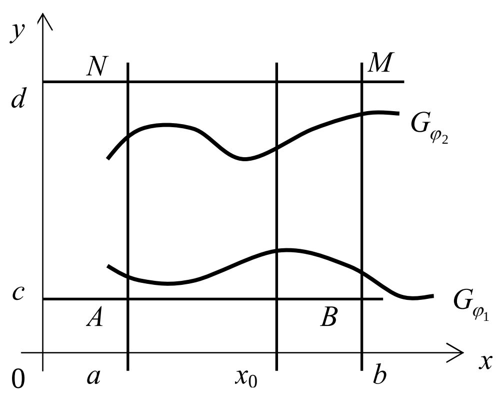
$$D = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$$

во однос на оската x и ако за секое x од $[a, b]$ постои $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$,

тогаш постои $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$ и важи

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy .$$

Доказ: Од дефиницијата за двоен интеграл во однос на област ќе постои функција $F(x, y)$ и правоаголник $ABMN$ во кој се содржи областа D, така што $\iint\limits_{ABMN} F(x, y)dxdy = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$ (цртеж 19).



Цртеж 19

Според формулата за пресметување на двоен интеграл во однос на правоаголник важи: $\iint\limits_{ABMN} F(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d F(x,y)dy$. Кај $\int\limits_c^d F(x,y)dy$ да го фиксираме $x = x_0 \in [a, b]$. Тогаш

$$\int\limits_c^d F(x_0,y)dy = \int\limits_c^{\varphi_1(x_0)} F(x_0,y)dy + \int\limits_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} F(x_0,y)dy +$$

$$\int\limits_{\varphi_2(x_0)}^{d} F(x_0,y)dy = \int\limits_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)dy,$$

бидејќи за множеството $\{(x_0, y) \mid y \in [c, \varphi_1(x_0)] \cup [\varphi_2(x_0), d]\}$, $F(x_0, y) \equiv 0$. Поради произволноста на изборот на x_0 равенството $\int\limits_c^d F(x_0,y)dy = \int\limits_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)dy$ ќе важи за секое $x_0 \in [a, b]$, со што ја докажавме формулата.

Истата теорема важи и за елементарна област

$$D = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$

во однос на оската y, при што важи равенството

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Ако функцијата f е непрекината на областа D, елементарна во однос на оските x и y, тогаш важи

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

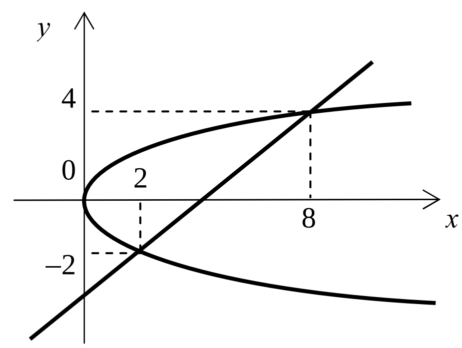
***Пример* 6.1.** Да се пресмета $\iint\limits_D (1-x-y)dxdy$ ако областа $D = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}$.

Областа D е елементарна во однос на оската x, функцијата $f(x, y) = 1 - x - y$ е непрекината на D и според формулата ќе добиеме:

$$\iint\limits_D (1-x-y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)dy =$$

$$\int_0^1 [1 - x - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}]dx = \frac{1}{6}.$$

***Пример* 6.2.** Да се пресмета $\iint_D (x-y)dxdy$ ако областа D е ограничена со криви кои се графици на функциите $y = x - 4$, $x = \frac{y^2}{2}$ (цртеж 20).



Цртеж 20

Бидејќи D не е елементарна во однос на оската x, ќе ја поделиме на две елементарни подобласти

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid 0 \le x \le 2, -\sqrt{2x} \le y \le \sqrt{2x}\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid 2 \le x \le 8,\ x - 4 \le y \le \sqrt{2x}\}.$$

Според особината за адитивност и формулата за пресметување се добива двоен интеграл:

$$I = \int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} (x-y)dy + \int_2^8 dx \int_{x-4}^{\sqrt{2x}} (x-y)dy = -\frac{122}{5}.$$

Од друга страна, областа D е елементарна во однос на оската y, т.е. $D = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 \mid -2 \le y \le 4,\ \frac{y^2}{2} \le x \le y + 4\}$ и според формулата ќе добиеме:

$$\iint_D (x-y)dxdy = \int_{-2}^4 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} (x-y)dx =$$

$$\int_{-2}^{4}[\frac{(y+4)^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}\right)^2-y(y+4)+y\frac{y^2}{2}]dy = -\frac{122}{5}.$$

Доста често при пресметувањето на двоен интеграл е дадена само областа или пак се дадени границите на интеграција. Тогаш е потребно да се специфицира редоследот на интеграција со помош на кој најлесно и наједноставно може да се пресмета двојниот интеграл.

***Дефиниција* 6.9.** Нека f е интеграбилна функција на затворена правилна област $D\subset R^2$ и нека $G\subset R^3$ е просторна затворена област дефинирана со $G = \{(x, y, z)\in R^3 \mid (x, y)\in D, 0 \le z \le f(x, y)\}$. Тогаш бројот $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ се вика волумен на телото G.

***Теорема* 6.5.** Нека f и g се интеграбилни функции на затворена правилна област $D\subset R^2$ и нека $G\subset R^3$ е просторна затворена област дефинирана со

$$G = \{(x, y, z)\in R^3 \mid (x, y)\in D, f(x, y) \le z \le g(x, y)\}.$$

Тогаш волуменот на телото G е еднаков на бројот

$$\iint\limits_D [g(x,y)-f(x,y)]dxdy.$$

И овде ќе наведеме еден пример според кој може да се каже дека оваа дефиниција на волумен на просторно тело не е во спротивност со познатите формули во геометријата за волумен на телата во простор.

***Пример* 6.3.** Нека е даден цилиндар со основа круг со радиус r и висина H. Во Декартов правоаголен просторен координатен систем го дефинираме цилиндарот со множеството

$$G = \{(x, y, z)\in R^3 \mid (x, y)\in D, D: x^2 + y^2 \le r^2, 0 \le z \le H\}.$$

Бидејќи G е затворена правилна област, функцијата $f(x, y) = H$ е непрекината на D, според формулата за пресметување на двоен интеграл во однос на правилна област се добива $V = \iint\limits_D Hdxdy = H\iint\limits_D dxdy = Hr^2\pi$. Притоа, во согласност со дефиницијата на плоштина на рамнинска фигура, $\iint\limits_D dxdy = r^2\pi$.

6.3. Диференцирање и интегрирање во однос на параметар под знакот на интеграл

***Теорема* 6.6.** Нека f и f'_x се непрекинати функции од променливите x, y на затворениот правоаголник $[a, b]\times[c, d]$. Тогаш важи:

$$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy .$$

Доказ: Формираме нова функција $F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$, дефинирана на $[a, b]$. Нека $h \neq 0$ е нараснување на променливата x со особина $x + h\in[a, b]$. Тогаш

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \int_c^d \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}dy = \int_c^d f'_x(x+\theta h,y)dy ,\ 0 < \theta < 1$$

(според теоремата на Лагранж за функција од една реална променлива). При граничен процес $h\to 0$ се добива

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\int_c^d f'_x(x+\theta h,y)dy =$$

$$\int_c^d \lim_{h\to 0} f'_x(x+\theta h,y)dy = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy .$$

Притоа е користена непрекинатоста на функциите f'_x и F .

***Теорема* 6.7.** Нека f, f'_x и f'_y се непрекинати функции од променливите x, y на правоаголникот $[a, b]\times[c, d]\subset R^2$ и φ, ψ, φ'_x, ψ'_x се непрекинати функции од променливата x на $[a, b]$, при што за секое $x\in[a, b]$ важи $\varphi(x) \le \psi(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)\in[c, d]$. Тогаш важи

$$\frac{d}{dx}\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy = f(x, \psi(x))\psi'(x) - f(x, \varphi(x))\varphi'(x) + \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy .$$

Доказ: Формираме нова функција $F(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy$, $x\in[a, b]$, и воведуваме нови реални променливи u и v со равенките $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$. Со $\Phi(x, u, v) = \int_u^v f(x,y)dy$ се дефинира нова функција

Φ од три реални променливи како определен интеграл со променливи граници. Притоа всушност функцијата F ќе претставува сложена функција дефинирана со функциите Φ, φ, ψ, дадена со равенката $F(x) = \Phi(x,\ \varphi(x),\ \psi(x))$ и според формулата за извод од сложена функција се добива

$$(*) \qquad F'_x(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Од друга страна, сметајќи ги u и v како константи, според претходната теорема 6.6 важи:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_u^v f(x,y)dy = \int_u^v \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)dy .$$

Нека $G(x, y)$ е една примитивна функција за $f(x, y)$ во смисла $\frac{\partial G}{\partial y} = f(x, y)$, при што x се смета за константа. Тогаш

$$\Phi(x, u, v) = \int_u^v f(x,y)dy = G(x, y)|^v_u = G(x, v) - G(x, u),$$

така што

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = 0 - \frac{\partial G(x,u)}{\partial u} = -f(x, u),\ \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\partial G(x,v)}{\partial v} - 0 = f(x, v).$$

Со замена во (*) се добива бараното равенство.

***Пример* 6.4.** $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx = ?$

Да го дефинираме интегралот $I(m) = \int_0^1 \frac{\ln(1+mx)}{1+x^2}dx$, каде што m е параметар. Во согласност со теорема 6.6 се добива:

$$\frac{d}{dm}I(m) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{\ln(1+mx)}{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)(1+mx)}dx =$$

$$\frac{1}{1+m^2}\left[-\ln(1+m) + \frac{1}{2}\ln 2 + m\frac{\pi}{4}\right].$$

Понатаму

$$\int_0^1 \frac{d}{dm} I(m)dm = I(1) - I(0),\ \int_0^1 \{\frac{1}{1+m^2}[-\ln(1+m) + \frac{1}{2}\ln 2 + m\frac{\pi}{4}]\}dm =$$

$$-\int_0^1 \frac{\ln(1+m)}{1+m^2}dm + \frac{1}{2}\ln 2\int_0^1 (\frac{1}{1+m^2})dm + \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{mdm}{1+m^2}.$$

Согласно со тоа се добива равенката $I(1) - I(0) = -I(1) + \frac{\pi}{4}\ln 2$, од каде $I(1) = I = \frac{\ln 2}{8}\pi$.

За интегрирање под знакот на интеграл се користи особината за непрекината функција $f(x, y)$ на затворен правоаголник $[a, b]\times[c, d]$, за која важи

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dx \int_a^b f(x,y)dx.$$

***Пример* 6.5.** $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}dx = ?\ a > 0, b > 0.$

Бидејќи $\int_a^b x^y dy = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$, во согласност со особината

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\ln x} \ln x \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \ln\frac{b+1}{a+1}.$$

6.4. Тројни интеграли

Дефинирањето на троен интеграл се врши на аналоген начин како и дефинирањето на двоен интеграл.

***Дефиниција* 6.10.** Нека е дадено множество точки (затворен паралелопипед):

$$P = [a, b]\times[c, d]\times[e, h] = \{(x, y, z) \mid x\in[a, b],\ y\in[c, d], z\in[e, h]\}\subset \mathrm{R}^3.$$

Нека π_n, π_m, π_p се поделби на сегментите $[a, b]$, $[c, d]$, $[e, h]$, соодветно, со делбени точки $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b$, $c = y_0 < y_1 <\ldots< y_m = d$, $e = z_0 < z_1 <\ldots< z_p = h$. Со множеството затворени паралелопипеди

$$P_{ijk} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\times[z_{k-1}, z_k],\ i = 1,n, j = 1,m, k = 1,p,$$

е дефинирана поделбата π_{nmp} на паралелопипедот P. Бројот

$$d_{nmp} = \max_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m\\ 1\le k\le p}} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2}\ ,$$

каде што $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $i = 1,n$, $j = 1,m$, $k = 1, p$, се вика дијаметар на поделбата π_{nmp} .

***Дефиниција* 6.11.** Нека е дадена реална функција f од три реални променливи со равенката $u = f(x, y, z)$, дефинирана и ограничена на паралелопипедот P и нека π_{nmp} е една негова поделба. Сумата

$$\sigma(\pi_{nmp}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} f(\xi_i, \zeta_j, \varsigma_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k\ ,$$

каде што $(\xi_i, \zeta_j, \varsigma_k)$ се произволни точки од множествата

$$P_{ijk} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]\times[z_{k-1}, z_k],\ i = 1,n,\ j = 1,m,\ k = 1, p,$$

се вика интегрална сума на функцијата f на паралелопипедот P во однос на поделбата π_{nmp}.

***Дефиниција* 6.12.** Нека е дадена реална функција f од три реални променливи со равенката $u = f(x, y, z)$, дефинирана и ограничена на паралелопипедот P.

Ако постои реален број I со својство за секој позитивен реален број ε да може да се најде позитивен реален број $\delta(\varepsilon)$, така што за сите поделби π_{nmp} на паралелопипедот P, за кои дијаметрите $d_{nmp} < \delta$, да важи неравенството $|\sigma(\pi_{nmp}) - I\,| < \varepsilon$ независно од изборот на точките $(\xi_i, \zeta_j, \varsigma_k)$, тогаш бројот I се вика троен (Риманов) интеграл на функцијата f во однос на паралелопипедот P, со ознака

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dxdydz\,.$$

Во тој случај велиме дека функцијата f е интеграбилна на P, f е подинтегрална функција, x, y, z се подинтегрални променливи, а P е област на интеграција .

На ист начин се дефинираат и сумите на Дарбу и важат истите особини и теореми како кај двојниот интеграл. Теоремата за пресметување на троен интеграл при услов на непрекинатост на функцијата f во однос на паралелопипедот P ќе ја даде формулата

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b dx\int_c^d dy\int_e^h f(x,y,z)dz = \int_c^d dy\int_a^b dx\int_e^h f(x,y,z)dz =$$

$$\int_e^h dz\int_a^b dx\int_c^d f(x,y,z)dy = \int_a^b dx\int_e^h dz\int_c^d f(x,y,z)dy = \int_c^d dy\int_e^h dz\int_a^b f(x,y,z)dx =$$
$$\int_e^h dz\int_c^d dy\int_a^b f(x,y,z)dx\,.$$

На соодветен начин се проширува и дефиницијата за троен интеграл во однос на област, како и соодветната формула за пресметување.

***Дефиниција* 6.13.** Областа G се вика правилна ако е ограничена со површини кои се графици на непрекинати функции.

***Дефиниција* 6.14.** Областа G се вика елементарна во однос на рамнината $X0Y$ ако е од видот

$$G = \{(x, y, z)\in \mathrm{R}^3 \mid (x, y)\in D_{xy}\ ,\ \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\},$$

каде што φ_1 и φ_2 се непрекинати функции на правилната област $D_{xy}\subset \mathrm{R}^2$.

***Дефиниција* 6.15.** Областа G се вика елементарна во однос на рамнината $X0Z$ ако е од видот

$$G = \{(x, y, z)\in \mathrm{R}^3 \mid (x, z)\in D_{xz},\ \ \psi_1(x, z) \le y \le \psi_2(x, z)\},$$

каде што ψ_1 и ψ_2 се непрекинати функции на правилната област $D_{xz}\subset \mathrm{R}^2$.

***Дефиниција* 6.16.** Областа G се вика елементарна во однос на рамнината $Y0Z$ ако е од видот

$$G = \{(x, y, z)\in \mathrm{R}^3 \mid (y, z)\in D_{yz},\ \ \chi_1(y, z) \le x \le \chi_2(y, z)\},$$

каде што χ_1 и χ_2 се непрекинати функции на правилната област $D_{yz}\subset \mathrm{R}^2$.

***Дефиниција* 6.17.** Бројот $\iiint\limits_G dxdydz$ се вика волумен на правилната област G.

Формулите за пресметување на троен интеграл се аналогни на соодветните формули кај двоен интеграл и пресметувањето се сведува на двоен односно еднократен определен интеграл. На пример, формулата за пресметување на троен интеграл за елементарна област G во однос на рамнината $X0Y$ ќе гласи:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz .$$

Доколку областа на интеграција G не е правилна, тогаш се дели на повеќе правилни области, а правилните области се делат на елементарни, со што се овозможува пресметување на тројниот интеграл како сума од сите интеграли пресметани во однос на елементарни области (особина на адитивност).

***Пример* 6.6.** $\iiint\limits_G \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$ =? ако

$$G = \{(x, y, z)\in \mathrm{R}^3 \mid (x, y)\in D_{xy},\ 0 \le z \le 1 - x - y\},$$

$$D_{xy} = \{(x, y)\in \mathrm{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x \}.$$

Решение: $I = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int\limits_0^{1-x-y} \dfrac{dz}{(1+x+y+z)^3} = ...= \dfrac{1}{2}(\ln 2 - \dfrac{5}{8})$.

6.5. Метод на замена на променливи кај двојните и тројните интеграли

Досега работевме претежно со реални функции, т.е. функции чии вредности беа реални броеви. Сега ќе дефинираме пресликување од R^2 во R^2 .

***Дефиниција* 6.18.** Нека f и g се две реални функции од две реални променливи u и v, дефинирани на множество $E_{uv}\subset\mathrm{R}^2$. Дефинираме пресликување (оператор) $h = (f, g)$ од E_{uv} во R^2 со релацијата $h(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$ за секоја точка (u, v) од E_{uv}. Ако f и g се диференцијабилни функции на E_{uv}, тогаш детерминантата

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix}$$

се вика јакобијан на пресликувањето h, а пресликувањето се вика непрекинато диференцијабилно. Ако воведеме ознаки $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, тогаш јакобијанот се означува со $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

***Пример* 6.7.** Пресликувањето h: $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, зададено со функциите f и g, $f(u, v) = e^u \cos v$, $g(u, v) = e^u \sin v$ има јакобијан еднаков на e^{2u}.

***Пример* 6.8.** Кај пресликувањето h: $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, зададено со функциите f и g, $x = f(\rho, \varphi) = \rho\cos\varphi$, $y = g(\rho, \varphi) = \rho\sin\varphi$ (пресликување од Декартов во поларен координатен систем), јакобијанот е еднаков на ρ.

***Теорема* 6.8.** (Метод на замена.) Нека D_{uv}, $D_{xy} \subset \mathrm{R}^2$ се правилни отворени области и нека со пресликувањето $h = (f, g)$ затворената област $\overline{D}_{uv}$ се пресликува во затворената област $\overline{D}_{xy}$. Нека пресликувањето h е обратноеднозначно, непрекинато диференцијабилно на D_{uv} и непрекинато на $\overline{D}_{uv}$. Нека $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ и нека $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ за секое $(u, v) \in D_{uv}$. Ако е дадена реална функција F од две реални променливи x и y, непрекината на $\overline{D}_{xy}$, тогаш важи :

$$\iint\limits_{D_{xy}} F(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_{uv}} F(f(u,v), g(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| dudv .$$

За разлика од методот на замена кај еднократните определени интеграли, кој имаше за цел да ја упрости подинтегралната функција, кај двојните па и тројните интеграли во повеќето случаи методот на замена има за цел упростување на областа на интегрирање. За методот на замена кај тројниот интеграл соодветно се дефинира пресликување од R^3 во R^3 со три реални функции од три реални променливи и јакобијанот се дефинира со детерминантата

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} ,$$

при што $x = f(u, v, w)$, $y = g(u, v, w)$, $z = h(u, v, w)$ се диференцијабилни функции на множеството $E_{uvw} \subset \mathrm{R}^3$. Тогаш соодветната теорема, под дадени аналогни услови, го дава равенството

$$\iiint\limits_{V_{xyz}} F(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_{uvw}} F(f(u,v,w), g(u,v,w), h(u,v,w)) \mid J \mid dudvdw .$$

Освен Декартовиот просторен правоаголен координатен систем се користат и цилиндричен и сферен просторен координатен систем. Ако со x, y, z се означени координатите на точка во правоаголен просторен координатен систем, со φ, ρ, z се означени координатите на истата точка во цилиндричен просторен координатен систем, каде што φ и ρ го имаат истото значење како поларните координати во рамнината $X0Y$, тогаш врските меѓу нив се дадени со равенките $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$. Со тие равенки е дефинирано пресликување чиј јакобијан е еднаков на ρ. Овде улогата на u, v, w ја имаат φ, ρ и z.

Со равенките $x = \rho\cos\varphi\cos\theta$, $y = \rho\sin\varphi\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$ се дадени врските меѓу Декартовите координати и координатите φ, ρ, θ од сферен просторен координатен систем, каде што ρ е растојание од координатниот почеток до точката, θ е агол меѓу радиус-векторот на точката и неговата проекција на рамнината $X0Y$ и φ е аголот меѓу позитивната насока на оската x и таа проекција. Со тие равенки е дефинирано пресликување чијшто јакобијан е еднаков на $\rho^2\sin\varphi$.

И во двата случаја функциите f, g и h, со кои е дефинирано пресликувањето, ги задоволуваат соодветните услови. Овде улогата на u, v, w ја имаат φ, ρ и θ, при што $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \rho \le \propto$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

Пример **6.9.** Најди $\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}dxdy$, каде што D: $0 \le x^2 + y^2 \le R^2$.

Со замена во поларни координати $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, каде што јакобијанот е еднаков на ρ, се добива

$$\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R e^{\rho^2}\rho d\rho = \pi(e^{R^2} - 1).$$

6.6. Несвојствени двојни интеграли

Ако кај двојниот интеграл функцијата има точка на прекин од втор ред или ако областа на интеграција не е конечна, тогаш тој се вика несвојствен (сингуларен). Испитувањето на неговата конвергенција се врши на ист начин како и испитувањето кај еднократниот определен несвојствен интеграл (со гранична вредност).

***Пример* 6.10.** Покажи дека $\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}$.

Да ги разгледаме интегралите

$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\,,\quad \iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy\,,\quad \iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

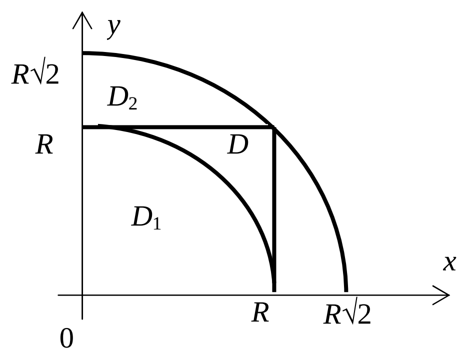
во однос на областите

$$D_1 = \{(x, y) \mid x \ge 0, y \ge 0, 0 \le x^2 + y^2 \le R^2\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid x \ge 0, y \ge 0, 0 \le x^2 + y^2 \le 2R^2\}$$

и

$$D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le R, 0 \le y \le R\} \text{ (цртеж 21).}$$



Цртеж 21

Со замена во поларни координати се добива:

$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R} e^{-\rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}),$$

$$\iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\sqrt{2}} e^{-\rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}).$$

Бидејќи $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} > 0$ и $D_1 \subset D \subset D_2$, се добива неравенството

$$\iint\limits_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \iint\limits_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy,$$

односно неравенството

$$\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) < \iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}dxdy < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2}).$$

При граничен процес $R\to\infty$ се добива

$$\lim_{R\to\infty} \iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4},$$

односно

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \frac{\pi}{4}.$$

Од друга страна,

$$\iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_0^R dx\int\limits_0^R e^{-x^2}e^{-y^2}dy = (\int\limits_0^R e^{-x^2}dx)(\int\limits_0^R e^{-y^2}dy) = (\int\limits_0^R e^{-x^2}dx)^2$$

и се добива $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Ојлер–Поасонов интеграл).

Познати специјални несвојствени интеграли (функции):

$$\Gamma(a) = \int\limits_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx,\ x\in(0, +\infty), 0 < a < 1,\ \Gamma(n+1) = n!,$$

(Ојлеров интеграл од I ред, гама функција);

$$\mathrm{B}(a, b) = \int\limits_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$$

(бета функција). За нив важи $\mathrm{B}(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ за $a, b > 0$.

Секако дека овде согласноста со соодветните формули во геометријата не се објаснуваа подетално како кај плоштина на криволиниски трапез. Инаку, сите геометриски рамнински или просторни фигури (слики, тела и сл.), за чии бројчени карактеристики се користат интегралите, обично аналитички подетално се дефинираат како квадратурни фигури, што може да се види во литературата [5, 8, 14]. Постои цела теорија за аксиоматско дефинирање на поимите плоштина, волумен на фигури кои се или не се квадратурни. Инаку поимот квадратурни фигури потекнува уште од антиката. Да се потсетиме дека уште Архимед ја проучувал квадратурата на кругот.

Двојните и тројните интеграли наоѓаат примена во пресметување на важни бројчени карактеристики и во други области.

На пример, ако е дадена густината на распределбата на масата на едно тело $G \subset \mathrm{R}^3$ со функцијата $\gamma(x, y, z)$, тогаш бројот $\iiint_G \gamma(x, y, z)dxdydz$ ја дава вкупната маса m на тоа тело. Броевите

$$\iiint_G z\gamma(x, y, z)dxdydz = M_{xy}, \qquad \iiint_G y\gamma(x, y, z)dxdydz = M_{xz},$$

$$\iiint_G x\gamma(x, y, z)dxdydz = M_{yz}$$

се статичките моменти на телото во однос на соодветните координатни рамнини. Координатите на тежиштето $T(x_c, y_c, z_c)$ на тоа тело се дадени со формулите

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad y_c = \frac{M_{zx}}{m}, \qquad z_c = \frac{M_{xy}}{m},$$

а моментот на инерција во однос на координатниот почеток е даден со бројот

$$I_0 = \iiint_G (x^2 + y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)dxdydz.$$

§7. КРИВОЛИНИСКИ ИНТЕГРАЛИ

Во аналитичката геометрија се сретнавме со права во простор. Со крива во рамнина се сретнавме кај реална функција од една реална променлива преку нејзиниот график. Потоа кај примената на определен интеграл се сретнавме со крива во рамнина во Декартов правоаголен координатен систем и дефиниравме Жорданова проста крива со помош на две функции φ и ψ со параметарските равенки $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, со почетна точка $A(x(\alpha), y(\alpha))$ и крајна точка $B(x(\beta), y(\beta))$, каде што функциите задоволуваа соодветни услови. За поедноставно пишување ќе ги употребуваме равенките $x = x(t)$, $y = y(t)$, односно векторската равенка $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, каде што $\vec{r}(t)$ е радиус-вектор на точките од таа крива во Декартов правоаголен рамнински координатен систем (со ова всушност е дефинирана векторска функција од една реална променлива).

Ако за параметар се земе должината на лакот s, тогаш равенките $x = x(s)$, $y = y(s)$, $s\in[0, L]$ се викаат природни равенки, каде што L е должина на кривата со почетна точка $A(x(0), y(0))$ и крајна точка $B(x(L), y(L))$. Доколку кривата е график на реална функција f од една реална променлива дадена со равенката $y = f(x)$, тогаш векторската равенка е дадена со

$$\vec{r}(x) = x\vec{i} + f(x)\vec{j}, \quad x\in D_f \quad ((x, f(x))\in G_f).$$

Доколку кривата е Жорданова глатка крива дадена со равенката $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$, се дефинира и векторски извод со $\dot{\vec{r}}(t) = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j}$, а ако е дадена со равенката $\vec{r}(x) = x\vec{i} + f(x)\vec{j}$, се дефинира векторски извод со $\dot{\vec{r}}(x) = \vec{i} + f'(x)\vec{j}$. Всушност, векторот со кој е дефинирана тангентата на кривата во определена точка има координати $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$, односно 1 и $f'(x)$, како што и беше покажано кај геометриското толкување на првиот извод. Притоа $\dot{\vec{r}}(t) \neq \vec{0}$. Ако Δx е нараснување на променливата x во точката x_0, тогаш соодветното нараснување на радиус-векторот, односно на векторската функција $\vec{r}(x)$, е

$$\Delta\vec{r}(x_0) = \vec{r}(x_0 + \Delta x) - \vec{r}(x_0) = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} =$$
$$\Delta x\vec{i} + [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]\vec{j}.$$

Поимот рамнинска крива се обопштува и во простор, така што во даден просторен Декартов правоаголен систем просторната крива ќе биде зададена со три функции дадени со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, односно со векторската равенка

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

со почетна точка $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ и крајна точка $B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$. Ако како параметар се земе должината на лакот s, тогаш равенките $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, $s \in [0, L]$, се викаат природни равенки, каде што L е должина на кривата со почетна точка $A(x(0), y(0), z(0))$ и крајна точка $B(x(L), y(L), z(L))$.

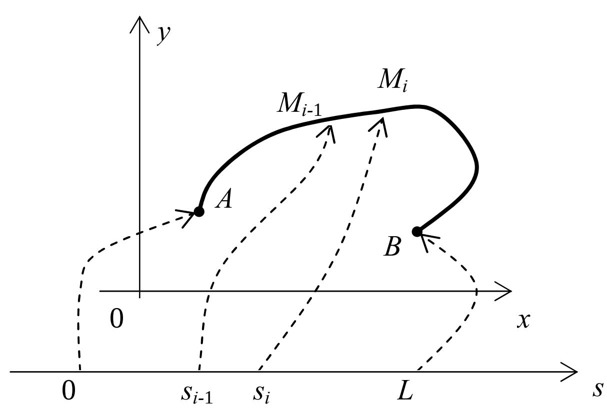
Понатаму ќе работиме со рамнинска проста Жорданова глатка крива, при што обопштувањето на просторна крива ќе го илустрираме како конечен резултат.

7.1. Криволиниски интеграл во однос на лак

***Дефиниција* 7.1.** Нека е дадена рамнинска проста Жорданова глатка крива со равенките $x = x(s)$, $y = y(s)$, $s \in [0, L]$, со почетна точка $A(x(0), y(0))$ и крајна точка $B(x(L), y(L))$. Нека π_n е една поделба на сегментот $[0, L]$ со делбени точки $0 = s_0 < s_1 < ... < s_n = L$ на кои одговараат делбени точки од кривата $A = M_0, M_1, ..., M_n = B$ и нека $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ е должина на лакот $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$, $i = \overline{1,n}$ (цртеж 22). Бројот

$$d_n = \max_{1 \le i \le n} \Delta s_i$$

се вика дијаметар на поделбата.



Цртеж 22

Нека понатаму е дадена функција f од две реални променливи со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана во област D која ја содржи кривата AB. Дефинираме сума со формулата $\sigma(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \zeta_i)\Delta s_i$, каде што точката (ξ_i, ζ_i) е произволна точка од лакот $M_{i-1}M_i$, при што $\xi_i = x(\eta_i)$, $\zeta_i = y(\eta_i)$, $\eta_i \in [s_{i-1}, s_i]$, $i = \overline{1,n}$.

***Дефиниција* 7.2.** Нека е дадена функција f од две реални променливи со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана во област D која ја содржи кривата AB. Ако постои реален број I со својство за произволен реален позитивен број ε да постои реален позитивен број $\delta(\varepsilon)$, така што за секоја поделба π_n на кривата AB, чиј дијаметар $d_n < \delta$, важи $|\sigma(\pi_n) - I| < \varepsilon$ за секој избор на точките (ξ_i, ζ_i), $i = \overline{1,n}$, тогаш бројот I се вика криволиниски интеграл од функцијата f во однос на кривата AB (криволиниски интеграл по лак или криволиниски интеграл од прв тип) со ознака $\int_{AB} f(x, y)ds$.

***Теорема* 7.1.** Нека е дадена рамнинска проста Жорданова глатка крива AB со равенките $x = x(s)$, $y = y(s)$, $s \in [0, L]$, со почетна точка $A(x(0), y(0))$ и крајна точка $B(x(L), y(L))$. Ако функцијата f е непрекината во некоја област која ја содржи кривата AB, тогаш важи формулата

$$\int_{AB} f(x, y)ds = \int_0^L f(x(s), y(s))ds .$$

Доказ: Бидејќи функциите $x(s)$, $y(s)$, $f(x, y)$ се непрекинати, и сложената функција $f(x(s), y(s))$, како функција од една реална променлива s дефинирана на сегментот $[0, L]$, е непрекината на тој сегмент. Нека π_n е една поделба на сегментот $[0, L]$. Тогаш сумата $\sigma(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x(\eta_i), y(\eta_i))\Delta s_i$, каде што $\eta_i \in [s_{i-1}, s_i]$, $i = \overline{1,n}$, ќе претставува интегрална сума за сложената функција $f(x(s), y(s))$ за која, бидејќи е непрекината на сегментот $[0,L]$, ќе постои определен интеграл $\int_0^L f(x(s), y(s))ds$, еднаков на криволинискиот интеграл $\int_{AB} f(x, y)ds$ (ист граничен процес $\max_{1 \le i \le n} \Delta s_i \to 0$ и исти интегрални суми).

Нека е дадена отворена глатка Жорданова крива со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, со почетна точка $A(x(\alpha), y(\alpha))$ и крајна точка $B(x(\beta), y(\beta))$ и должина L. Дефиницијата на криволинискиот интеграл во однос на кривата AB е наполно иста, со тоа што се земаат поделбите на сегментот $[\alpha, \beta]$.

Кај примената на определен интеграл беше дефинирана функција $s(t) = \int\limits_{\alpha}^{t}\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt$, $\forall t\in[\alpha, \beta]$, која е строго монотоно растечка, при што важи $ds = +\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt$. Ако f е непрекината функција во сите точки од кривата AB, тогаш со методот на замена во определениот интеграл $\int\limits_{0}^{L} f(x(s), y(s))ds$, со замена дефинирана со равенката $s = s(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, $s(\alpha) = 0$, $s(\beta) = L$, се добива формулата

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt .$$

Ако пак кривата AB е зададена како график на непрекината диференцијабилна функција φ дадена со равенката $y = \varphi(x)$, $x\in[a, b]$, $A(a, \varphi(a))$, $B(b, \varphi(b))$, тогаш, избирајќи го x како параметар, од последната формула се добива:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}dx , \quad (x = t,\ y = \varphi(t),\ t\in[a, b]).$$

Ако пак кривата AB е зададена како график на непрекината диференцијабилна функција ψ дадена со равенката $x = \psi(y)$, $y\in[c, d]$, $A(\psi(c), c)$, $B(\psi(d), d)$, тогаш, избирајќи го y како параметар, од последната формула се добива:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{c}^{d} f(\psi(y), y)\sqrt{1+\psi'^2(y)}dy , \quad (x = \psi(t),\ y = t,\ t\in[c, d]).$$

Да забележиме дека во сите случаи на пресметување на криволиниски интеграл од прв тип преку пресметување на определен еднократен интеграл кривата AB е ориентирана крива со почетна точка A и крајна точка B, при што со растење на соодветниот параметар расте и должината s, т.е.

$$ds = +\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt .$$

Според дефиницијата на криволиниски интеграл од прв тип важи

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds \ .$$

За да го докажеме тоа, нека една иста Жорданова глатка крива Γ со должина L е зададена со два пара различни природни равенки, и тоа $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $s\in[0, L]$, и $x = \varphi(L-s)$, $y = \psi(L-s)$, $s\in[0, L]$, при што и во двата случаја функциите φ и ψ се исти (да забележиме дека кај вториот пар функции со кои е зададена кривата всушност се работи за сложени функции $\varphi \circ \lambda$, односно $\psi \circ \lambda$, каде што λ е линеарна функција дадена со $\lambda(s) = L - s$).

Нека со A е означена точката од кривата Γ која се добива за вредност на параметарот $s = 0$ во првиот пар природни равенки, т.е. $A(\varphi(0),\ \psi(0))$, и нека со B е означена точката од кривата Γ која се добива за вредност на параметарот $s = L$ во првиот пар природни равенки, т.е. $B(\varphi(L),\ \psi(L))$. Очигледно е дека истите точки ќе се добијат ако во вториот пар природни равенки за вредности на параметарот се земат вредностите $s = L$ за точката A и $s = 0$ за точката B. Притоа во првиот случај точката A е почетна точка, а во вториот случај почетна точка е точката B (ориентирани криви).

Според дефиницијата за криволиниски интеграл и формулата за негово пресметување, за криволиниски интеграл вдолж кривата Γ зададена со првиот пар природни равенки ќе имаме:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_0^L f(\varphi(s),\psi(s))ds\,,$$

а за криволиниски интеграл вдолж кривата Γ зададена со вториот пар природни равенки ќе имаме:

$$\int_{BA} f(x,y)ds = \int_0^L f(\varphi(L-s),\psi(L-s))ds\,.$$

Со едноставна замена на подинтегралната променлива во определен интеграл од десната страна на последното равенство ($L - s = s^*$) се добива точно определен интеграл кој фигурира на десната страна од претпоследното равенство, со што е докажано равенството (да забележиме дека кај определениот интеграл, кој е број, не е битна ознаката на подинтегралната променлива).

***Пример* 7.1.** $\int\limits_{\Gamma} y^2 ds$ = ? каде што Γ: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t\in[0, 2\pi]$ (циклоида).

$$I = \int\limits_{0}^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\sqrt{2a(1-\cos t)}dt = \frac{256}{15}a^3.$$

***Пример* 7.2.** $\int\limits_{\Gamma}(x+y)ds$ =? ако Γ: $\rho = a^2\cos 2\varphi$, $\varphi\in[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. (лемниската).

$$I = \int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(a^2\cos\varphi\cos 2\varphi + a^2\cos 2\varphi\sin\varphi)\sqrt{a^4\cos^2 2\varphi + a^4\sin^2 2\varphi\cdot 2}d\varphi =$$

$$-a^2\sqrt{2}\,.$$

Значи, пресметувањето на криволиниски интеграл се сведува на пресметување на еднократен определен интеграл.

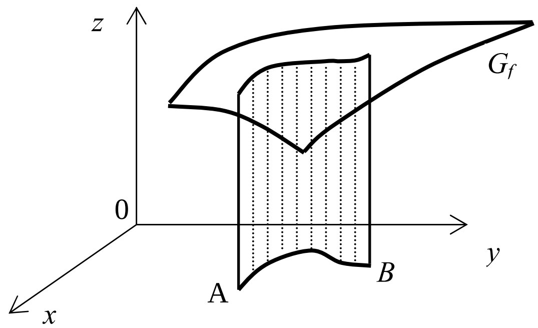
***Дефиниција* 7.3.** Нека е дадена отворена глатка Жорданова крива AB. Бројот $\int\limits_{AB} ds$ се вика должина на кривата AB.

Оваа дефиниција е во согласност со соодветната формула за пресметување на должината на лак, добиена кај примената на определениот интеграл, и соодветната формула за растојание меѓу две точки во рамнина од аналитичката геометрија.

***Теорема* 7.2.** Нека е дадена глатка Жорданова крива AB со равенките $x = x(s)$, $y = y(s)$, $s\in[0, L]$, каде што L е должина на кривата со почетна точка $A(x(0), y(0))$ и крајна точка $B(x(L), y(L))$. Нека f е функција дадена со равенката $z = f(x, y)$, непрекината во точките од кривата, со особина $f(x, y) \geq 0$ за секое $(x, y)\in AB$.

Тогаш $\int\limits_{AB} f(x,y)ds$ е еднаков на плоштината на делот од цилиндричната површина чија директриса е кривата AB, генератриси прави паралелни со оската z и која е ограничена со рамнината $X0Y$ и површината G_f.

Ова тврдење може да се покаже со помош на интегрални суми и со дефиницијата на криволиниски интеграл, на сличен начин како кај определен интеграл за добивање формула за пресметување плоштина на криволиниски трапез (цртеж 23).



Цртеж 23

Со помош на соодветните особини на определените еднократни интеграли и врската со криволиниските интеграли лесно се докажуваат следните особини:

***Особина* 7.1.**

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{AC} f(x,y)ds + \int_{CB} f(x,y)ds\,,\ C\in AB\,.$$

***Особина* 7.2.**

$$\int_{AB}[f(x,y)+g(x,y)]ds = \int_{AB} f(x,y)ds + \int_{AB} g(x,y)ds\,;$$

$$\int_{AB} Kf(x,y)ds = K\int_{AB} f(x,y)ds \ \ (K \text{ е константа}).$$

***Особина* 7.3.** Ако $f(x,y) \geq 0$ за секое $(x, y)\in AB$, тогаш

$$\int_{AB} f(x,y)ds \geq 0\,.$$

***Особина* 7.4.** (Теорема за средна вредност.) Постои точка $(\xi, \zeta)\in AB$ таква што важи $\int_{AB} f(x,y)ds = Lf(\xi,\zeta)$.

***Особина* 7.5.** $mL \leq \int_{AB} f(x,y)ds \leq ML$, каде што $m \leq f(x, y) \leq M$ за секое $(x, y)\in AB$.

Во сите особини кривата AB е глатка проста Жорданова крива со должина L и $f(x, y)$, $g(x, y)$ се непрекинати функции во точките од кривата AB. Некои од нив важат и во поопшт случај.

Ако кривата AB е просторна глатка Жорданова крива дадена со природните равенки $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, $s\in[0, L]$, каде што L е должина на кривата со почетна точка $A(x(0), y(0), z(0))$ и крајна точка $B(x(L), y(L), z(L))$, и ако е дадена функција f од три реални променливи со равенката $u = f(x, y, z)$ дефинирана во област која ја содржи кривата AB, тогаш криволинискиот интеграл $\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds$ се дефинира на ист начин.

Притоа, ако f е непрекината функција во сите точки од кривата AB, важи формулата

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_{0}^{L} f(x(s),y(s),z(s))ds\,.$$

Ако пак просторната крива е дадена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, со почетна точка $A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha))$ и крајна точка $B(x(\beta), y(\beta), z(\beta))$, тогаш формулата за пресметување е:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt\,.$$

Притоа важат истите особини и со $\int\limits_{0}^{L} ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt = L$ се дефинира должината на просторната крива AB.

Во случај кривата да не е глатка Жорданова, тогаш таа се дели на делови кои се глатки Жорданови криви (по делови глатка крива) и пресметувањето се врши според особината за адитивност. Ако кривата $AB = K$ $(A \equiv B)$ е затворена, тогаш за криволинискиот интеграл се употребува ознаката $\oint\limits_{K} f(x,y)$.

7.2. Криволиниски интеграл во однос на координатни оски

***Дефиниција* 7.4.** Нека е дадена рамнинска проста Жорданова глатка крива AB која е график на функцијата f дадена со равенката $y = f(x)$, $x\in[a, b]$, со почетна точка $A(a, f(a))$ и крајна точка $B(b, f(b))$.

Нека π_n е една поделба на сегментот $[a,b]$ со делбени точки $a = x_0 < x_1 <\ldots< x_n = b$ на кои одговараат делбени точки од кривата

$A = M_0, M_1, ..., M_n = B$ и нека $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,n$. Бројот $d_n = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta x_i$ се вика дијаметар на поделбата.

Нека понатаму е дадена функција P од две реални променливи со равенката $z = P(x, y)$, дефинирана во област $D\subset \mathrm{R}^2$ која ја содржи кривата AB. Дефинираме сума со формулата

$$\sigma(\pi_n) = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \zeta_i)\Delta x_i \,,$$

каде што точката (ξ_i, ζ_i) е произволна точка од лакот $M_{i-1} M_i$, при што $\zeta_i = f(\xi_i)$ и $M_i(x_i, f(x_i))$, $i = 1,n$.

***Дефиниција* 7.5.** Нека е дадена функција P од две реални променливи со равенката $z = P(x, y)$, дефинирана во област $D\subset \mathrm{R}^2$ која ја содржи кривата AB. Ако постои реален број I, со својство за произволен реален позитивен број ε да постои реален позитивен број $\delta(\varepsilon)$ така што за секоја поделба π_n на сегментот $[a, b]$, чиј дијаметар $d_n < \delta$, важи $|\sigma(\pi_n) - I| < \varepsilon$ за секој избор на точките (ξ_i, ζ_i), $i = 1,n$, тогаш бројот I се вика криволиниски интеграл од функцијата P вдолж кривата AB во однос на координатата x (криволиниски интеграл по координатата x, или криволиниски интеграл од втор тип) со ознака $\int\limits_{AB} P(x, y)dx$.

Ако функцијата P е непрекината во сите точки од кривата AB, тогаш важи формулата

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx = \int\limits_{a}^{b} P(x, f(x))dx \,.$$

Доказот на последната формула се изведува на ист начин преку дефинирање сложена функција $P(x, f(x))$ која е непрекината на сегментот $[a, b]$.

Ако пак кривата AB е рамнинска проста Жорданова глатка крива, дадена со параметарски равенки $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, при што $\varphi'(t) \neq 0$ на сегментот $[\alpha, \beta]$, тогаш криволинискиот интеграл вдолж кривата AB се дефинира на ист начин, ставајќи $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Ако пак функцијата P е непрекината во точките од кривата AB, тогаш важи формулата

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)dt \,.$$

***Дефиниција* 7.6.** Нека е дадена рамнинска проста Жорданова глатка крива AB, која е график на функцијата g дадена со равенката $x = g(y)$, $y\in[c, d]$, со почетна точка $A(g(c), c)$ и крајна точка $B(g(d), d)$.

Нека π_n е една поделба на сегментот $[c, d]$ со делбени точки $c = y_0 < y_1 <...< y_n = d$ на кои одговараат делбени точки од кривата $A = M_0, M_1,..., M_n = B$ и нека $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $i = 1,n$. Бројот $d_n = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta y_i$ се вика дијаметар на поделбата.

Нека понатаму е дадена функција Q од две реални променливи со равенката $z = Q(x, y)$, дефинирана во област $D\subset \mathrm{R}^2$ која ја содржи кривата AB.

Дефинираме сума со формулата $\sigma(\pi_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} Q(\xi_i, \zeta_i)\Delta y_i$, каде што точката (ξ_i, ζ_i) е произволна точка од лакот $M_{i-1} M_i$, при што $\xi_i = g(\zeta_i)$ и $M_i(g(y_i), y_i)$, $i = 1,n$.

***Дефиниција* 7.7.** Нека е дадена функција Q од две реални променливи со равенката $z = Q(x, y)$, дефинирана во област $D\subset \mathrm{R}^2$ која ја содржи кривата AB.

Ако постои реален број I со особина за произволен реален позитивен број ε да постои реален позитивен број $\delta(\varepsilon)$, така што за секоја поделба π_n на сегментот $[c, d]$, чиј дијаметар $d_n < \delta$, важи $|\sigma(\pi_n) - I| < \varepsilon$ за секој избор на точките (ξ_i, ζ_i), $i = 1,n$, тогаш бројот I се вика криволиниски интеграл од функцијата Q вдолж кривата AB во однос на координатата y (криволиниски интеграл по координатата y, или криволиниски интеграл од втор тип) со ознака $\int\limits_{AB} Q(x, y)dy$.

Ако функцијата Q е непрекината во сите точки од кривата AB, тогаш важи формулата

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)dy = \int\limits_{c}^{d} Q(g(y), y)dy .$$

Доказот на последната формула се изведува на ист начин преку дефинирање сложена функција $Q(g(y), y)$ која е непрекината на сегментот $[c, d]$.

Ако пак кривата AB е рамнинска проста Жорданова глатка крива, дадена со параметарски равенки $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, при што $\psi'(t) \neq 0$ на сегментот $[\alpha, \beta]$, тогаш криволинискиот интеграл вдолж кривата AB во однос на координатата y се дефинира на ист начин ставајќи $g(y) = \varphi(\psi^{-1}(y))$, $c = \psi(\alpha)$, $d = \psi(\beta)$. Ако функцијата Q е непрекината во точките од кривата AB, тогаш важи формулата

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)dt .$$

Доколку простата Жорданова глатка крива AB е дадена со природните равенки $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $s\in[0, L]$, тогаш за дефинирање на криволинискиот интеграл од втор тип во однос на координатата x е потребен и условот $\varphi'(s) \neq 0$ на сегментот $[0, L]$. Притоа $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$, $a = \varphi(0)$, $b = \varphi(L)$. Ако пак функцијата P е непрекината во сите точки од кривата AB, тогаш ќе важи формулата

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{0}^{L} P(\varphi(s),\psi(s))\varphi'(s)ds .$$

Доколку простата Жорданова глатка крива AB е дадена со природните равенки $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$, $s\in[0, L]$, тогаш за дефинирање на криволинискиот интеграл од втор тип во однос на координатата y е потребен и условот $\psi'(s) \neq 0$ на сегментот $[0, L]$. Криволинискиот интеграл вдолж кривата AB се дефинира на ист начин ставајќи $g(y) = \varphi(\psi^{-1}(y))$, $c = \psi(0)$, $d = \psi(L)$. Ако пак функцијата Q е непрекината во сите точки од кривата AB, тогаш ќе важи формулата

$$\int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{0}^{L} Q(\varphi(s),\psi(s))\psi'(s)ds .$$

Нека кривата AB не е график на некоја функција f и нека може да се подели на конечен број делови кои се графици на функции кои имаат непрекинат извод (за да бидат прости Жорданови глатки криви). Тогаш криволинискиот интеграл од втор тип вдолж кривата AB во однос на една иста координата се дефинира со сума на криволиниските интеграли од втор тип вдолж сите делови .

Во согласност со дефинициите за криволиниски интеграли вдолж кривата AB во однос на координатите x и y може да се покаже дека

$$\int_{AB} P(x,y)dx = -\int_{BA} P(x,y)dx , \quad \int_{AB} Q(x,y)dy = -\int_{BA} Q(x,y)dy ,$$

што значи дека е битно која точка од кривата е почетна, а која крајна (за разлика од криволинискиот интеграл од прв тип).

Понатаму ќе обележуваме

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy\,,$$

ако постојат двата интеграла од десната страна вдолж истата крива.

Ако Жордановата проста глатка крива AB е дадена со параметарски равенки $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, при што $\varphi'(t) \neq 0$ и $\psi'(t) \neq 0$ на сегментот $[\alpha, \beta]$, и ако функциите P и Q се непрекинати во сите точки од кривата AB, тогаш важи формулата

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]dt\,.$$

***Пример* 7.3.** Да се пресметаат интегралите

$$I_1 = \int_{AB} (2x^2 + 4xy)dx \qquad \text{и} \qquad I_2 = \int_{AB} (2x^2 - y^2)dy\,,$$

каде што AB: $y = x^2$, $A(1, 1)$, $B(2, 4)$.

$$I_1 = \int_1^2 (2x^2 + 4x^3)dx = \frac{59}{3}\,; \qquad I_2 = \int_1^2 (2x^2 - x^4)2xdx = -6.$$

***Пример* 7.4.** Да се пресмета интегралот

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} (x^2 + y^2)dx + 2xydy\,,$$

вдолж кривата а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $x = y^2$.

$$\text{а) } \int_0^1 (x^2 + x^2)dx + 2x^2dx = \frac{4}{3}; \qquad \text{б) } \int_0^1 (x^2 + x^4)dx + 2x^3 2xdx = \frac{4}{3};$$

$$\text{в) } \int_0^1 (y^4 + y^2)2ydy + 2y^2ydy = \frac{4}{3}.$$

Да забележиме дека постои тесна врска меѓу криволиниските интеграли од двата типа.

Кај примената на определениот интеграл за пресметување должина на крива дадена со равенките $x = x(t)$, $y = y(t)$ е добиена релацијата $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Ако α е аголот меѓу позитивната насока на оската x и тангентата на кривата, тогаш $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ и според тоа

$\sin\alpha = \dfrac{dy}{ds}$, $\cos\alpha = \dfrac{dx}{ds}$, од каде се добива $dx = ds\cos\alpha$, $dy = ds\sin\alpha$. Тогаш лесно се добиваат врските меѓу криволиниските интеграли од двата типа, дадени со формулите:

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{AB} f(x,y)\frac{1}{\cos\alpha}dx = \int_{AB} f(x,y)\frac{1}{\sin\alpha}dy,$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{AB} P(x,y)\cos\alpha ds, \quad \int_{AB} Q(x,y)dy = \int_{AB} Q(x,y)\sin\alpha ds,$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} [P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\sin\alpha]ds.$$

Во врските е битен редоследот на точките A и B кај криволиниските интеграли од втор тип, бидејќи во случај на промена, т.е. наместо вдолж AB да е вдолж BA, треба да се земе $-\sin\alpha$ односно $-\cos\alpha$ (спротивна насока на векторот на тангентата односно негативната ориентација на кривата), додека криволиниски интеграли од прв тип не ја менуваат својата вредност. Исто така е битно да се нагласи дека ако функцијата $f(x, y)$ е функција во однос на која се пресметува криволиниски интеграл од прв тип, тогаш функцијата $f(x, y)\dfrac{1}{\cos\alpha}$, односно функцијата $f(x, y)\dfrac{1}{\sin\alpha}$ се функциите во однос на кои се пресметуваат криволиниските интеграли од втор тип. Истото важи за функциите $P(x, y)$, $Q(x, y)$ кај криволиниските интеграли од втор тип и функциите $P(x, y)\cos\alpha$ и $Q(x, y)\sin\alpha$ кај криволиниските интеграли од прв тип.

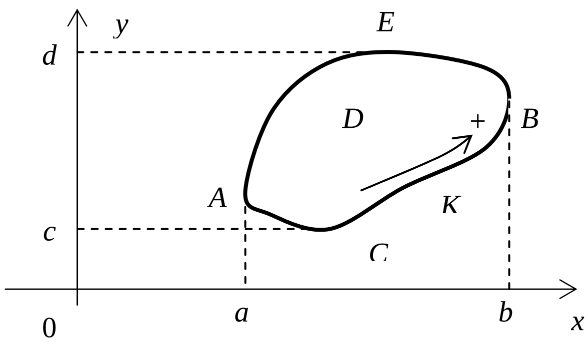
***Дефиниција* 7.8.** Нека е дадена затворена проста Жорданова глатка крива K која ограничува област D во Декартов правоаголен координатен систем. Велиме дека за кривата K е избрана позитивна насока ако кривата е насочена спротивно од стрелките на часовникот (десен триедар) или ако при обиколката на областа D вдолж кривата областа D останува од лева страна.

***Теорема* 7.3.** (Гринова формула.) Нека $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ се непрекинати функции во област која ја содржи правилната област D која е елементарна во однос на оските x и y и ограничена со затворена проста Жорданова глатка крива (контура K). Нека на контурата K е избрана позитивна насока (областа D останува од лева страна кога се движи точка вдолж контурата). Тогаш е точна формулата

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy = -\oint_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

(врска меѓу двоен и криволиниски интеграл).

Доказ: Нека A и B се точки од контурата K со екстремни апсциси и C и E точки од контурата K со екстремни ординати (цртеж 24).



Цртеж 24

Нека AEB е крива која е график на функција $f_2(x)$, $x \in [a, b]$, ACB крива која е график на функција $f_1(x)$, $x \in [a, b]$, CAE крива која е график на функција $g_1(y)$, $y \in [c, d]$, а CBE крива која е график на функција $g_2(y)$, $y \in [c, d]$, при што

$$A(a,\ f_1(a)),\quad B(b,\ f_1(b)),\quad C(g_1(c), c),\quad E(g_1(d), d),$$

$$f_1(a) = f_2(a),\quad f_1(b) = f_2(b),\quad g_1(c) = g_2(c),\quad g_1(d) = g_2(d),$$

$$f_1(x) \le f_2(x) \text{ за } x \in [a, b],\qquad g_1(y) \le g_2(y) \text{ за } y \in [c, d].$$

Тогаш

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b [P(x, f_2(x)) - P(x, f_1(x))]dx =$$

$$\int_{AEB} P(x,y)dx - \int_{ACB} P(x,y)dx = -\int_{BEA} P(x,y)dx - \int_{ACB} P(x,y)dx = -\oint_K P(x,y)dx\,.$$

Понатаму

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_c^d dy \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d [Q(g_2(y), y) - Q(g_1(y), y)]dy =$$

$$\int_{CBE} Q(x,y)dy - \int_{CAE} Q(x,y)dy = \int_{CBE} Q(x,y)dy + \int_{EAC} Q(x,y)dy = \oint_K Q(x,y)dy .$$

Значи,

$$\iint_D (\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})dxdy = -\oint_K P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

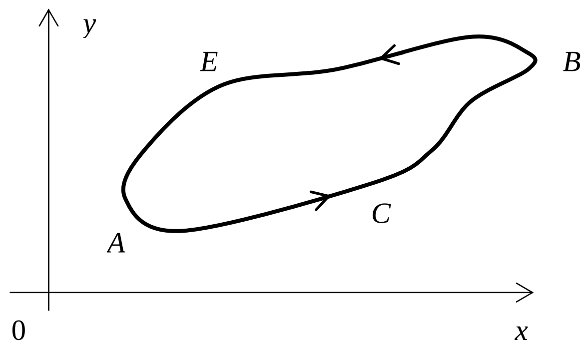
Со примена на Гриновата формула лесно може да се добие формулата за пресметување на плоштина на правилна рамнинска фигура D, ограничена со затворена крива K. Имено, плоштината е еднаква на $\frac{1}{2}\oint_K [xdy - ydx]$, земајќи во Гриновата формула $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = -x$ и користејќи дека плоштината на рамнинската фигура D е еднаква на $\iint_D dxdy$.

Кај функциите од повеќе променливи за диференцијалниот израз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ со теоремите 5.3 и 5.4 беше покажано следното тврдење. Ако $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ се непрекинати функции во затворена елементарна област D, тогаш постои функција F дадена со равенката $z = F(x, y)$ со особина $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$, т.е. диференцијалниот израз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ е нејзин тотален диференцијал ако и само ако $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ во сите точки од областа D.

***Теорема* 7.4.** (Независност на криволиниски интеграл од кривата.) Нека $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ се функции дефинирани и непрекинати во проста едносврзна област D и нека $AB \subset D$ е произволна проста Жорданова глатка крива. Ако $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ во сите точки од областа D, тогаш криволинискиот интеграл $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не зависи од кривата која ги поврзува точките A и B.

Доказ: Најпрвин ќе докажеме дека криволинискиот интеграл вдолж која било затворена проста Жорданова глатка крива е еднаков на нула.

Нека $AEB \subset D$ и $ACB \subset D$ се две произволни различни криви кои не се сечат освен во точките A и B (цртеж 25).



Цртеж 25

Според формулата на Грин во однос на областа $D_1 \subset D$ ограничена со кривите AEB и ACB ќе важи:

$$\iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy = -\oint\limits_{ACBEA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Бидејќи важи $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ во сите точки од областа D, од последното равенство се добива:

$$\oint\limits_{ACBEA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Според тоа важи равенството

$$\int\limits_{ACB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{BEA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

односно равенството

$$\int\limits_{ACB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AEB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Да забележиме дека е точно и обратното тврдење, т.е. ако криволинискиот интеграл вдолж која било Жорданова крива која припаѓа на D не зависи од кривата, тогаш важи равенството $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Доказот се спроведува врз основа на контрадикторност.

Ако кривата AB е дадена со параметарски равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, $A(x(\alpha), y(\alpha))$, $B(x(\beta), y(\beta))$, според условите на теоремата 7.4 постои функција F таква што $dF(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Тогаш

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} dF(x,y) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dF(x(t),y(t))}{dt}dt =$$

$$F(x(\beta), y(\beta)) - F(x(\alpha), y(\alpha)) = F(B) - F(A),$$

што значи дека криволинискиот интеграл се добива како разлика од вредностите на функцијата F во почетната и крајната точка на кривата.

Ако кривата AB е просторна Жорданова проста глатка крива дадена со параметарските равенки

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\quad t\in[\alpha, \beta],\quad A(x(\alpha), y(\alpha), z(\alpha)),\quad B(x(\beta), y(\beta), z(\beta)),$$

тогаш криволиниските интеграли од втор тип

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx\,, \qquad \int_{AB} Q(x,y,z)dy\,, \qquad \int_{AB} R(x,y,z)dz$$

во однос на координатите x, y и z се дефинираат на ист начин.

Под услов функциите P, Q, R од три реални променливи да се непрекинати во сите точки од кривата AB, формулите за нивно пресметување ќе бидат дадени со

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t))\dot{x}(t)dt\,,$$

$$\int_{AB} Q(x,y,z)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t), y(t), z(t))\dot{y}(t)dt\,,$$

$$\int_{AB} R(x,y,z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} R(x(t), y(t), z(t))\dot{z}(t)dt\,.$$

Доколку вдолж иста крива AB постојат трите криволиниски интеграли $\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx$, $\int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy$, $\int\limits_{AB} R(x,y,z)dz$, се дефинира и криволинискиот интеграл:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y,z)dy + \int\limits_{AB} R(x,y,z)dz .$$

***Пример* 7.5.** Да се пресмета

$$\oint\limits_{K} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz ,$$

каде што $P(x, y, z) = xz + y$, $Q(x, y, z) = yz - x$, $R(x, y, z) = x^2 + y^2$ и K е затворена просторна крива дадена со равенките $x^2 + y^2 = 1$, $z = 3$.

Решение: Параметарските равенки на кривата K се $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 3$, $t \in [0, 2\pi]$ и според формулата

$$I = \int\limits_0^{2\pi} (-3\sin t\cos t - \sin^2 t + 3\sin t\cos t - \cos^2 t)dt = -\int\limits_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

Ако $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$ се непрекинати функции во сите точки од правилната просторна област $G \subset \mathrm{R}^3$ во која припаѓа просторната крива AB и ако важат условите

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$$

во сите точки од областа G, тогаш диференцијалниот израз

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

е тотален диференцијал на некоја функција F, при што

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y, z),\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y, z),\ \frac{\partial F}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Во тој случај криволинискиот интеграл

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

не зависи од кривата $AB \subset G$, туку само од почетната точка A и крајната точка B и е еднаков на $F(B) - F(A)$.

§8. ПОВРШИНСКИ ИНТЕГРАЛИ

Со површини во простор R^3, во кој е даден правоаголен Декартов координатен систем дефиниран со десен триедар, се сретнавме во аналитичката геометрија во простор и кај реална функција од две реални променливи како геометриска интерпретација на нејзин график. Рамнината беше аналитички дадена со равенката $Ax + By + Cz + D = 0$, односно како график на линеарна реална функција од две реални променливи.

Равенката на површина во простор R^3, во кој е даден правоаголен Декартов координатен систем, беше аналитички дадена со равенката $z = f(x, y)$, при што површината геометриски ја дефиниравме како множество точки со

$$\{(x, y, z)\in R^3 \mid z = f(x, y), (x, y)\in D_{xy}\subset R^2\},$$

каде што D_{xy} е дефиниционата област на функцијата f. Притоа да забележиме дека постои заемно еднозначно пресликување меѓу точките од областа D_{xy} и точките од површината (во согласност со дефиницијата на функција).

Ако функцијата f има непрекинати први парцијални изводи во областа D_{xy}, тогаш соодветната површина се вика глатка површина.

Со геометриска интерпретација како глатки површини во правоаголен Декартов координатен систем можат да се разгледуваат и графиците на функции дадени со равенките $x = g(y, z)$, $y = h(z, x)$, со дефинициони области кои припаѓаат во координатните рамнини $Y0Z$ односно $Z0X$.

Површина Σ во правоаголен Декартов координатен систем може да е дадена и со векторска равенка $\vec{r}\,(x, y) = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + f(x, y)\,\vec{k}$, каде што $\vec{r}\,(x, y)$ се радиус-векторите на точките од површината. Притоа, ако Σ е глатка површина, можат да се дефинираат изводите $\vec{r}_x = \vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{k}$, $\vec{r}_y = \vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{k}$. Векторскиот производ на овие два вектора е всушност нормалниот вектор на тангентната рамнина на површината во соодветна точка. Значи,

$$\vec{n} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = -\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k},$$

додека $|\vec{n}|^2 = |\vec{r}_x \times \vec{r}_y|^2 = 1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 > 0$ за секое $(x, y) \in D_{xy}$ ($\vec{r}_x$, $\vec{r}_y$ не се колинеарни).

***Дефиниција* 8.1.** Нека се дадени Декартов просторен правоаголен координатен систем во $R^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$ и рамнина W со даден правоаголен Декартов координатем систем со координатни оски u и v. Нека се дадени три реални функции од две реални променливи со равенките $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \chi(u, v)$, дефинирани во областа $D_{uv} \subset W$. Геометриското место точки

$$\Sigma = \{(x, y, z) \mid x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v), (u, v) \in D_{uv}\}$$

се вика површина дефинирана со функциите φ, ψ, χ. Притоа постои обратноеднозначно пресликување меѓу D_{uv} и Σ. Ако функциите φ, ψ, χ имаат непрекинати први парцијални изводи на областа D_{uv} и ако важи

$$\left[\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right]^2 + \left[\frac{D(x,z)}{D(u,v)}\right]^2 > 0$$

на областа D_{uv}, каде што во средните загради се соодветните јакобијани, тогаш Σ се вика глатка површина.

Параметарските равенки на површината Σ можат да се запишат и со векторска равенка

$$\vec{r}\,(u, v) = \varphi(u, v)\,\vec{i} + \psi(u, v)\,\vec{j} + \chi(u, v)\,\vec{k}\,,$$

а соодветните изводи и нормалниот вектор со

$$\vec{r}_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\,\vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\,\vec{j} + \frac{\partial \chi}{\partial u}\,\vec{k}\,,\quad \vec{r}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\,\vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\,\vec{j} + \frac{\partial \chi}{\partial v}\,\vec{k}\,,$$

$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \frac{D(y,z)}{D(u,v)}\,\vec{i} - \frac{D(x,z)}{D(u,v)}\,\vec{j} + \frac{D(x,y)}{D(u,v)}\,\vec{k}\,.$$

Според тоа, условот за глатка површина всушност е условот

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^2 > 0, \forall (u, v) \in D_{uv}.$$

За поскратено означување обично се користат и следните параметарски равенки за површина:

$$x = x(u, v),\quad y = y(u, v),\quad z = z(u, v),\qquad (u, v) \in D_{uv} \subset \mathrm{R}^2,$$

или со векторската равенка

$$\vec{r}\,(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}\,.$$

Доста често се употребуваат скратени ознаки за соодветни изрази. Имено, ако

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \quad F = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$G = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v},$$

тогаш $|\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v|^2 = EF - G^2$.

Векторот $\vec{n}$ е нормален вектор на површината Σ и можеме да дефинираме соодветен единичен нормален вектор со

$$\vec{n}_0 = \pm\frac{\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v}{\left|\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v\right|}.$$

Да се потсетиме дека глатка површина Σ се дефинира и со равенката $F(x, y, z) = 0$, каде што F е реална функција од три реални променливи, која има непрекинати први парцијални изводи на област $D \subset \mathrm{R}^3$, во просторен Декартов правоаголен координатен систем како множество точки $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$, при што важи

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 > 0, \forall (x, y, z) \in \Sigma.$$

***Дефиниција* 8.2.** Нека Σ е глатка површина во просторен Декартов правоаголен координатен систем, зададена со равенката

$$\vec{r}\,(u,v) = \varphi(u,v)\,\vec{i} + \psi(u,v)\,\vec{j} + \chi(u,v)\,\vec{k}\,, \quad (u,v)\in D_{uv}\,.$$

Ако во секоја точка од површината Σ со единичниот нормален вектор $\vec{n}_0 = \pm\dfrac{\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v}{\left|\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v\right|}$ може да се дефинира непрекината функција, тогаш велиме дека Σ е ориентирана површина со две страни.

Страната за која важи знакот "+" се вика позитивна, а другата страна е негативна – ознаки Σ^+ односно Σ^-.

***Пример* 8.1.** Како карактеристичен пример за затворена ориентирана глатка површина ќе ја разгледаме сферата Σ зададена со равенката $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ $(R > 0)$. Навистина,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2) = 4R^2 > 0.$$

Ако пак сферата е зададена со параметарска векторска равенка

$$\vec{r}\,(\varphi,\theta) = R\cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} + R\sin\varphi\cos\theta\,\vec{j} + R\sin\theta\,\vec{k}\,,$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi\,,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\,,$$

тогаш $|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta|^2 = R^4\cos^2\theta > 0$.

Кај сферата, како и кај секоја затворена глатка ориентирана површина, како позитивна страна се дефинира надворешната страна, т.е. страната дефинирана со единични нормални вектори ориентирани во насока надвор од сферата.

***Пример* 8.2.** Површината (торус) дефинирана со равенката

$$F(x, y, z) \equiv \left(\sqrt{x^2 + z^2} - b\right)^2 + y^2 - a^2 = 0$$

е глатка површина, бидејќи

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 = 4\left(\sqrt{x^2+z^2}-b\right)^2 + 4y^2 > 0.$$

Ако торусот е зададен со параметарска векторска равенка $\vec{r}\,(\varphi, \theta) = (b + a\cos\theta)\cos\varphi\,\vec{i} + a\sin\theta\,\vec{j} + (b + a\cos\theta)\sin\varphi\,\vec{k}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le 2\pi$, тогаш $|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta|^2 = a^2(b + a\cos\theta) > 0$.

Нека Σ е глатка површина дефинирана во Декартов просторен правоаголен координатен систем со графикот G_f на функцијата $z = f(x, y)$, дефинирана во областа $D_{xy} \subset \mathrm{R}^2$. Тогаш Σ е сигурно ориентирана површина со две страни. Според дефиницијата позитивната страна е определена со единични нормални вектори кои зафаќаат остар агол со оската z.

Како пример да ја разгледаме координатната рамнина $X0Y$. Горната страна, т.е. страната која се гледа од позитивната насока на оската z, е позитивна страна, бидејќи секој нормален единичен вектор на координатната рамнина $X0Y$ е колинеарен со векторот $\vec{k}$ (зафаќа агол 0).

Општо земено, тоа важи и за секоја глатка површина Σ во Декартов просторен правоаголен координатен систем, дефинирана со графикот G_f на функцијата $z = f(x, y)$, бидејќи нормалниот вектор е даден со $\vec{n} = -\dfrac{\partial f}{\partial x}\,\vec{i} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\,\vec{j} + \vec{k}$, што природно значи дека аголот γ на $\vec{n}$ со оската z е остар. Навистина,

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} > 0.$$

Доколку Σ е глатка површина дефинирана во Декартов просторен правоаголен координатен систем со графиците на функциите $x = g(y, z)$ односно $y = h(z, x)$, тогаш соодветна позитивна страна е онаа која е определена со единични нормални вектори на површината Σ кои зафаќаат остар агол со оската x односно со оската y.

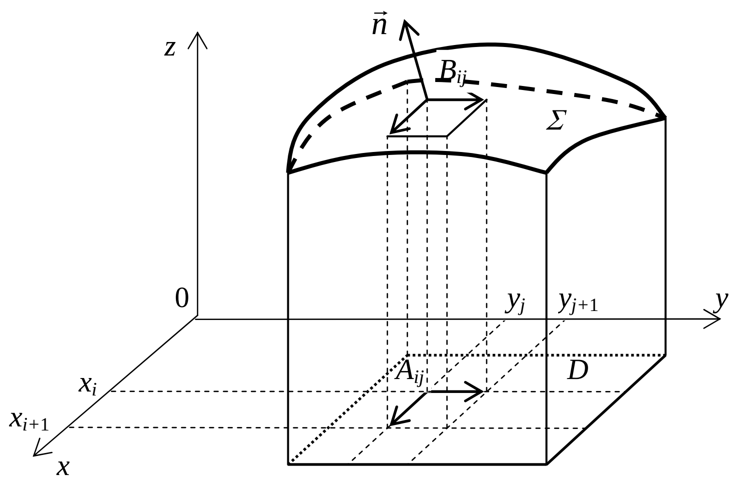
Во овие случаи да забележиме дека така дефинираната ориентација се однесува само на глатки површини во Декартов просторен правоаголен координатен систем (десен триедар), зададени со графици на функции.

Во оваа глава ќе се разгледуваат само ориентирани површини. Постојат и други површини кои не се ориентирани, например Мобиусовиот лист.

Нека е дадена гладка површина Σ која во Декартов просторен координатен систем е геометриска интерпретација на график на функција дадена со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана во правоаголникот $D_{xy} = [a, b]\times[c, e]$ и непрекината заедно со своите први парцијални изводи во D_{xy} (цртеж 26). Нека π_{nm} е една поделба на D_{xy} со делбени точки A_{ij} (x_i, y_j), $i = 0,n$, $j = 0,m$, при што $a = x_0 < x_1 <...< x_n = b$, $c = y_0 < y_1 <...< y_m = e$ и дијаметар на поделбата:

$$d_{nm} = \max_{\substack{0\le i\le n \\ 0\le j\le m}} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2}\ .$$

Правоаголниците $D_{ij} = [x_i, x_{i+1}]\times[y_j, y_{j+1}]$, со темиња во точките A_{ij}, $A_{i+1,j}$, $A_{i+1,j+1}$, $A_{i,j+1}$, имаат плоштина $\Delta P_{ij} = \Delta x_i\,\Delta y_j$, каде што $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, $i = 0,n-1$, $j = 0,m-1$.



Цртеж 26

Нека B_{ij} $(x_i, y_j, f(x_i, y_j))$ се точки од површината Σ чии проекции на рамнината $X0Y$ се точките A_{ij}. Формираме правоаголници Π_{ij} со едно теме во точките B_{ij} и страни паралелни со векторите

$\vec{t}_{y_j} = \left(0{,}1, \dfrac{\partial f(A_{ij})}{\partial y}\right)$, $\vec{t}_{x_i} = \left(1{,}0, \dfrac{\partial f(A_{ij})}{\partial x}\right)$, односно правоаголници дефинирани со векторите $\Delta x_i \vec{t}_{x_i}$ и $\Delta y_j \vec{t}_{y_j}$ со почетна точка B_{ij} (тие се делови од тангентните рамнини на површината Σ во точките B_{ij}).

Плоштините на овие правоаголници се дадени со:

$$\Delta S_{ij} = |\Delta x_i\, \vec{t}_{x_i} \times \Delta y_j \vec{t}_{y_j}| = |\vec{t}_{x_i} \times \vec{t}_{y_j}|\Delta x_i \Delta y_j = |\vec{n}_{ij}(B_{ij})|\,\Delta P_{ij} =$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f(A_{ij})}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(A_{ij})}{\partial y}\right)^2}\;\Delta P_{ij}\,.$$

Сумата од видот

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\Delta S_{ij} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f(A_{ij})}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(A_{ij})}{\partial y}\right)^2}\;\Delta x_i \Delta y_j$$

всушност е интегрална сума $\sigma(\pi_{nm})$ на функцијата

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

во однос на поделбата π_{nm} на правоаголникот D_{xy}, при специјален избор на точка од правоаголниците D_{ij} (едното теме A_{ij}).

Бидејќи функцијата $\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$ според условот е непрекината на D_{xy}, при граничен процес $d_{nm} \to 0$ ќе постои двоен интеграл

$$\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\,.$$

Геометриски гледано, интегралната сума е сума од плоштини на делови од тангентни рамнини (плочки) со кои е поплочена површината. Според тоа, при граничен процес таа сума ќе има граница која природно може да дефинира плоштина на делот од површината Σ над правоаголникот D_{xy} .

***Дефиниција* 8.3.** Нека е дадена површина Σ во Декартов правоаголен координатен систем, како график на функција f дадена со равенката $z = f(x, y)$, дефинирана на правоаголникот $D_{xy} = [a, b]\times[c, e]$, при што функцијата и нејзините први парцијални изводи се непрекинати функции на D_{xy} . Со бројот

$$S = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

се дефинира плоштина на дел од ориентираната глатка површина Σ над правоаголникот D_{xy} .

Доколку областа D_{xy} е правилна област и не е правоаголник, тогаш во дефиницијата се зема правоаголник во кој се содржи таа област и со додефинирање на нова функција, која ќе има вредност нула во точките од правоаголникот кои не припаѓаат во областа, со истата формула се дефинира плоштина на дел од површината над правилната област D_{xy} .

Ако површината Σ е дадена со параметарски равенки $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ во Декартов правоаголен координатен систем, каде што $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ се реални функции од две реални променливи u и v, непрекинати заедно со своите први парцијални изводи во правилната област $D_{uv}\subset \mathrm{R}^2$, тогаш дефинирањето на плоштина на дел од површината Σ над областа D_{uv} е аналогно на веќе кажаното.

Притоа, кога D_{uv} е правоаголник, при соодветна поделба π_{nm} ќе имаме правоаголници $D_{i\,j}$ со темиња во точките

$$A_{i\,j}(u_i,v_j),\;\; A_{i+1,\,j}\,(u_{i+1}, v_j),\;\; A_{i+1,\,j+1}\,(u_{i+1}, v_{j+1}),\;\; A_{i,\,j+1}\,(u_i, v_{j+1}),$$

со плоштини $\Delta P_{ij} = \Delta u_i\,\Delta v_j$, каде што $\Delta u_i = u_{i+1} - u_i$, $\Delta v_j = v_{j+1} - v_j$, $i = 0,n–1$, $j = 0,m–1$, точките$B_{i\,j}\,(x(u_i ,v_j),\, y(u_i, v_j),\, z(u_i, v_j))$ се точки од површината Σ, и паралелограми $\Pi_{i\,j}$ со едно теме во точките $B_{i\,j}$ и страни паралелни со векторите:

$$\vec{t}_{u_i} = \left(\frac{\partial x(u_i,v_j)}{\partial u},\frac{\partial y(u_i,v_j)}{\partial u},\frac{\partial z(u_i,v_j)}{\partial u}\right),$$

$$\vec{t}_{v_j} = \left(\frac{\partial x(u_i,v_j)}{\partial v},\frac{\partial y(u_i,v_j)}{\partial v},\frac{\partial z(u_i,v_j)}{\partial v}\right)$$

со плоштини дадени со

$$\Delta S_{ij} = |\Delta u_i \vec{t}_{u_i} \times \Delta v_j \vec{t}_{v_j}| = |\vec{t}_{u_i} \times \vec{t}_{v_j}| \Delta u_i \Delta v_j = |\vec{n}_{ij}(B_{ij})| \Delta P_{ij} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)(A_{ij})}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)(A_{ij})}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)(A_{ij})}{\partial(u,v)}\right)^2}\ \Delta P_{ij}.$$

Тогаш при граничен процес

$$d_{nm} = \max_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le m}} \sqrt{\Delta u_i^2 + \Delta v_j^2} \to 0$$

плоштината на дел од површината Σ над областа D_{uv} ќе биде дефинирана со бројот

$$S = \iint_{D_{uv}} \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\ dudv.$$

Ако површината Σ е дадена со векторската равенка

$$\vec{r}\,(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + f(x,y)\vec{k},$$

тогаш

$$S = \iint_{D_{xy}} \left|\dot{\vec{r}}_x \times \dot{\vec{r}}_y\right| dxdy,$$

а ако е дадена со векторската равенка

$$\vec{r}\,(u,v) = \varphi(u,v)\vec{i} + \psi(u,v)\vec{j} + \chi(u,v)\vec{k},$$

тогаш

$$S = \iint_{D_{uv}} \left|\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v\right| dudv.$$

***Пример* 8.3.** Да се најде плоштина на сфера со радиус R.

Решение: Според пример 8.1 и соодветната формула се добива

$$S = \iint_{D_{uv}} \left|\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v\right| dudv = \iint_{D_{\varphi\theta}} \left|\dot{\vec{r}}_\varphi \times \dot{\vec{r}}_\theta\right| d\varphi d\theta = R^2 \iint_{D_{\varphi\theta}} |\cos\theta|\, d\varphi d\theta = 4R^2\pi.$$

***Пример* 8.4.** Да се најде плоштина на торус.

Решение: Според пример 8.2 и соодветната формула се добива

$$S = \iint_{D_{uv}} \left|\dot{\vec{r}}_u \times \dot{\vec{r}}_v\right| dudv = \iint_{D_{\varphi\theta}} \left|\dot{\vec{r}}_\varphi \times \dot{\vec{r}}_\theta\right| d\varphi d\theta = \iint_{D_{\varphi\theta}} a(b + a\cos\theta) d\varphi d\theta = 4ab\pi^2.$$

Ако γ_{ij} е агол што го зафаќа нормалниот вектор $\vec{n}\,(B_{ij})$ со позитивната насока на оската z, тогаш

$$\cos\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f(A_{ij})}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(A_{ij})}{\partial y}\right)^2}}\,,$$

од каде со замена во врската

$$\Delta S_{ij} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial f(A_{ij})}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f(A_{ij})}{\partial y}\right)^2}\;\Delta P_{ij}$$

се добива $\Delta P_{ij} = \cos\gamma_{ij}\,\Delta S_{ij}$. Ставајќи $\Delta x_i = dx$, $\Delta y_j = dy$, $\Delta S_{ij} = dS$, се добива врската $dxdy = \cos\gamma\, dS$, односно

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\;dxdy\,.$$

Ако пак површината е дадена со параметарски равенки, тогаш се добива врската $dudv = \cos\gamma\, dS$, односно

$$dS = \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2+\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\;\;dudv\,.$$

8.1. Површински интеграл во однос на површина

Нека се дадени ориентирана глатка површина Σ, која е график на функција f дадена со равенката $z = f(x, y)$ во Декартов правоаголен просторен координатен систем, и правоаголник $D_{xy}\subset\mathrm{R}^2$ кој е проекција на површината Σ врз рамнината $X0Y$, при што функцијата f е дефинирана и има непрекинати први парцијални изводи на D_{xy}.

Нека π_{nm} е една поделба на D_{xy} со дијаметар

$$d_{nm} = \max_{\substack{0\le i\le n\\ 0\le j\le m}} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2}$$

и нека ΔS_{ij} се плоштини на правоаголници Π_{ij} дефинирани со векторите $\Delta x_i \vec{t}_{x_i}$ и $\Delta y_j \vec{t}_{y_j}$ со почетна точка $B_{ij}\in\Sigma$.

Нека е дадена реална функција $P(x, y, z)$ од три реални променливи, дефинирана на множество $G\subset\mathrm{R}^3$ така што $\Sigma\subset G$, и нека

$(\xi_i,\ \eta_j, f(\xi_i,\ \eta_j))$ е произволна точка од правоаголникот Π_{ij}, при што $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, $y_j \le \eta_j \le y_{j+1}$, $i = \overline{0,n-1}$, $j = \overline{0,m-1}$.

Формираме интегрална сума од видот

$$\sigma(\pi_{nm}) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} P(\xi_i, \eta_j, f(\xi_i, \eta_j))\Delta S_{ij}$$

за функцијата P во однос на површината Σ за поделбата π_{nm} и изборот на точките $(\xi_i,\ \eta_j, f(\xi_i,\ \eta_j))$.

***Дефиниција* 8.4.** Ако постои граница I од интегралните суми

$$\sigma(\pi_{nm}) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} P(\xi_i, \eta_j, f(\xi_i, \eta_j))\Delta S_{ij}$$

кога $d_{nm} \to 0$, која не зависи од изборот на точките $(\xi_i,\ \eta_j, f(\xi_i,\ \eta_j))$, тогаш велиме дека постои површински интеграл од функцијата P во однос на позитивната страна на површината Σ^+ (површински интеграл од прв тип) еднаков на таа граница со ознака $\iint\limits_{\Sigma^+} P(x,y,z)dS$.

***Теорема* 8.1.** (Формула за пресметување површински интеграл од прв тип.) Ако функцијата $P(x, y, z)$ е непрекината во сите точки од површината Σ која е график на функцијата $z = f(x, y)$ и чија проекција на рамнината $X0Y$ е правоаголникот D_{xy}, тогаш важи формулата

$$\iint\limits_{\Sigma^+} P(x,y,z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} P(x,y,f(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy\,.$$

Ова тврдење лесно се покажува, бидејќи интегралните суми $\sigma(\pi_{nm})$ се интегрални суми и за сложената функција

$$P(x, y, f(x, y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\ ,$$

која е непрекината на D_{xy}.

Доколку областа D_{xy} е правилна област и не е правоаголник, тогаш во дефиницијата се зема правоаголник во кој се содржи таа област и со додефинирање на нова функција, која ќе има вредност нула во точките од правоаголникот кои не припаѓаат во областа, се добива истата формула.

Ако површината Σ е дадена со параметарски равенки $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, каде што $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ се реални функции од две реални променливи u и v, непрекинати заедно со своите први изводи во правоаголникот $D_{uv} \subset \mathrm{R}^2$, при што важи

$$(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2) \Rightarrow$$
$$(x(u_1, v_1), y(u_1, v_1), z(u_1, v_1)) \neq (x(u_2, v_2), y(u_2, v_2), z(u_2, v_2)),$$

тогаш при граничен процес $d_{nm} = \max\limits_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le m}} \sqrt{\Delta u_i^2 + \Delta v_j^2} \to 0$ кај соодветни поделби на D_{uv} за функцијата $P(x, y, z)$ аналогно се дефинира површински интеграл $\iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)dS$.

Ако пак функцијата $P(x, y, z)$ е непрекината во точките од површината Σ, тогаш формулата за пресметување е дадена со

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x, y, z)dS =$$
$$\iint\limits_{D_{uv}} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\ dudv\,.$$

Доколку областа D_{uv} е правилна област и не е правоаголник, тогаш во дефиницијата се зема правоаголник во кој се содржи таа област и со додефинирање на нова функција, која ќе има вредност нула во точките од правоаголникот кои не припаѓаат во областа, се добива истата формула.

Овие површински интеграли се дефинирани во однос на позитивната страна на површината Σ со ознака Σ^+. Доколку се бара површински интеграл во однос на негативната страна на површината со ознака Σ^-, тогаш според дефиницијата се зема $\iint\limits_{\Sigma^-} = -\iint\limits_{\Sigma^+}$.

Ако Σ ограничува правилна просторна затворена област, тогаш за нејзина позитивна страна се зема надворешната страна.

Ако површината Σ е дадена со равенки преку соодветни функции кои не ги задоволуваат условите дадени со дефиницијата, тогаш за користење на формулите за пресметување на површинскиот интеграл преку двоен интеграл површината се дели на конечен број делови кои ги задоволуваат условите и потоа се користи особината за адитивност.

***Пример* 8.5.** $\iint\limits_{\Sigma} z dS = ?$ Σ: $x + y + z = 1$, $x, y, z \geq 0$.

Бидејќи $D_{xy} = \{(x\ y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}$ и $z = 1 - x - y$, според соодветната формула се добива

$$I = \iint\limits_{D_{xy}} (1 - x - y)\sqrt{1+1+1}\, dxdy = \sqrt{2}\,\frac{1}{6}.$$

8.2. Површински интеграл во однос на координатни рамнини

***Дефиниција* 8.5.** Нека е дадена површина Σ во Декартов правоаголен координатен систем како график на функција f дадена со равенката $z = f(x, y)$ со дефинициона област правоаголник D_{xy} и нека е дадена реална функција $R(x, y, z)$ од три реални променливи, дефинирана во областа $G \subset \mathrm{R}^3$ која ја содржи Σ. Нека π_{nm} е поделба на D_{xy} со дијаметар $d_{nm} = \max\limits_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq m}} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2}$.

Ако при граничен процес $d_{nm} \to 0$ кај соодветни поделби π_{nm} на D_{xy} постои граница на интегрални суми од видот

$$\sigma(\pi_{nm}) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} R(\xi_i, \eta_j, f(\xi_i, \eta_j))\Delta x_i \Delta y_j,$$

дефинирани со соодветни поделби на D_{xy} независно од изборот на точките $(\xi_i, \eta_j, f(\xi_i, \eta_j)) \in \Sigma$, тогаш велиме дека постои површински интеграл од функцијата $R(x, y, z)$ за површината Σ во однос на координатната рамнина $X0Y$ (површински интеграл од втор тип) еднаков на таа граница со ознака $\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy$. Притоа тој е дефиниран во однос на позитивната страна на површината Σ и оската z.

Ако функцијата $R(x, y, z)$ е непрекината функција во сите точки од површината Σ, тогаш лесно се докажува соодветната формула за пресметување на површинскиот интеграл:

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} R(x, y, f(x, y))dxdy,$$

каде што правоаголникот D_{xy} е проекција на површината Σ врз координатната рамнина $X0Y$.

Доколку областа D_{xy} е правилна област и не е правоаголник, тогаш во дефиницијата се зема правоаголник во кој се содржи таа област и со додефинирање на нова функција, која ќе има вредност нула во точките од правоаголникот кои не припаѓаат во областа, се добива истата формула.

Во случаите кога површината Σ е дадена со равенките $y = g(x, z)$, односно $x = h(y, z)$, каде што функциите g односно h се дефинирани во правилните области D_{xz} односно D_{yz} (области од рамнините $X0Z$ односно $Y0Z$ кои се проекции на површината Σ врз нив), тогаш со помош на реалните функции $Q(x, y, z)$, $P(x, y, z)$, дефинирани во област која ја содржи површината Σ, на аналоген начин се дефинираат и површинските интеграли во однос на координатната рамнина $X0Z$, односно координатната рамнина $Y0Z$, со ознаки $\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz$ односно $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz$. Притоа позитивна страна на површината Σ се определува во однос на оската y односно x.

Ако пак соодветните функции $Q(x, y, z)$, $P(x, y, z)$ се непрекинати во сите точки од површината Σ, тогаш лесно се покажува дека соодветните формули за пресметување на соодветните површински интеграли со двојни интеграли ќе бидат дадени со

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,g(x,z),z))dxdz\,,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \iint\limits_{D_{yz}} P(h(y,z),y,z))dydz\,.$$

Сумата

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + \iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz + \iint\limits_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy\,,$$

под услов да постојат сите три површински интеграли над иста површина Σ, се означува со

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy\,.$$

Овие површински интеграли се дефинирани во однос на позитивната страна на површината Σ со ознака Σ^+, земена за трите интеграли посебно. Доколку се бара површински интеграл во однос на негативната страна на површината со ознака Σ^-, тогаш според дефиницијата се зема $\iint\limits_{\Sigma^-} = -\iint\limits_{\Sigma^+}$. Ако површината е затворена, тогаш како позитивна страна се дефинира надворешната страна.

Ако површината Σ е дадена со равенки преку соодветни функции кои не ги задоволуваат условите дадени со дефиницијата, тогаш за користење на формулите за пресметување на површински интеграл преку двоен интеграл површината се дели на конечен број делови кои ги задоволуваат условите и потоа се користи особината за адитивност.

***Пример* 8.6.** Да се реши $\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy$, Σ: $x^2+y^2+z^2=1$, во однос на:

а) надворешната страна на сферата;

б) надворешната страна на четвртина од сферата, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Решение: а) За да се употреби формулата за пресметување, површината Σ се претставува како унија од две површини:

$$\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0, \qquad \Sigma_2: x^2+y^2+z^2=1,\ z\leq 0.$$

Бидејќи $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$,

$$\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy = \iint\limits_{\Sigma_1^+} xyzdxdy + \iint\limits_{\Sigma_2^-} xyzdxdy = \iint\limits_{\Sigma_1^+} xyzdxdy - \iint\limits_{\Sigma_2^+} xyzdxdy =$$

$$\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy - \iint\limits_{D_{xy}} xy(-\sqrt{1-x^2-y^2})\,dxdy =$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = 0.$$

б) Ако површината е четвртина од сферата со ограничување $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$, тогаш

$$D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$$

и

$$I=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\cos\varphi\sin\varphi\sqrt{1-\rho^2}\,\rho d\rho = \frac{2}{15}.$$

Значи, $\iint\limits_{\Sigma} xyzdxdy = \frac{2}{15}$.

Постои тесна врска меѓу површинските интеграли од прв и втор тип дадена со релациите:

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)\cos\alpha dS \ ,$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz = \iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\cos\beta dS \ ,$$

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{\Sigma} R(x,y,z)\cos\gamma dS \ ,$$

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy \ =$$

$$\iint_{\Sigma} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]dS \ ,$$

каде што α, β и γ се агли кои ги зафаќаат нормалите на површината Σ со позитивните насоки на оските x, y и z соодветно.

За површинските интеграли во однос на затворена површина Σ се користи и ознаката $\oiint_{\Sigma}$.

Аналогно на теоремата на Грин за врската меѓу криволиниските интеграли и двојните интеграли, кај површинските интеграли постои врска меѓу површинските интеграли и тројните интеграли, дадена преку теоремата на Гаус-Остроградски.

***Теорема* 8.2.** (Гаус-Остроградски) Нека $G\subset \mathrm{R}^3$ е просторна затворена област ограничена со затворена површина Σ. Нека Σ^+ е позитивна страна на Σ. Ако се дадени реални функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, непрекинати со своите први парцијални изводи во областа G (секако и во точките од Σ), тогаш е точно равенството:

$$\iiint_{G} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz \ =$$

$$\iint_{\Sigma^+} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy \ ,$$

каде што површинскиот интеграл е во однос на надворешната страна на затворената површина Σ.

Доказ: Нека G е правилна област елементарна во однос на трите координатни рамнини (прави паралелни со координатните оски ја сечат Σ најмногу во две точки).

Нека D_{xy} е проекција на Σ врз рамнината $X0Y$ и нека Σ_1 и Σ_2 се два дела на Σ, при што $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, кои се графици на функции f_1 и f_2 чии равенки се $z = f_1(x, y)$, $z = f_2(x, y)$, така што

$$\forall (x, y) \in D_{xy}, \qquad f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$$

(цртеж 27). Тогаш

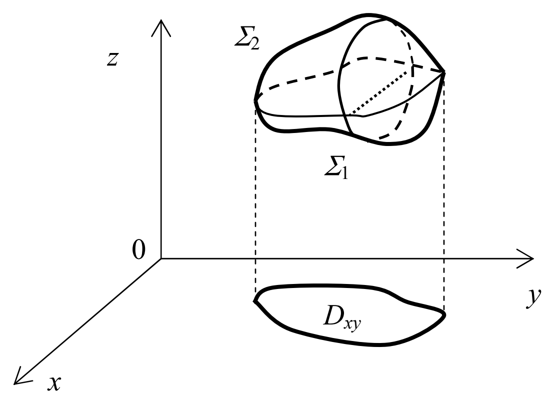
$$\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dxdy =$$

$$\iint_{D_{xy}} \left[R(x, y, f_2(x, y)) - R(x, y, f_1(x, y)) \right] dxdy = \iint_{\Sigma_2} R(x, y, z) dxdy -$$

$$\iint_{\Sigma_1^-} R(x, y, z) dxdy = \iint_{\Sigma_2} R(x, y, z) dxdy - [- \iint_{\Sigma_1} R(x, y, z) dxdy] =$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy .$$

Знакот минус се јавува затоа што површинскиот интеграл се пресметува во однос на надворешната страна од затворената површина Σ и во тој случај нормалите на површината Σ_1 зафаќаат тап агол со позитивната насока на оската z.



Цртеж 27

На ист начин се покажува дека

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x}dxdydz = \iint_\Sigma P(x,y,z)dydz\,,\ \iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y}dxdydz = \iint_\Sigma Q(x,y,z)dxdz\,,$$

од каде со собирање се добива бараното равенство.

Со користење на врските меѓу двата типа површински интеграли, формулата може да се запише и во следниот вид:

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz =$$

$$\iint_\Sigma \big(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma\big)dS\,.$$

***Пример* 8.7.** $\iint_\Sigma xydydz + y^2dxdz + yzdxdy = ?$ Σ: $x^2+y^2+z^2=a^2$, надворешна страна на сферата.

Според теоремата на Гаус-Остроградски се добива:

$$I = \iiint_G 3ydxdydz = 3\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\int_0^a \rho^3 d\rho = \frac{3}{2}a^4\pi.$$

Притоа G е топката $x^2+y^2+z^2\le a^2$, а тројниот интеграл е решен со замена во сферни координати.

***Последица* 8.1.** Ако во формулата на Гаус-Остроградски се земат специјални случаи

$$P(x,y,z)=x,\quad Q(x,y,z)=R(x,y,z)=0;$$

$$P(x,y,z)=Q(x,y,z)=0,\quad R(x,y,z)=z;$$

$$P(x,y,z)=0,\quad Q(x,y,z)=y,\quad R(x,y,z)=0,$$

ќе се добие

$$\iiint_G dxdydz = \iint_\Sigma xdydz = \iint_\Sigma ydxdz = \iint_\Sigma zdxdy\,,$$

од каде се добива формулата за пресметување на волумен V на телото ограничено со областа G:

$$V = \frac{1}{3}\iint_{\Sigma} xdydz + ydxdz + zdxdy\,,$$

со помош на површински интеграл.

***Пример* 8.8.** Да се пресмета

$$\iint_{\Sigma}\left(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma\right)dS \;=\; \iint_{\Sigma} zdxdy + xdydz + ydxdz\,,$$

каде што Σ е надворешната страна на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Решение: Според формулата од последица 8.1 се добива $I = 3V$, каде што $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ е волуменот на топка со радиус R, со што $I = 4\pi R^3$.

Инаку волуменот на топка може да се добие со двоен интеграл:

$$V = 2\iint_{D_{xy}} zdxdy \;= 2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R \rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho \;=\; \frac{4}{3}\pi R^3\,,$$

каде што $D_{xy} = \{(x, y)\,|x^2 + y^2 \le R^2\}$, $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

Површинскиот интеграл може да се пресмета и непосредно со формулата за пресметување преку двоен интеграл. Имено,

$$I_1 = \iint_{\Sigma} zdxdy \;=\; \iint_{\Sigma_1^+} z_1dxdy \;+\; \iint_{\Sigma_2^-} z_2dxdy \;=\; \iint_{\Sigma_1^+} z_1dxdy \;-\; \iint_{\Sigma_2^+} z_2dxdy \;=$$

$$\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy \;-\; \iint_{D_{xy}}(-\sqrt{R^2-x^2-y^2})dxdy \;=$$

$$2\iint_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy \;= 2\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^R \rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho \;=\; \frac{4}{3}\pi R^3\,,$$

каде што

$$D_{xy} = \{(x, y)\,|\, x^2 + y^2 \le R^2\},\quad z_1 = \sqrt{R^2-x^2-y^2}\;,\quad z_2 = -\sqrt{R^2-x^2-y^2}\;,$$

Σ_1, Σ_2 се горната и долната полусфера. Бидејќи

$$I_1 = I_2 = \iint_{\Sigma} xdydz \;= I_3 = \iint_{\Sigma} ydxdz \;=\; \frac{4}{3}\pi R^3\,,$$

се добива $I = I_1 + I_2 + I_3 = 4\pi R^3$.

***Пример* 8.9.** Да се најде $\iint_{\Sigma} yzdxdy + xzdydz + xydxdz$, Σ: $x^2 + y^2 = R^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = H$.

Според теоремата на Гаус-Остроградски се добива:

$$I = \iiint_G (z + x + y)dxdydz = \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^H (x + y + z)dz =$$

$$H\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + \frac{H}{2})\rho d\rho = HR^2(\frac{2R}{3} + \frac{H\pi}{8}).$$

Притоа G е просторна област ограничена со Σ, а тројниот интеграл е решен со замена во цилиндрични координати.

Постои тесна врска меѓу површинските интеграли и криволиниските интеграли вдолж затворена просторна крива, како обопштување на формулата на Грин. Таа врска е искажана со Стоксовата формула дадена со следната теорема:

***Теорема* 8.3.** (Стокс) Нека е дадена едноставна затворена област $G \subset \mathrm{R}^3$, елементарна во однос на трите координатни рамнини, нека е дадена едноставна правилна површина Σ (прави паралелни со координатните оски ја сечат Σ најмногу во две точки), ограничена со затворена просторна проста глатка Жорданова крива Γ, дадена со параметарските равенки $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, при што $\Sigma \subset G$. Нека Σ^+ е позитивната страна на површината Σ и нека α, β, γ се аглите кои нормалите на површината Σ ги зафаќаат со позитивните насоки на оските x, y, z.

Нека $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ се дадени реални функции од три реални променливи кои се дефинирани на G и имаат непрекинати први парцијални изводи во G. Тогаш е точна формулата:

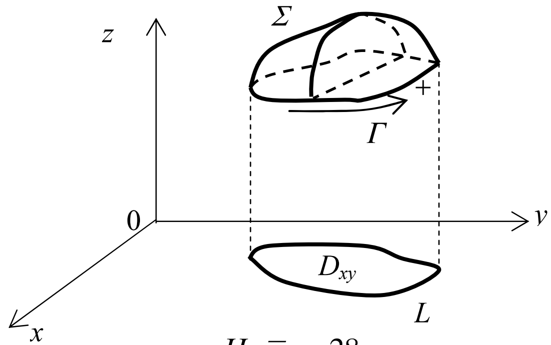
$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \iint_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\cos\gamma \right] dS,$$

односно формулата:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$
$$\iint\limits_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\right].$$

Доказ: Нека површината Σ е график на функцијата f дадена со равенката $z = f(x, y)$, каде што f е функција дефинирана на множество $D_{xy} \subset \mathrm{R}^2$. Нека затворената крива L е проекција на затворената просторна крива Γ врз рамнината $X0Y$ (цртеж 28.).



Цртеж 28

Дефинираме нова функција P^* од две реални променливи со равенката $P^*(x, y) = P(x, y, f(x, y))$, на множеството D_{xy}, кое е всушност проекција на површината Σ врз рамнината $X0Y$. Тогаш $\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx =$ $\int\limits_{L} P^*(x,y)dx$, бидејќи кривата Γ е дадена со равенките $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = f(x(t), y(t))$, $t\in[\alpha, \beta]$, $(\Gamma\subset\Sigma)$, а кривата L, како рамнинска, е дадена со равенките $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$.

Според формулата за пресметување на криволиниски интеграл во однос на рамнинска и просторна крива ќе важи:

$$\int\limits_{\Gamma} P(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))\, \dot{x}(t)dt,$$

$$\int\limits_{L} P^*(x,y)dx = \int\limits_{L} P(x,y,f(x,y))dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), f(x(t), y(t)))\, \dot{x}(t)dt,$$

од каде, поради еднаквоста на десните страни, следува бараното равенство.

Според Гриновата формула ќе важи:

$$\int_L P^*(x,y)dx = -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial P^*}{\partial y} dxdy\,,$$

а според правилото за извод од сложена функција се добива

$$\frac{\partial P^*}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\,,$$

од каде пак се добива

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx = -\iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy\,.$$

Од друга страна, векторите $(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1)$ и $(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ се паралелни и од условот за паралелност следува $\frac{\partial z}{\partial y} : (-1) = \cos\beta : \cos\gamma$, од каде се добива $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$.

Порано беше дадена врската $dxdy = \cos\gamma\, dS$ и со користење на сите релации се добива:

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx = -\iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)\frac{1}{\cos\gamma} dxdy =$$

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)dS.$$

На сосема ист начин се добива :

$$\int_\Gamma Q(x,y,z)dx = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS\ ;$$

$$\int_\Gamma R(x,y,z)dx = \iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS\,,$$

при што претпоставуваме дека се задоволени соодветните услови. Собирајќи ги сите три добиени равенства, се добива Стоксовата формула.

***Пример* 8.10.** $\int\limits_{\Gamma} x^2y^3dx + dy + zdz$, Γ: $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

Со Стоксовата формула се добива

$$I = \iint\limits_{\Sigma} (0-0)dydz + (0-0)dxdz + (0-3x^2y^2)dxdy\ ,$$

каде што Σ е горната полусфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$. Според формулата за пресметување на површински интеграл се добива:

$$I = -3\iint\limits_{D_{xy}} x^2y^2dxdy = -3\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi\int\limits_0^a \rho^5 d\rho = -\frac{a^6\pi}{8}\ ,$$

каде што D_{xy} е кругот $x^2 + y^2 \leq a^2$, и двојниот интеграл е решен со замена во поларни координати.

***Теорема* 8.4.** (Независност на површинскиот интеграл од површината.) Нека се дадени две едноставни правилни површини Σ_1 и Σ_2 (прави паралелни со координатните оски ја сечат Σ_1 односно Σ_2 најмногу во две точки), чија заедничка контура е просторна крива Γ, и нека се дадени функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, дефинирани во просторна област $D\subset \mathrm{R}^3$, која ги содржи површините, и кои имаат непрекинати први парцијални изводи во таа област. Тогаш важи:

$$\iint\limits_{\Sigma_1} R(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dxdz + P(x,y,z)dydz =$$
$$\iint\limits_{\Sigma_2} R(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dxdz + P(x,y,z)dydz$$

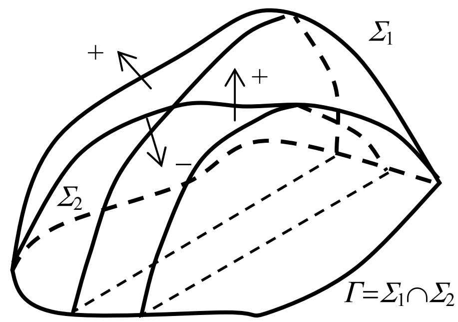
ако и само ако $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z} = 0$ во сите точки од областа D.

Доказ: Доказот се изведува со користење на формулата на Гаус-Остроградски, согласно со релациите

$$\iint\limits_{\Sigma_1} R(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dxdz + P(x,y,z)dydz -$$
$$\iint\limits_{\Sigma_2} R(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dxdz + P(x,y,z)dydz =$$
$$\iint\limits_{\Sigma_1} R(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dxdz + P(x,y,z)dydz +$$
$$\iint\limits_{\Sigma_2^-} R(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dxdz + P(x,y,z)dydz =$$

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz,$$

каде што $G \subseteq D$ е просторна затворена област ограничена со површините Σ_1 и Σ_2 (цртеж 29).



Цр̄теж 29

Значи, при дадениот услов можеме да избереме која било површина, по правило поедноставна, за да го пресметаме површинскиот интеграл кој ќе зависи само од заедничката контура која е просторна крива Γ.

Како последица од оваа теорема кај примената на формулата на Стокс во решавање задачи, односно при пресметување на просторен криволиниски интеграл, можеме да избереме која било површина со соодветна контура Γ. Ова лесно се покажува, бидејќи кај формулата на Стокс

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$\iint_\Sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \right]$$

имаме

$$P_1(x,y,z) = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad Q_1(x,y,z) = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}; \quad R_1(x,y,z) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

и важи условот

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z} \equiv \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} = 0.$$

§9. НЕКОИ ЕЛЕМЕНТИ ОД ТЕОРИЈАТА НА ВЕКТОРСКА АНАЛИЗА И ОД ТЕОРИЈАТА НА ВЕКТОРСКИ ПОЛИЊА СО ПРИМЕНА

При даден Декартов правоаголен координатен систем кај криволиниските интеграли беше дефинирана векторска функција од една реална променлива со $\vec{r}\,(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t\in[\alpha, \beta]$, а кај површинските интеграли беше дефинирана векторска функција од две реални променливи со равенката

$$\vec{r}\,(u, v) = x(u, v)\,\vec{i} + y(u, v)\,\vec{j} + z(u, v)\,\vec{k}\,, \quad (u, v)\in D_{uv}\subset \mathrm{R}^2,$$

каде што $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ беа дадени како реални функции од една реална променлива и $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ беа дадени како реални функции од две реални променливи.

Секако дека е можна обопштена дефиниција на векторски функции со помош на реални функции од повеќе реални променливи, но овде се задржуваме на векторски функции дефинирани во реален простор R^3 со соодветен Декартов правоаголен координатен систем, со помош на реални функции од најмногу три реални променливи. Изводите на векторските функции се дефинираат преку изводите на реалните функции со кои се дефинирани.

***Дефиниција* 9.1.** Нека се дадени три реални функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ од три реални променливи дефинирани на областа $G\subset\mathrm{R}^3$. Функцијата дефинирана со равенката

$$\vec{a}\,(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$$

при даден Декартов правоаголен координатен систем се вика векторска функција од три реални променливи, дефинирана на G.

***Дефиниција* 9.2.** Нека е дадена реална функција од три реални променливи со равенката $u = u(x, y, z)$, дефинирана во областа $G\subset\mathrm{R}^3$. Функцијата u заедно со областа G се вика скаларно поле. Векторот

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

се вика градиент на скаларното поле (ако постојат парцијални изводи), со ознака grad$u$.

***Дефиниција* 9.3.** Нека е дадено скаларно поле $u(x, y, z)$ и правец l дефиниран со единичниот вектор

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}.$$

Тогаш со равенката

$$\frac{du(x,y,z)}{dl} = \frac{du(x,y,z)}{d\vec{n}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

се дефинира извод на скаларното поле $u(x, y, z)$ во насока l, при што $\dfrac{du(x,y,z)}{d\vec{n}} = (\mathrm{grad}\,u)\cdot\vec{n}$, како скаларен производ на два вектора.

***Дефиниција* 9.4.** Нека е дадена векторска функција со равенката $\vec{a}\,(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$, дефинирана на $G\subset\mathrm{R}^3$. Функцијата заедно со областа G се вика векторско поле. Скаларот $\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$ се вика дивергенција на векторското поле (под услов да постојат парцијалните изводи во соодветна точка од G) и се означува $\mathrm{div}\,\vec{a}$.

***Дефиниција* 9.5.** Нека е дадено векторско поле со равенката $\vec{a}\,(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$ со област $G\subset\mathrm{R}^3$.

Векторот

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

се вика ротор на векторското поле $\vec{a}$ (под услов да постојат парцијалните изводи) и се означува $\mathrm{rot}\,\vec{a}$.

***Дефиниција* 9.6.** Нека е дадено векторско поле со равенката $\vec{a}\,(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$ со област $G\subset\mathrm{R}^3$. Ако постои реална функција $F(x, y, z)$ која има непрекинати први парцијални изводи на G, за кои важи

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y, z),\quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y, z),\quad \frac{\partial F}{\partial z} = R(x, y, z)$$

во областа G, тогаш велиме дека векторското поле е потенцијално поле. Функцијата F, која со G дефинира скаларно поле, се вика потенцијална функција, при што $\mathrm{grad}F = \vec{a}$.

Да забележиме дека условите за егзистенција на функцијата F беа дадени кај разгледувањето на диференцијалниот израз $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$. Исто така е јасно дека за потенцијално поле важи условот $\mathrm{rot}\vec{a} = \vec{0}$, кој некаде се зема и за дефиниција на потенцијално поле.

Нека е дадено векторско поле со равенката $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ со област $G \subset \mathrm{R}^3$ и нека P,Q и R имаат непрекинати први парцијални изводи на G. Тогаш следните тврдења се еквивалентни:

а) Постои на областа G еднозначна функција $F(x, y, z)$ која има непрекинати први парцијални изводи на G за кои важи равенството $\mathrm{grad}F = \vec{a}$.

б) Криволинискиот интеграл вдолж која било затворена непрекината по делови глатка проста Жорданова крива $\Gamma \subset G$ е нула, т.е.

$$\int_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{s} = 0.$$

в) Ако $A_0 \in G$ тогаш криволинискиот интеграл вдолж која било ориентирана по делови глатка проста Жорданова крива $A_0A \subset G$ зависи само од A_0 и A.

Доказот за еквивалентноста на овие тврдења се добива со користење на теоремите 5.3, 5.4 и 7.4 .

***Дефиниција* 9.7.** Нека е дадено векторско поле со равенката $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ со област $G \subset \mathrm{R}^3$. Ако $\mathrm{div}\vec{a} = 0$ на G, тогаш полето се вика соленоидално.

Во литературата се познати повеќе ознаки за пократко означување. Такви се, на пример, Хамилтоновиот оператор ∇ (набла) и Лапласовиот оператор Δ (делта), дефинирани со

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}, \qquad \Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2},$$

каде што $f(x, y, z)$, $F(x, y, z)$ се реални функции од три реални променливи. За овие оператори се употребуваат и следните ознаки:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\,; \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,,$$

со соодветна врска $\Delta = \nabla\cdot\nabla$ (условно како скаларен производ).

Со овие ознаки при дадено векторско поле $\vec{a}$, $\mathrm{div}\vec{a} = \nabla\cdot\vec{a}$ (скаларен производ) и $\mathrm{rot}\vec{a} = \nabla\times\vec{a}$ (векторски производ), а при дадено скаларно поле F, $\mathrm{grad}F = \nabla F$.

***Дефиниција* 9.8.** Нека е дадено векторско поле со равенката $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ со област $G\subset \mathrm{R}^3$. Ако полето е потенцијално и соленоидално истовремено, тогаш се вика хармониско поле. Притоа, потенцијалната функција F таква што $\mathrm{grad}F = \vec{a}$, ја задоволува релацијата

$$\nabla F \equiv \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0,$$

т.е. равенката $\mathrm{div}(\mathrm{grad}F) = 0$ на G.

Функциите кои ја задоволуваат последната релација, позната како Лапласова равенка, се викаат хармониски функции.

***Дефиниција* 9.9.** Нека е дадено векторско поле со равенката $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ со област $G\subset \mathrm{R}^3$ и просторна проста Жорданова крива $AB \equiv \Gamma\subset G$. Криволиниски интеграл од векторското поле вдолж ориентирана крива Γ се вика криволинискиот интеграл

$$\int_{\Gamma} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

со ознака

$$\int_{\Gamma} \vec{a}\cdot d\vec{s} = \int_{\Gamma} (\vec{a}\cdot\vec{\tau})ds\,,$$

каде што $\vec{\tau} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ е единичен вектор на тангентата на кривата Γ.

Ако кривата $AB \equiv \Gamma$ е глатка Жорданова крива со должина L и функциите P, Q, R се непрекинати функции на G, тогаш криволинискиот интеграл $\int_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{s}$ е еднаков на $\int_0^L (\vec{a} \cdot \vec{\tau}) ds$. Ако $AB \equiv \Gamma$, $A \equiv B$, т.е. ако кривата Γ е затворена крива, тогаш овој криволиниски интеграл се вика циркулација на векторското поле вдолж затворената крива Γ.

Ако полето е потенцијално, тогаш криволинискиот интеграл вдолж која било затворена крива е еднаков на 0.

***Дефиниција* 9.10.** Нека е дадено векторско поле со равенката $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ со област $G \subset \mathrm{R}^3$ и површина $\Sigma \subset G$.

Површински интеграл на векторското поле $\vec{a}(x, y, z)$ во однос на површината Σ се дефинира со површинскиот интеграл

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dxdy =$$

$$\iint_{\Sigma} [P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma]dS$$

и се означува

$$\iint_{\Sigma} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n})dS ,$$

каде што $\vec{n} = \cos\alpha\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\vec{k}$ е единичен нормален вектор на Σ.

Ако површината Σ е затворена (ограничува дел од просторот R^3), тогаш површинскиот интеграл се вика флукс (проток) на векторското поле $\vec{a}(x, y, z)$ низ површината Σ.

Со овие дефиниции формулата на Гаус-Остроградски ќе биде дадена со

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n})dS = \iiint_{G} \mathrm{div}\,\vec{a}\; dxdydz ,$$

додека Стоксовата формула со

$$\int_{\Gamma} \vec{a} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} (\vec{n} \cdot \mathrm{rot}\,\vec{a})\, dS .$$

Термините кои се употребуваат во теоријата на полиња можат да се објаснат со практична примена во изучувањето на појави кај флуидите. Да разгледаме една ситуација со проток на течност низ некоја површина во реален простор. Нека брзината на течењето зависи само од положбата на самата точка од течноста и не зависи од времето (стационарен проток). Тогаш протокот на брзината на течноста (флуидот) низ ориентирана површина Σ во даден Декартов правоаголен просторен координатен систем е количеството на течност кое минува во единица време низ ориентираната површина Σ во позитивна насока, односно во насока во која е ориентирана површината (во насока на нормалните вектори). Таа бројчена карактеристика е дадена со површинскиот интеграл

$$\iint_{\Sigma}(\vec{a}\,\vec{n})dS = \iint_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy =$$

$$\iint_{\Sigma}(P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]dS ,$$

каде што со

$$\vec{a}\,(x, y, z) = P(x, y, z)\,\vec{i} + Q(x, y, z)\,\vec{j} + R(x, y, z)\,\vec{k}$$

е дадена промената на брзината на протокот на течноста во секоја точка (x, y, z) од флуидот.

Од примената ќе разгледаме еден пример од теоријата на електромагнетни полиња.

Нека е даден точкест полнеж q кој се наоѓа во координатниот почеток 0(0, 0, 0) во Декартов правоаголен координатен систем. Тогаш $\vec{E}$ е силово поле генерирано со точкестиот полнеж, дефинирано според Coulomb-ов закон ($|\vec{E}| = \dfrac{q}{r^2}$) со векторската функција

$$\vec{E}\,(x, y, z) = \frac{qx}{r^3}\vec{i} + \frac{qy}{r^3}\vec{j} + \frac{qz}{r^3}\vec{k} ,$$

каде што $M(x, y, z)$ е точка од просторот R^3 на која дејствува полето, а $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ е растојание од координатниот почеток до точката M.

Навистина, бидејќи насоката на векторот

$$\vec{E}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

е иста со насоката на радиус-векторот $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, од

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \cos\beta = \frac{y}{r}, \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

се добива

$$P(x, y, z) = |\vec{E}|\cos\alpha = \frac{q}{r^2}\frac{x}{r}, \qquad Q(x, y, z) = |\vec{E}|\cos\beta = \frac{q}{r^2}\frac{y}{r},$$

$$R(x, y, z) = |\vec{E}|\cos\gamma = \frac{q}{r^2}\frac{z}{r}.$$

Понатаму, бидејќи

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{3qxy}{r^5} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z},$$

постои реална функција од три реални променливи $u(x, y, z)$ таква што

$$du(x, y, z) = P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Таа функција се вика потенцијална функција и се добива од релацијата

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$q\frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} = q\frac{\frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz}{r^2} = q\frac{dr}{r^2} = d(-\frac{q}{r}).$$

Значи, $u(x, y, z) = -\frac{q}{r}$. Притоа се користи

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \; \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \; \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}.$$

Според тоа, полето е потенцијално, при што

$$\vec{E}\,(x, y, z) = \text{grad}\, u(x, y, z).$$

Дивергенцијата на полето е

$$\text{div}\,\vec{E} \;=\; \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \;=\; q\frac{r - 3x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^4} + q\frac{r^2 - 3y^2}{r^5} +$$

$$q\frac{r^2 - 3z^2}{r^5} = \frac{q}{r^5}\,[3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)] = 0.$$

***Пример* 9.1.** Да се пресмета флуксот (протокот) на силово поле низ сферата Σ со радиус R и центар во кој се наоѓа точкест полнеж q. Потоа да се пресмета работата од точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до точката $M(x, y, z)$.

Со користење на формулата на Гаус-Остроградски флуксот е еднаков на

$$\iint\limits_{\Sigma}(\vec{E}\cdot\vec{n})dS \;=\; \iiint\limits_{G} 3\frac{q}{R^3}\,dxdydz \;=\; 3\frac{q}{R^3}\,\frac{4}{3}\pi R^3 \;=\; 4q\pi,$$

што значи дека флуксот не зависи од радиусот на сферата. Притоа G е топка дефинирана со $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$.

Може да се покаже дека ист број ќе се добие за флуксот и за која било затворена површина која е граница на просторно тело во чија внатрешност се наоѓа полнежот.

Бидејќи работата A се дефинира со криволинискиот интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz\,,$$

каде што Γ е крива која ги поврзува точките M_0 и M, поради тоа што

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = du(x, y, z),$$

ќе имаме

$$A = u(x, y, z)\Big|_{M_0}^{M} = = -\frac{q}{r} + \frac{q}{r_0}\,,\ \text{каде што}\ \ r = |\,\overrightarrow{0M}\,|,\ r_0 = |\,\overrightarrow{0M}_0\,|.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Атанасова Е., Георгиевска С. : *Предавања по математика* I, Универзитет „ Св. Кирил и Методиј “ , Скопје 1985.

2. Атанасова Е., Георгиевска С. : *Математика* II, Универзитет „Св. Кирил и Методиј “ , Скопје 1988.

3. Bermant A.F.,Aramanovich I.G. : *Mathematical Analysis*, „Mir Publishers”, Moscow, 1975.

4. Ивановски Н. : *Математичка анализа* I – *функции од една независно променлива*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј“, Скопје 1981.

5. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. : *Математичкеский анализ*, „Наука“ , Москва, 1979.

6. Krasnov M., Kiselev A., Makarenko G., Shikin E. : *Mathematical Analysis for Engineers*, Volume 1 „Mir Publishers”, Moscow, 1990.

7. Kurepa, S. : *Matematička analiza*, treči dio, „Tehnička knjiga”, Zagreb, 1981.

8. Коровкин П.П. : *Математический анализ*, часть I, Издательство „ Просвещение “ , Москва 1972 .

9. Ляашко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г. , Калайда А.Ф. : *Математический анализ*, часть 1, 2 „Вища Школа”, 1983, 1985, Киев.

10. Лазов П., Ивановски Ѓ. : *Елементи на математичката анализа со некои примени*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј “ , Скопје, 1981.

11. Maron, I.A. : *Problems in Calculus of One Variable*, „Mir Publishers”, Moscow,1988.

12. Малчески Р. : *Математичка анализа* I, Универзитет „Св. Кирил и Методиј “ , Скопје 2002.

13. Mardešić S. : *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, prvi deo, „Školska knjiga” , Zagreb, 1974.

14. Никольский С.М. : *Курс математичкого анализа*, том I , том II, „Наука“, Москва 1983.

15. Пиперевски Б. М. : *Математичка анализа* I, Универзитет „Св. Кирил и Методиј “ , Скопје 2001.

16. Речкоски Н. : *Виша математика*, Универзитет „Св. Климент Охридски“, Битола, Факултет за туризам и угостителство, Охрид 1997.

17. Фихтенгольц Г.М. : *Основы математичкого анализа*, том 1, „ Наука “, Москва 1968.

18. Чупона Ѓ., Трпеновски Б., Целакоски Н. : *Предавања по виша математика*, кн. I – III , Универзитет „Св. Кирил и Методиј “ , Скопје, 1976.

19. Шапкарев И., Кржовски П. : *Линеарна алгебра со аналитичка геометрија во простор*, Универзитет „Св. Кирил и Методиј “ , Скопје 1977.

П Р И Л О З И

Некои симболи и ознаки

дисјункција	$\vee$	или
конјункција	$\wedge$	и
импликација	$\Rightarrow$	следи(повлекува)
еквиваленција	$\Leftrightarrow$	ако и само ако(тогаш и само тогаш)
негација	$\neg$	не
	T	точно
	$\perp$	неточно
	$\in$	припаѓа
	$\notin$	не припаѓа
Универзален квантификатор	$\forall$	за секој(за било кој)
Егзистенцијален квантификатор	$\exists$	постои некој

Освен формулациите за читање на соодветни симболи и ознаки кои се дадени во третата колона постојат и други формулации кои ја изразуваат нивната суштина.

Грчка азбука - печатни букви

голема	мала	мала италик	се чита
Α	α	α	алфа
Β	β	β	бета
Γ	γ	γ	гама
Δ	δ	δ	делта
Ε	ε	ε	епсилон
Ζ	ζ	ζ	зета
Η	η	η	ета
Θ	θ	θ	тета
Ι	ι	ι	јота
Κ	κ	κ	капа
Λ	λ	λ	ламбда
Μ	μ	μ	ми

голема	мала	мала италик	се чита
Ν	ν	ν	ни
Ξ	ξ	ξ	кси
Ο	ο	o	омикрон
Π	π	π	пи
Ρ	ρ	ρ	ро
Σ	σ	σ	сигма
Τ	τ	τ	тау
Υ	υ	υ	ипсилон
Φ	φ	φ	фи
Χ	χ	χ	хи
Ψ	ψ	ψ	пси
Ω	ω	ω	омега

Издавач:
Електротехнички факултет – Скопје

за издавачот:
Проф.д-р Властимир Гламочанин, декан

Лектура:
Георги Георгиевски

Коректура:
Алена Георгиевска

Техничка, компјутерска и графичка обработка:
Авторот

CIP – Каталогизација во публикација
Народна и Универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски" – Скопје

517.1/.2(075.8)

ПИПЕРЕВСКИ, Боро
Математичка анализа II, Боро Пиперевски. – Скопје: Електротехнички факултет, 2004. – 191 стр.: графички прикази :24 см.

Регистар.- Библиографија: стр. 189-190

ISBN 9989 – 630 – 41 - 0

а) Математичка анализа – Високошколски учебници

Ракописот е предаден во печат во месец март 2004 година. Печатењето е завршено во месец март 2004 година. Обем на книгата 191 страница. Тираж 500 примероци. Книгата е отпечатена во печатницата АЛФА 94 МА – Скопје.