УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ"
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Боро Пиперевски

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА
I

Скопје, 2001

УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ"
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Боро Пиперевски

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА
I

Скопје, 2001

УНИВЕРЗИТЕТ „СВ. КИРИЛ И МЕТОДИЈ”
ЕЛЕКТРОТЕХНИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Боро Пиперевски

МАТЕМАТИЧКА АНАЛИЗА
I

Скопје, 2001

Боро Пиперевски,
Математичка анализа I

Рецензенти:

Проф. д-р Никола Речкоски

Доц. д-р Марија Кујумџиева-Николоска

ISBN 9989 – 630 – 29 - 1

Одобрено со одлука бр. 07-2172/17 од 24.XI.1999 на Наставно-научниот совет
на Електротехничкиот Факултет во Скопје како ОСНОВЕН УЧЕБНИК

Во спомен на моите родители
Нада и Мане

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Оваа книга е напишана врз основа на содржини од предметот математика I кој повеќе години им го предавав на студентите од прва година на Електротехничкиот факултет, Машинскиот факултет и на Интердисциплинарните студии по политехничко образование при Универзитетот “Св. Кирил и Методиј“ во Скопје.

Во книгата е содржана темата гранични процеси и нивната примена кај реална функција од една реална променлива. За овој дел од математичката анализа проблем претставува строгата математичка прецизност во нејзиното изложување. Се надевам дека начинот на кој е обработен овој фундаментален дел е доволно јасен и разбирлив и нема да претставува поголема тешкотија за читателот.

Книгата е поделена во две глави со вкупно 11 параграфи. Во првата глава се обработува воведот во граничните процеси како фундамент на математичката анализа. Втората глава разработува некои примени на граничните процеси во изучувањето на некои својства на реална функција од една реална променлива преку изводите. За да се дообјаснат и илустрираат соодветни поими, тврдења и својства, во книгата се дадени поголем број решени примери.

Содржината на оваа книга опфаќа стандарна материја која се изучува во предметите од областа на математиката на сите технички факултети и првенствено е наменета за студентите на тие факултети. Во книгата се користени основни поими од теоријата на множества и пресликувања и во случај на потреба на читателот му се препорачува да ја консултира литературата [8, 10, 11].

Им изразувам длабока благодарност на рецензентите – проф. д-р Никола Речкоски, редовен професор на Факултетот за туризам и угостителство во Охрид, и д-р Марија Кујумџиева Николоска, доцент на Електротехничкиот факултет во Скопје, кои со своите добронамерни сугестии и забелешки во голема мера придонесоа да се оформи овој учебник.

Секој учебник, па и овој , носи и свои недостатоци кои се обидував да ги ублажам во разбирлива мера. Ќе им бидам благодарен на сите читатели кои со свои забелешки и сугестии ќе придонесат за подобрување на квалитетот при евентуално преиздавање на овој учебник.

Авторот

ГЛАВА ПРВА

ВОВЕД ВО ГРАНИЧНИ ПРОЦЕСИ

§1. РЕАЛНИ БРОЕВИ

Поимот број е фундамент на кој се заснова развитокот на човештвото од првобитната заедница до денес. Природните, целите, рационалните, реалните и комплексните броеви и некои релации и операции меѓу нив, како и некои особини, денес се дел од содржините на наставните програми по математика во основното и средното образование. Множествата на природните, целите, рационалните, реалните и комплексните броеви се означуваат со стандардни ознаки N, Z, Q, R, C, соодветно. За некои елементи од теоријата на множества читателот се упатува на литература [8, 10, 11]. Реалните и комплексните броеви се основа на математичката анализа. Затоа и овде ќе го сумираме накратко сето тоа со акцент на некои доста важни моменти. Да кажеме дека постојат повеќе начини за воведување на поимот реален број.

Пред да преминеме на аксиоматското воведување на реалните броеви, да наведеме некои својства кои се карактеристични специфики за природните, целите и рационалните броеви. Кај природните и целите броеви меѓу два броја постојат конечно многу природни односно цели броеви, а меѓу два соседни броја не постои природен односно цел број. Од друга страна меѓу кои било два рационални броја постојат бесконечно многу рационални броја (насекаде густо множество). Иако $N \subset Z \subset Q$, се покажува дека сите три бесконечни множества имаат еднаков број елементи (кардинален број наречен алеф нула со ознака $\aleph_0$). Да забележиме дека поимот "меѓу" го користиме во смисла на дефиницијата дадена во средното образование, а кој подоцна ќе биде повторно дефиниран со релацијата подредување.

1.1. ПРИНЦИП НА МАТЕМАТИЧКА ИНДУКЦИЈА. БИНОМНА ФОРМУЛА.

Принципот на математичка индукција, кој е последица на една од Пеановите аксиоми со кои се дефинира алгебарската структура на природните броеви, како метод на доказ доста често се употребува во математиката за докажување на некое тврдење чија точност зависи од природен број.

Принциӣ на маѿемаѿичкаѿа индукција

Тврдењето (исказот) $I(n)$, чија вистинитост зависи од природниот број n, е точно за секој природен број n ако:

1) $I(1)$ е точен (вистинит) исказ.

2) од претпоставената точност (вистинитост) на исказот $I(k)$ следува точност и за исказот $I(k+1)$.

***Пример* 1.1.** Да се покаже дека за секој природен број n е точно равенството $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Решение: За $n = 1$ равенството е точно, бидејќи $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$.

Да претпоставиме дека равенството е точно за $n = k$, т.е.

$$1 + 2 + ... + k = \frac{k\,(k+1)}{2}.$$

Ако со $L(k + 1)$ и $D(k + 1)$ ги означиме левата односно десната страна од даденото равенство во кое за n се става $к+1$, тогаш ќе добиеме:

$$L(k + 1) = 1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1) = [1 + 2 + 3 + ... + k] + (k + 1) =$$

$$= \frac{k\,(k+1)}{2} + (k + 1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = D(k + 1),$$

со што е докажано дека равенството е точно и за $n = k + 1$.

Притоа е искористена индуктивна претпоставка.

Во некои случаи тврдењето може да е точно почнувајќи од некое $n_0 > 1$. Тогаш принципот исто така може да се користи, при што точноста на тврдењето ќе биде валидна за сите природни броеви освен за конечно многу, и тоа $n_0 - 1$. Да забележиме дека постојат и други формулации на принципот на математичка индукција.

Пред да ја искажеме таканаречената биномна формула, ќе воведеме некои ознаки.

***Дефиниција* 1.1.** Производот $1\cdot2\cdot3\cdot\ \ldots\ \cdot n$ се означува со $n!$ (се чита ен факториел). По дефиниција се зема $0! = 1$.

***Дефиниција* 1.2.** Бројот

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

или бројот

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

се вика биномен коефициент и се означува со $\binom{n}{k}$ (се чита ен над ка). Притоа во првиот случај само k е природен број, додека во вториот случај освен k и n е природен број и $n \geq k$. По дефиниција се зема

$\binom{n}{0}=1$, $\binom{0}{0}=1$.

***Особина* 1.1.** За секој природен број k и секој природен број i ($k \geq i$) е точно равенството :

$$\binom{k}{i}+\binom{k}{i+1}=\binom{k+1}{i+1}.$$

Доказ:

$$\binom{k}{i}+\binom{k}{i+1}=\frac{k!}{i\,!(k-i)!}+\frac{k!}{(i+1)!(k-i-1)!}=\frac{k!(i+1)+k!(k-i)}{(i+1)!(k-i)!}=$$

$$=\frac{k!(k+1)}{(i+1)!(k-i)!}=\frac{(k+1)!}{(i+1)![k+1-(i+1)]!}=\binom{k+1}{i+1}.$$

***Теорема* 1.1** (**Биномна формула**). Нека a и b се реални (комплексни) броеви. Тогаш за секој природен број n важи формулата

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{i}a^{n-i}b^i + \ldots +$$
$$+\binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n .$$

Доказ: Во доказот се применува математичка индукција:

1. За $n = 1$ имаме точно равенство $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$.

2. Нека е точна индуктивната претпоставка т.е. нека е точно равенството

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \ldots +$$
$$+\binom{k}{k-1}a^1 b^{k-1} + \binom{k}{k}b^k .$$

Тргнуваме од левата страна на формулата земајќи за $n = k+1$ и освен индуктивната претпоставка ќе ја користиме особината 1.1 и фактот дека

$$\binom{k+1}{0} = 1 = \binom{k}{0} = \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1}.$$

Тогаш имаме

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)^k(a+b) = [\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b^1 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \ldots + \binom{k}{i}a^{k-i}b^i + \ldots$$
$$+\binom{k}{k-1}a^1b^{k-1} + \binom{k}{k}b^k](a+b) = \binom{k}{0}a^{k+1} + [\binom{k}{1} + \binom{k}{0}]a^k b^1 + \ldots + [\binom{k}{i} +$$
$$+\binom{k}{i-1}]a^{k+1-i}b^i + \ldots + [\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}]a^1 b^k + \binom{k}{k}b^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b^1 +$$
$$+\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \ldots + \binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^i + \ldots + \binom{k+1}{k}a^1 b^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}.$$

Бидејќи ја добивме десната страна на формулата за $n = k + 1$, следува дека равенството е точно за $n = k + 1$ и според принципот на математичка индукција доказот е завршен.

За биномните коефициенти постои некоја симетричност која произлегува од идентитетот

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

со чија помош се конструира Паскалов триаголник. Постојат и други врски и својства кои се изучуваат во посебна математичка дисциплина наречена комбинаторика, во која биномниот коефициент $\binom{n}{k}$ се означува и со C_n^k и претставува број на комбинации од n елементи од класата k.

1.2. АКСИОМАТСКО ВОВЕДУВАЊЕ НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

Реалните броеви се елементи на едно множество во кое аксиоматски се дефинираат две бинарни операции наречени собирање и множење и една бинарна релација наречена подредување со аксиоматско задоволување на некои закони, односно особини. Всушност, на тој начин се дефинира една алгебарска структура. Инаку егзистенцијата на овие алгебарски структури се заснова на природно искуство и егзистенцијата на реалните броеви може да се покаже ако се прифати егзистенција само на природните броеви.

Точната дефиниција на алгебарската структура чии елементи ќе бидат реалните броеви ќе биде дадена низ системот аксиоми од I до VI, поаѓајќи од непразно множество R чиишто елементи ќе ги наречеме броеви.

I. Аксиома за релацијата подредување со ознаката “<”

За кои било два броја a и b е задоволена една и само една од следните три врски:

1^0 $a < b$, 2^0 $a = b$, 3^0 $b < a$ (релацијата < се чита “помало”).

I_1. Ако $a < b$ и $b < c$ тогаш $a < c$ (транзитивност).

Ако $a < b$ или $a = b$, тогаш скратено ќе пишуваме $a \le b$. Често се употребува ознаката > дефинирана со $b > a$ ако и само ако $a < b$.

II. Аксиома за операцијата собирање со ознака “+”

За кои било два броја a и b постои еднозначно определен број c наречен збир, при што $c = a + b$.

II_1. За кои било два броја a и b важи $a + b = b + a$ (комутативен закон).

II_2. Постои број наречен нула со ознака 0, таков што за кој било број a важи $a + 0 = a$.

II_3. За кои било три броја a, b и c важи $(a + b) + c = a + (b + c)$ (асоцијативен закон).

II_4. За секој број a постои број наречен спротивен на бројот a со ознака $-a$, таков што важи $a + (-a) = 0$.

III. Аксиома за операцијата множење со ознаката “·”

За кои било два броја a и b постои еднозначно определен број c наречен производ, при што $c = a \cdot b$.

III_1. За кои било два броја a и b важи $a \cdot b = b \cdot a$ (комутативен закон).

III_2. За кои било три броја a, b и c важи $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (асоцијативен закон).

III_3. Постои број различен од 0, наречен единица со ознака 1, таков што за произволен број a важи $a \cdot 1 = a$.

III_4. За секој број a различен од 0 постои број кој се нарекува инверзен на бројот a, со ознака $\frac{1}{a}$, таков што важи $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

IV. Аксиома за врските меѓу операцијата собирање, операцијата множење и релацијата подредување.

IV_1. Ако $a < b$, тогаш за кој било број c важи $a + c < b + c$.

IV_2. Ако $a < b$ и $0 < c$, тогаш важи $a \cdot c < b \cdot c$.

IV_3. За кои било три броја a, b и c важи $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (дистрибутивен закон).

V. Аксиома на Архимед

За кој било број a постои природен број n таков што важи $a < n$.

VI. Аксиома на непрекинатост

Оваа аксиома се нарекува и принцип на непрекинатост и е доста важна во математичката анализа. Пред да биде формулирана, ќе дадеме неколку неопходни дефиниции.

***Дефиниција* 1.3.** За подмножеството A од множеството броеви R велиме дека е ограничено одгоре (оддолу) ако постои број M (m) од R таков што за кој било број a од A важи $a \leq M$ ($m \leq a$). Бројот M (m) се нарекува мајоранта (миноранта) или горна (долна) меѓа на множеството A.

***Дефиниција* 1.4.** Велиме дека множеството A е ограничено ако е ограничено и оддолу и одгоре.

***Дефиниција* 1.5.** Бројот M (m) се нарекува супремум (инфимум) или горна (долна) меѓа за множеството A подмножество од R ако:

1^0 M (m) е мајоранта (миноранта) за множеството A.

2^0 За произволен број $\varepsilon > 0$ постои барем еден број x од множеството A со особина $x > M - \varepsilon \, (x < m + \varepsilon)$.

Бројот M (m) се означува со $\sup A$ ($\inf A$).

Да забележиме дека е важно да се разграничи фактот дека бројот x не е единствен за секој број ε, туку за еден број ε постои еден број x, за друг број ε (различен од првиот) постои друг (или истиот) број x, и.т.н. (понекогаш наместо изразот "за произволен број ε" може да се сретне изразот "за кое било ε" или "за секое ε"). Во некоја литература $\sup A$ се дефинира и како најмала мајоранта, а $\inf A$ како најголема миноранта но за тоа претходно треба да се додадат уште две дефиниции за најмал и најголем елемент на едно множество.

***Дефиниција* 1.6.** Ако $\sup A$ ($\inf A$) е број кој му припаѓа на множеството A, тогаш велиме дека тој број е максимум (минимум) или најголем (најмал) елемент на множеството A.

Аксиома на непрекинатост:

Секое непразно одгоре ограничено подмножество од R има супремум (горна меѓа) кој припаѓа на R.

Множество R во кое се задоволени аксиомите I до VI се вика потполно подредено поле (како специјална алгебарска структура) на реални броеви. Секој елемент од множеството R се нарекува реален број. Да забележиме дека аксиомата V всушност е теорема која може да се докаже со аксиомата VI, но поради нејзината важност ја наведуваме посебно.

1.3. АПСОЛУТНА ВРЕДНОСТ НА РЕАЛЕН БРОЈ

***Дефиниција* 1.7.** Апсолутната вредност на реален број a се нарекува реален број, со ознака $|a|$, за кој важи:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ за } a \geq 0 \\ -a, \text{ за } a < 0 \end{cases}$$

Од самата дефиниција е јасно дека апсолутната вредност (како реален број) е секогаш поголема или еднаква на нула, т.е. секогаш важи $|a| \geq 0$ за кој било реален број a.

***Лема* 1.1.** Нека $a \in R$. Тогаш важи:

а) $|a| = |-a|$;   б) $a \leq |a|$;   в) $-a \leq |a|$.

Доказ: а) Според аксиомата за подредување за броевите a и 0 единствено е можен само еден од следните случаи:

$$1^0 \ a < 0; \quad 2^0 \ a = 0; \quad 3^0 \ a > 0.$$

Ќе ги разгледаме сите три случаи одделно.

1^0 Ако

$$a < 0,$$

тогаш според една последица на IV_2 важи

$$-a > 0,$$

па според дефиницијата за апсолутна вредност имаме

$$|a| = -a \quad \text{и} \quad |-a| = -a,$$

со што го добивме бараното равенство.

2^0 Ако

$$a = 0,$$

тогаш и

$$-a = 0, \quad |a| = 0, \quad |-a| = 0,$$

со што повторно се добива бараното равенство.

3^0 Ако

$$a > 0,$$

тогаш

$$-a < 0$$

и според дефиницијата за апсолутна вредност ќе имаме

$$|a| = a \quad \text{и} \quad |-a| = -(-a) = a,$$

па повторно се добива бараното равенство.

Со тоа доказот е завршен.

б) И овде ќе ги разгледаме сите три можни случаи:

1^0 Ако

$$a > 0,$$

тогаш

$$|a| = a,$$

па го добиваме бараното неравенство.

2^0 Ако

$$a = 0,$$

тогаш

$$|a| = 0,$$

па повторно го добиваме бараното неравенство.

3^0 Ако

$$a < 0,$$

тогаш

$$|a| = -a,$$

па заменето во неравенството се добива

$$a < -a,$$

што е точно (според IV_1 $a + (-a) < 0 + (-a)$, односно $0 < -a$. Според I_1 од $a < 0$ и $0 < -a$ следува $a < -a$).

Со тоа доказот е завршен.

в) Доказот се изведува на ист начин како под а) и б).

***Лема* 1.2.** За кои било реални броеви a и b е задоволено

а) $|a + b| \leq |a| + |b|$

б) $\,||a|-|b|| \leq |a-b|$

в) $\,|a|\cdot|b| = |a\cdot b|$

г) $\,\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$; со претпоставка дека $b \neq 0$.

Доказ: а) Од Лема 1 следува:

$$a \leq |a|, \tag{1}$$

$$b \leq |b|, \tag{2}$$

$$-a \leq |a|, \tag{3}$$

$$-b \leq |b|. \tag{4}$$

Ако ги собереме (1) и (2), ќе добиеме

$$(a+b) \leq |a|+|b|. \tag{5}$$

Ако пак ги собереме (3) и (4), ќе имаме

$$-(a+b) \leq |a|+|b|. \tag{6}$$

Од (5) и (6) според дефиницијата за апсолутна вредност (гледана наназад) го добиваме бараното неравенство.

Неравенството под б), како и равенствата под в) и г) се докажуваат на сличен начин.

1.4. НЕКОИ ВАЖНИ ПОСЛЕДИЦИ

Како што веќе забележавме, голем број последици од аксиомите I до VI веќе се познати од средно образование. Сепак, овде ќе се задржиме на некои од нив.

***Последица* 1.1.** За кои било два реални броја a и b, $a > 0$, постои цел број $n > 0$ таков што $n\cdot a > b$.

Доказ: Навистина, од Архимедовата аксиома следува дека за реалниот број $\dfrac{b}{a}$ постои цел број $n > 0$ таков што $n > \dfrac{b}{a}$, од каде што следува и бараното неравенство.

***Последица* 1.2.** Ако за секој реален позитивен број ε важи $|a| < \varepsilon$, тогаш $a = 0$.

Доказ: Да претпоставиме обратно, т.е. нека

$$a \neq 0,$$

од каде што следува

$$|\,a\,| \neq 0, \quad \text{т.е.} \quad |\,a\,| > 0.$$

Нека за ε го земеме бројот $|\,a\,|$.

Бидејќи според условот неравенството треба да важи за секое ε, ќе важи и за

$$\varepsilon = |\,a\,|,$$

т.е. ќе важи

$$|\,a\,| < |\,a\,|,$$

што е во контрадикторност со аксиомата I. Според тоа

$$a = 0.$$

***Последица* 1.3.** Нулата е единствена.

Доказ: Нека 0_1 и 0_2 се нули и $0_1 \neq 0_2$. Тогаш

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2,$$

што претставува контрадикторност. При тоа е користена особината II_1.

Лесно се докажуваат следните последици.

***Последица* 1.4.** Ако $a + b = a + c$, тогаш $b = c$.

[Упатство: $(a + b) + (-a) = ... = b$, $(a + c) + (-a) = ... = c$.]

***Последица* 1.5.** $\forall a,\ b \in R$, постои единствен реален број x, така што $a + x = b$.

(Единствено решение на линеарна равенка со една непозната.)

***Последица* 1.6.** Ако $a \cdot b = 0$, тогаш $a = 0$ или $b = 0$.

(Во R нема делители на нулата).

Врз основа на аксиомите се дефинираат и други операции и последици, на пример операцијата одземање ($a - b$ се дефинира како $a + (-b)$), операцијата делење, операцијата степенување, операцијата коренување и др. Сепак, како непосредна последица од VI аксиома ќе го наведеме уште следното тврдење:

***Последица* 1.7.** Секое непразно оддолу ограничено подмножество од R има долна меѓа, односно инфимум, во R.

Досега не ги спомнавме ирационалните броеви. Всушност тоа се реални броеви кои не се рационални и нивното множество се означува со I. Може да се покаже дека меѓу два реални броја има бесконечно многу како рационални, така и ирационални броеви.

Множеството I не е празно множество. На пример, бројот x кој е решение на равенката $x^2 = 2$ му припаѓа на тоа множество. За да го покажеме тоа, ќе претпоставиме дека тој број е рационален т.е. може да се претстави во вид на дропка $\frac{p}{q}$, каде што p и q се заемно прости цели броеви. Со замена во равенката се добива $p^2 = 2q^2$, што значи p^2 односно p е парен број и може да се запише во вид $p = 2k$, каде што $k \in Z$. Со повторна замена на p се добива $q^2 = 2k^2$, што значи и q е парен број, што е во контрадикторност со претпоставката p и q да се заемно прости броеви. Според тоа тој број не е рационален број.

***Пример* 1.2.** Множеството

$$A=\{\frac{m}{n} \mid m, n \in N, m < n\}$$

од сите правилни позитивни дропки нема најголем ни најмал елемент, односно нема $\sup A$ и нема $\inf A$ кои би припаѓале на тоа множество.

Решение: Ќе покажеме дека 0 е $\inf A$.

1^0 0 е миноранта на A бидејќи $\frac{m}{n} > 0 \; \forall m, n \in N$.

2^0 Нека ε е произволен позитивен реален број. Од Архимедовата аксиома следува дека постои природен број n_0 (за тоа ε) таков што $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, односно $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$ (ако е $n_0 = 1$, тогаш се зема $n_0 + 1 > n_0$, т.е. 2>1). Бидејќи $\frac{1}{n_0} \in A$, $n_0 \neq 1$, покажавме дека за секој позитивен реален број ε постои број $\frac{1}{n_0} \in A$ за кој важи $0 < \frac{1}{n_0} < 0 + \varepsilon$, односно дека $\inf A = 0$. Но $0 \notin A$ што значи A нема најмал елемент.

***Пример* 1.3.** $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,
каде што
$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Решение: Нека
$$a_0 = \sup A, \qquad b_0 = \sup B,$$
и нека означиме
$$c_0 = a_0 + b_0.$$

1^0 $(a_0 = \sup A \Rightarrow \forall a \in A, a \leq a_0)$;
$(b_0 = \sup B \Rightarrow \forall b \in B, b \leq b_0)$
$\Rightarrow \forall (a + b) \in A + B, a + b \leq a_0 + b_0 \; (= c_0)$.

Значи, c_0 е мајоранта за $A + B$.

2^0 $a_0 = \sup A$ и $b_0 = \sup B \Rightarrow \forall \varepsilon, \quad \exists\, a_\varepsilon \in A$ и $b_\varepsilon \in B$
така што важи
$$a_\varepsilon > a_0 - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad b_\varepsilon > b_0 - \frac{\varepsilon}{2}.$$
Значи, постои
$$c_\varepsilon = (a_\varepsilon + b_\varepsilon) \in A + B,$$
така што
$$c_\varepsilon > \left(a_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(b_0 - \frac{\varepsilon}{2}\right) = c_0 - \varepsilon,$$
со што доказот е завршен.

1.5. ГЕОМЕТРИСКО ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ. ПРОШИРЕНО МНОЖЕСТВО НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

Реалните броеви можат геометриски да се претстават со точки од една бројна права.

***Дефиниција* 1.8.** Бројна оска се нарекува насочена права на која се фиксирани две точки кои се означуваат со 0 (почеток) и со 1 и на кои им одговараат реалните броеви 0 и 1.

Може да се покаже дека на секој реален број му одговара само една точка од бројната оска и обратно.

Позитивните реални броеви (т.е. реалните броеви a за кои важи $0 < a$) се претставени со точки од десната страна на нулата, а негативните реални броеви (т.е. реалните броеви a за кои важи $a < 0$) се претставени со точки од левата страна на нулата. Честопати наместо "a е помало од b" ("b е поголемо од a") се вели "a се наоѓа лево од b" ("b се наоѓа десно од a").

***Дефиниција* 1.9.** Нека a и b се две точки од бројната оска за кои важи $a < b$. Множеството точки x од бројната оска за кои важат неравенствата

$$a < x < b$$

се нарекува отворен интервал и се означува со

$$(a, b).$$

Множествата

$$\{x \mid x \in R, a \leq x < b\} \qquad \text{и} \qquad \{x \mid x \in R, a < x \leq b\}$$

се нарекуваат полуотворени интервали и се означуваат со

$$[a, b) \qquad \text{и} \qquad (a, b]$$

соодветно.

Затворен интервал или сегмент се нарекува множеството

$$\{x \mid x \in R, a \leq x \leq b\}$$

и се означува со

$$[a, b].$$

Последното множество често се нарекува и отсечка со должина $b - a$.

***Дефиниција* 1.10.** Нека $a, \varepsilon \in R$ и $\varepsilon > 0$ (или 0 е помало од ε). Множеството точки x од бројната оска за кои важи $|x - a| < \varepsilon$ се нарекува ε–околина на точката a и се означува со $V(a, \varepsilon)$.

Може да се покаже дека неравенството

$$|x - a| < \varepsilon,$$

е еквивалентно со системот неравенства

$$x - a < \varepsilon, \qquad -(x - a) < \varepsilon;$$

односно

$$x < a + \varepsilon, \qquad x > a - \varepsilon;$$

односно

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

Значи, геометриски ε–околината на точката a е интервалот

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

***Дефиниција* 1.11.** Точката $a \in R$ е точка на натрупување (точка на згуснување) за множеството $E \subseteq R$ ако секоја нејзина околина $V(a, \delta)$ содржи барем една точка од множеството E различна од a.

***Дефиниција* 1.12.** Точката $a \in R$ е внатрешна точка за множеството $E \subseteq R$ ако постои нејзина околина $V(a, \delta)$ која е подмножество на множеството E.

Множеството од реалните броеви може да се прошири со уште два елемента со ознаки $-\infty$ и $+\infty$, така што за секој реален број a да важат формално во прошириното мнижество следните особини:

а) $-\infty < +\infty$ и $-\infty < a < +\infty$,

б) $a + (+\infty) = (+\infty) + a = +\infty$; $a + (-\infty) = (-\infty) + a = -\infty$,

в) ако $a > 0$, тогаш $a\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot a = +\infty$ и $a\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot a = -\infty$,

ако $a < 0$, тогаш $a\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot a = -\infty$ и $a\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot a = +\infty$,

г) $\dfrac{1}{\infty} = \dfrac{1}{-\infty} = 0.$

Ова проширување го применуваме и во дефинирањето на интервали и полуинтервали. Имено, се дефинираат и следните множества (интервали):

$$\{x \mid x \in R, x < a\} = (-\infty, a); \qquad \{x \mid x \in R, x \le a\} = (-\infty, a];$$

$$\{x \mid x \in R, x > a\} = (a, +\infty); \quad \{x \mid x \in R, x \le a\} = [a, +\infty); \quad R = (-\infty, +\infty).$$

Изразите пак $(+\infty) + (-\infty)$, $0\cdot(\pm\infty)$, $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$, не се дефинираат во проширеното множество и се нарекуваат неопределени изрази.

1.6. ДЕЦИМАЛЕН ЗАПИС НА РЕАЛЕН БРОЈ.

БРОЈНИ СИСТЕМИ

Нека a е произволен позитивен реален број. Од аксиомата на Архимед следува дека постои природен број n_0 таков што $a \leq n_0$. Нека $m_0 + 1$ е најмалиот (и единствен) од сите природни броеви со таа особина (постои според последицата 1.7 од аксиомата VI). Тогаш

$$m_0 < a < m_0 + 1 \quad \text{и} \quad 0 < a - m_0 < 1, \quad 0 < 10(a - m_0) < 10.$$

Понатаму за реалниот број

$$10(a - m_0)$$

постои природен број n_1 така што

$$n_1 < (a - m_0)10.$$

Со m_1 ќе го означиме најголемиот од сите природни броеви со таа особина (кој е единствен и постои според аксиомата VI). Притоа, поради неравенството

$$a - m_0 < 1,$$

ќе биде

$$0 < m_1 < 10.$$

Значи

$$m_1 < (a - m_0)10 \leq m_1 + 1,$$

односно

$$0 < 10^2[a - m_0 - \frac{m_1}{10}] \leq 10.$$

Понатаму, според истата постапка за реалниот број

$$10^2[a - m_0 - \frac{m_1}{10}]$$

ќе постои единствен природен број m_2 така што

$$0 \leq m_2 < 10^2[a - m_0 - \frac{m_1}{10}] \leq m_2 + 1$$

од каде што следува дека

$$0 < m_2 < 10 \quad \text{и} \quad 0 < 10^3[a - m_0 - \frac{m_1}{10} - \frac{m_2}{10^2}] \leq 10.$$

Нареден чекор ќе биде егзистенцијата и единственост на природен број m_3 за реалниот број

$$10^3[a - m_0 - \frac{m_1}{10} - \frac{m_2}{10^2}] \qquad \text{итн.}$$

Продолжувајќи ја оваа процедура (алгоритам), ќе добиеме низа од природни броеви

$$m_0, m_1, m_2, \ldots, m_k, m_{k+1}, \ldots$$

чии членови ги имаат следните особини:

$$0 \leq m_{k+1} < 10^{k+1}[a - m_0 - \frac{m_1}{10} - \frac{m_2}{10^2} - \ldots - \frac{m_k}{10^k}] \leq m_{k+1} + 1,$$

$$0 \leq m_i < 10,\ \ i = 1, 2, \ldots, k+1,\ \ k \in N^0\ (\equiv N \cup \{0\}),$$

$$a > m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10^2} + \ldots + \frac{m_k}{10^k}, \text{ за секој природен број } k.$$

Понатаму се покажува дека a всушност е супремумот на множеството од броевите

$$m_0,\ m_0 + \frac{m_1}{10},\ \mathrm{m}_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10^2}, \ldots,\ \mathrm{m}_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10^2} + \ldots + \frac{m_k}{10^k}, \ldots,$$

напишани во низа по големина и сите помали од бројот a (во согласност со самиот алгоритам).

Значи, за секој позитивен реален број a постои низа (бесконечна или конечна) од природни броеви

$$m_0,\ m_1,\ m_2, \ldots,\ m_k, \ldots\quad, 0 \leq\ m_k \leq 9,\ k \in N,$$

така што:

$$a = m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10^2} + \ldots + \frac{m_k}{10^k} + \ldots\ .$$

Записот

$$a = m_0\, m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_k \ldots$$

се вика децимален запис на реалниот број a и е единствен освен за една класа рационални броеви (пример: $\frac{1}{8}$ = 0,125000... = 0,124999...) чии членови имаат точно два децимални записа. Тоа е всушност класата рационални броеви кај кои именителот е делив со прост број помал од 10. Се покажува дека на периодичните децимални записи одговараат рационални броеви, а на непериодичните децимални записи ирационалните броеви.

Да забележиме дека при алгоритмот ги користевме аксиомите V и VI, односно нивните последици, со што е гарантирана самата постапка. Исто така, секој негативен број може да се интерпретира на ист начин со тоа што се зема неговата апсолутна вредност, а по постапката добиениот децимален запис се множи со –1 (односно се става минус пред него). Секој рационален број запишан како дропка може да се запише во децимален запис со едноставно делење на броителот со именителот, при што самата постапка на делење всушност е поедноставна форма на веќе изнесениот алгоритам. Притоа е важно да се забележи дека во самиот алгоритам се користеше десетката, со што всушност се добива број запишан во декаден броен систем (*дека* [грч.] = десет) со основа десет. Тоа всушност значи дека за записот се користат точно десет знаци (цифри): 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Доколку се користи друга основа, добиениот запис ќе биде запис во позиционен броен систем со другата основа.

Од позиционите бројни системи најчесто се користи декадниот броен систем, а секако потоа централно место зазема таканаречениот бинарен броен систем со основа два. Причината е чисто практична ако се знае дека за запишување на еден број во декадниот броен систем се потребни десет цифри (знаци), а во бинарниот броен систем само две. Практичноста произлегува од тоа што за запишувањето на броевите и за изведувањето на аритметичките операции се потребни стабилни состојби, а обично кај електронските и електромеханичките елементи се карактеристични две различни природни состојби (вклучен или исклучен прекидач, има или нема проток на струја и сл.). Сепак, за сметачите е многу важна и економичноста на бројот на позиционите места, така што може да се покаже дека бројниот систем со основа три е најекономичен, со забелешка дека во бинарниот систем сите аритметички операции се сведуваат на операцијата собирање, што доведува до многу помали машински грешки при заокружување.

На крајот да го разгледаме историското изградување на поимот *реален број*. Природните, целите и рационалните броеви, за кои важат аксиомите од I до V, биле познати со сите нивни својства уште во раната антика. Тогаш бил познат и проблемот на постоење немерливи отсечки, како што е, на пример, должината на хипотенузата на правоаголен триаголник чии катети имаат должина 1. Тој проблем на барање број кој ќе одговара на должината на таква отсечка довел до поимот ирационален број, односно број кој не е рационален. Значи, иако множеството Q е насекаде густо (меѓу два рационални броја секогаш постои рационален број, например нивниот полузбир), сепак тоа има "дупки". Проблемот може да се постави и со следната формулација. Дали постои број чиј квадрат (или помножен сам со себе) е 2? Значи, настанала природна потреба од едно проширување на множеството рационални броеви, што е комплетно направено во втората половина на XIX век (Дедекинд (Dedekind), Кантор (Cantor), Болцано (Bolzano), Ваерштрас (Weierstrass)), и тоа на разни начини: Дедекинд преку т.н Дедекиндови пресеци (множества), Кантор преку принципот за вложени отсечки итн.

На сите нив им е заедничко постоењето или непостоењето на супремум, односно инфимум, во подмножество од рационални броеви.

§2.КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

2.1. АКСИОМАТСКО ВОВЕДУВАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

Множеството на комплексните броеви ќе биде аксиоматски дефинирано со помош на веќе дефиниран начин на аксиоматското изградување на множеството реални броеви. Притоа секако ќе се води сметка за специфичноста на двете алгебарски структури и ќе се наведуваат нивните разлики.

За аксиоматското воведување на комплексните броеви се поаѓа од едно множество подредени парови реални броеви, кое ќе го означиме со

$$C = R \times R = R^2 = \{(a, b) \mid a, b \in R\},$$

кое всушност претставува Декартов производ на множество реални броеви со себе и чии елементи ќе ги наречеме броеви. Со помош на операциите со кои е дефинирано множеството реални броеви се дефинираат нови операции во множеството C, наречени собирање и множење, со соодветни особини.

I. Аксиома за операцијата собирање со ознаката “$\oplus$”

За кои било два броја

$$z_1 = (a_1, b_1) \quad \text{и} \quad z_2 = (a_2, b_2) \in C$$

се дефинира единствен број

$$z_3 \in C$$

наречен збир, со запис

$$z_3 = z_1 \oplus z_2 .$$

Притоа

$$z_3 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

I_1. За кои било два броја

$$z_1 = (a_1, b_1) \quad \text{и} \quad z_2 = (a_2, b_2) \in C$$

важи

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2\,,\ b_1 = b_2\,.$$

I_2. За кои било два броја

$$z_1 \quad \text{и} \quad z_2 \in C$$

важи

$$z_1 \oplus z_2 = z_2 \oplus z_1 \text{ (комутативен закон).}$$

I_3. Постои број во C наречен нула со ознака

$$\mathbf{0} = (0, 0),$$

таков што за било кој број

$$z \in C \quad \text{важи} \quad z \oplus \mathbf{0} = z.$$

I_4. За кои било три броја

$$z_1, z_2, z_3 \in C$$

важи

$$(z_1 \oplus z_2) \oplus z_3 = z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3) \text{ (асоцијативен закон).}$$

I_5. За секој број

$$z = (a, b) \in C$$

постои број во C наречен спротивен на бројот z, со ознака $-z$, таков што важи

$$z \oplus (-z) = \mathbf{0}.$$

Притоа

$$-z = (-a, -b).$$

II. Аксиома за операцијата множење со ознаката “$\otimes$”

За кои било два броја

$$z_1 = (a_1, b_1), \quad z_2 = (a_2, b_2) \in C$$

постои еднозначно определен број

$$z_3 \in C$$

наречен производ со запис

$$z_3 = z_1 \otimes z_2\,.$$

Притоа

$$z_3 = (a_1a_2 - b_1b_2\,,\ a_1b_2 + a_2b_1).$$

II_1. За кои било два броја

$$z_1,\ z_2 \in C$$

важи

$$z_1 \otimes z_2 = z_2 \otimes z_1 \quad \text{(комутативен закон).}$$

II_2. За кои било три броја

$$z_1, z_2, z_3 \in C$$

важи

$$(z_1 \otimes z_2) \otimes z_3 = z_1 \otimes (z_2 \otimes z_3) \quad \text{(асоцијативен закон)}$$

II_3. Постои број во C, различен од $\mathbf{0}$, наречен единица со ознака $\mathbf{1} = (1, 0)$, таков што за произволен број $z \in C$, важи $z \otimes \mathbf{1} = z$.

II_4. За секој број $z = (a, b) \in C$, $z \neq \mathbf{0}$, постои број во C кој се нарекува инверзен на бројот z, со ознака $\frac{1}{z}$, таков што важи $z \otimes \frac{1}{z} = \mathbf{1}$.

Притоа $\frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$.

III.Аксиома за врските меѓу операцијата собирање и операцијата множење.

III_1. За произволни три броја $z_1, z_2, z_3 \in C$ важи

$$(z_1 \oplus z_2) \otimes z_3 = (z_1 \otimes z_3) \oplus (z_2 \otimes z_3) \quad \text{(дистрибутивен закон).}$$

Веднаш да забележиме дека од практични причини за операциите собирање и множење во множеството C понатаму ќе ги задржиме истите ознаки за собирање “+” и за множење “·” како кај множеството реални броеви R, иако суштински се работи за две различни операции.

На крајот сепак да забележиме дека, освен задржување на истите ознаки за операциите собирање и множење, ќе ги задржиме и истите ознаки за нулата и единицата. Притоа може лесно да се покаже дека вака дефинираните особини се согласуваат со соодветните аксиоматски дадени особини кај реалните броеви, односно со нивна помош тие можат лесно да се докажат. Лесно може да се погреши ако веднаш се помисли дека сите операции можат да се дефинираат покоординатно, т.е. во првата односно втората компонента на подредениот пар. Од дефиницијата за множење веднаш се согледува дека тоа не е точно. Секако, оваа дефиниција е потребна заради природното проширување на множество реални броеви со останување во сила на соодветни исти особини.

Да заклучиме дека на овој начин е добиена една специјална алгебарска структура, дефинирана со аксиомите I, II и III, која се нарекува поле на комплексни броеви. Сепак да забележиме дека релацијата подредување не е дефинирана во ова множество C, со што оваа алгебарска структура се разликува од алгебарската структура на реалните броеви. Исто така, во проширеното множество на комплексните броеви се додава само уште еден број со ознака $\propto$ (кај реалните броеви имаме два броја: $+\propto$ и $-\propto$). Врз основа на операциите собирање и множење се дефинираат и други операции и последици, на пример операцијата одземање ($z_1 - z_2$ се дефинира како $z_1 + (-z_2)$), операцијата делење, операцијата степенување, и слично.

2.2. АЛГЕБАРСКИ ЗАПИС НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

Да дефинираме подмножество од C со $\{(a, 0) \mid a \in R\}$. Со веќе дефинираните операции може да се покаже дека во тоа подмножество важат сите аксиоми и особини (и за релацијата подредување) кои важеа во R. Според тоа, комплексниот број $(a, 0)$ можеме да го идентификуваме со реалниот број a.

Да го разгледаме практичниот проблем за наоѓање решение на равенката $x^2 = -1$, односно дали постои број кој помножен самиот со себе ќе го даде како резултат реалниот број -1. Одговорот е негативен ако решението се бара во R. Да се обидеме да го решиме проблемот во веќе дефинираното множество C.

Да претпоставиме дека $x = (a, b)$ е решение на равенката

$$x^2 = -1.$$

Со помош на веќе дефинираното множење ќе добиеме

$$x^2 = (a^2 - b^2, a \cdot b + a \cdot b) = (-1, 0) = -1,$$

од каде за добивање на реалните броеви a и b го добиваме следниот систем равенки (во R)

$$a^2 - b^2 = -1, \qquad a \cdot b + a \cdot b = 0.$$

Со негово решавање во R се добиваат две решенија:

$$a_1 = 0, \quad b_1 = 1 \qquad \text{и} \qquad a_2 = 0, \quad b_2 = -1$$

што значи комплексните броеви (0, 1) и (0, −1) се решенија на поставениот проблем.

Секој комплексен број

$$z = (a, b)$$

може да се запише со изразот

$$(a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)\cdot(b, 0).$$

***Дефиниција* 2.1.** Комплексниот број (0, 1) се нарекува имагинарна единица со ознака i (во електротехника j).

Со користење на последната дефиниција и претходно добиениот израз за комплексен број, со даденото објаснување за идентичноста на комплексен број $(a, 0)$ со реален број a, ќе ја дадеме следната дефиниција:

***Дефиниција* 2.2.** Секој комплексен број

$$z = (a, b)$$

може да се запише со изразот

$$a + ib,$$

кој се нарекува алгебарски вид на комплексниот број z.

Со овој запис во голема мера се поедноставуваат операциите со комплексните броеви, бидејќи тие се сведуваат на операции со биноми во R. Притоа е важно да се има предвид дека

$$i^{4k} = 1,\ \ i^{4k+1} = i,\ \ i^{4k+2} = -1,\ \ i^{4k+3} = -i, \quad k \in N^0\,(= N \cup \{0\}).$$

Всушност, i е едно решение на равенката $z^2 = -1$, во C.

***Дефиниција* 2.3.** За комплексниот број $z = a + ib$ реалниот број a се нарекува реален дел на комплексниот број z, со ознака $\mathrm{Re}\, z$, а реалниот број b се нарекува имагинарен дел на комплексниот број z, со ознака $\mathrm{Im}\, z$.

Комплексниот број z за кој $\mathrm{Re}\, z = 0$ се нарекува чисто имагинарен број.

***Дефиниција* 2.4.** За секој комплексен број

$$z = a + ib$$

се дефинира единствен комплексен број

$$a - ib,$$

наречен конјугиран комплексен број на комплексниот број z, со ознака $\bar{z}$.

Со дефиницијата 2.4 и соодветните операции лесно се докажува следната лема:

***Лема* 2.1.** За кои било $z = a + ib, z_1, z_2, \in C$ важат особините:

1^0 $a = \text{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $b = \text{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$;

2^0 $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;

3^0 $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$;

4^0 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$;

5^0 $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ $(\in \mathbf{R})$;

6^0 $\overline{(\bar{z})} = z$.

Да забележиме уште еднаш дека Re z и Im z се реални броеви.

2.3. ГЕОМЕТРИСКО ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ. ПОИМИТЕ МОДУЛ И АРГУМЕНТ. ТРИГОНОМЕТРИСКИ ВИД НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

Нека е даден Декартов правоаголен координатен систем во рамнина. Во однос на тој координатен систем која било точка од рамнината е потполно определена со подреден пар реални броеви кои се нејзини координати. Во согласност со тоа можеме да воспоставиме обратно еднозначна кореcподенција меѓу множеството точки од рамнината и множеството комплексни броеви. Таа рамнина во тој случај се нарекува комплексна (Гаусова) рамнина, при што апцисната оска се нарекува реална оска, а ординатната оска се нарекува имагинарна оска, од потполно природно разбирливи причини.

***Дефиниција* 2.5.** Нека

$$z = x + iy.$$

Реалниот ненегативен број

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

се нарекува модул (или апсолутна вредност) на комплексниот број z со ознака $|z|$.

Со дефиницијата 2.5 и со претходните особини и дефиниции лесно се докажува следната лема:

***Лема* 2.2.** За кои било

$$z_1, z_2, z \in C$$

важат особините:

1^0 $z \cdot \overline{z} = |z|^2$;

2^0 $-|z| \le \operatorname{Re} z \le |z|$;

3^0 $-|z| \le \operatorname{Im} z \le |z|$;

4^0 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;

5^0 $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$;

6^0 $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$;

7^0 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, $(z_2 \ne \mathbf{0})$.

Секој комплексен број

$$z = x + iy, \quad z \ne \mathbf{0}(= 0 + i0)$$

може да се запише во вид

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$$

при што важи

$$\left(\frac{x}{|z|}\right)^2 + \left(\frac{y}{|z|}\right)^2 = 1.$$

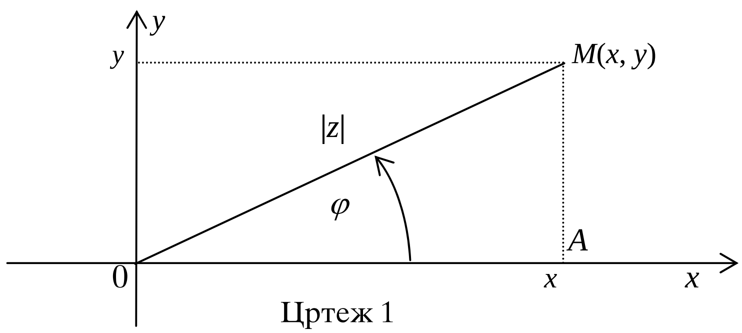
Од дефиницијата и особините на тригонометриските функции можеме да заклучиме дека ќе постои агол φ за кој ќе важи

$$\frac{x}{|z|} = \cos\varphi \quad \text{и} \quad \frac{y}{|z|} = \sin\varphi,$$

односно

$$x = |z|\cdot\cos\varphi, \qquad y = |z|\cdot\sin\varphi .$$

Истите релации се добиваат и од триаголникот $0AM$ (цртеж 1).



Цртеж 1

***Дефиниција* 2.6.** Аголот φ, дефиниран со релациите

$$x = |z|\cos\varphi, \qquad y = |z|\sin\varphi,$$

се нарекува аргумент на комплексниот број

$$z = x + iy$$

со ознака Arg z, а видот (формата, записот)

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

се нарекува тригонометриски вид на комлексниот број

$$z = x + iy.$$

Според геометриското претставување на комплексните броеви, модулот ќе претставува растојание меѓу координатниот почеток и точката $M(x, y)$, која одговара на комплексниот број, а аргументот е аголот меѓу позитивната насока на оската x и ориентираната полуправа $0M$. Да забележиме дека за комплексен број од вид

$$z = x + i0$$

модулот е идентичен со апсолутната вредност кај реалните броеви.

Од условот за еднаквост на два комплексни броја z_1 и z_2, запишани во тригонометриски вид, произлегува дека два комплексни броја се еднакви ако се еднакви нивните модули ($|z_1| = |z_2|$), а за нивните аргументи важи

$$\text{Arg } z_1 = \text{Arg } z_2 + 2k\pi, \quad k \in Z$$

(од особините за еднаквост на тригонометриските функции). Последната констатација означува дека аргументот на еден ист комплексен број е повеќезначен број т.е. не е еднозначно определен. Сепак, за поедноставни операции се дефинира единствена вредност

$$0 \le \arg z \le 2\pi$$

(некаде се дефинира со $-\pi \le \arg z \le \pi$), наречена главна вредност на аргументот, со ознака arg z. Според тоа

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi.$$

Доколку при аритметички операции и други трансформации се добие аргумент поголем или помал од така дефинираната главна вредност, со додавање или одземање на $2k\pi$ за точно определено k се доаѓа до соодветната главна вредност на аргументот.

Комплексниот број

$$\mathbf{0} \ (= 0 + i0)$$

има модул 0 и, по дефиниција, произволен аргумент.

Нека е

$$z = x + iy.$$

Во согласност со дефиницијата за конјугиран комплексен број $\bar{z}$ и во согласност со особините на тригонометриските функции, со помош на равенките за трансформација на алгебарски вид во тригонометриски вид ќе го добиеме тригонометрискиот вид на конјугираниот комплексен број

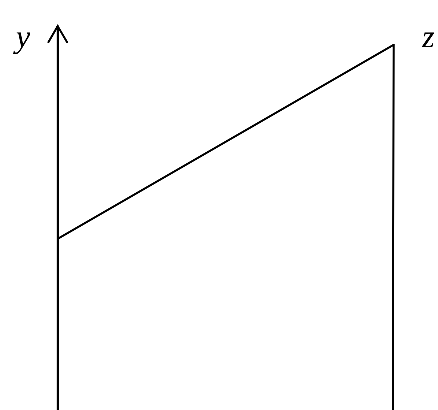
$$\bar{z} = x - iy = |z|\cdot(\cos\varphi - i\sin\varphi) = |z|\cdot[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)],$$

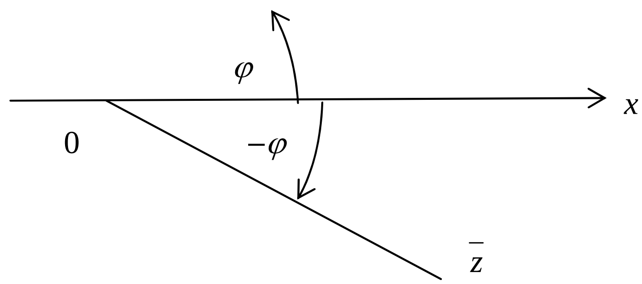
каде што

$$\varphi = \arg z.$$

Според тоа

$$|\bar{z}| = |z| \quad \text{и} \quad \arg \bar{z} = -\arg z \quad \text{(цртеж 2).}$$





Цртеж 2

Тригонометрискиот вид на комплексниот број овозможува поедноставно изведување на операциите множење, делење, степенување и коренување на комплексните броеви.

2.4. СТЕПЕНУВАЊЕ И КОРЕНУВАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

Нека

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),\quad |z| \neq 0.$$

Тогаш

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)} \cdot \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} =$$

$$= \frac{1}{|z|}(\cos\varphi - i\sin\varphi) =$$

$$= \frac{1}{|z|}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)].$$

Нека

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Со користење на веќе познати тригонометриски формули се добива

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Во согласност со последните релации се добива

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Значи, при производ на два комплексни броја модулите се множат, а аргументите се собираат, додека при делење модулите се делат а аргументите се одземаат. Со математичка индукција може да се докаже дека оваа релација важи и за произволен број множители. Според тоа, земајќи еден ист број

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

за множител кај производ од n множители, се доаѓа до Моавровата формула

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

каде што n е природен број.

Бидејќи

$$z^{-n} = (z^{-1})^n,$$

поради

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)],$$

добиваме

$$z^{-n} = (z^{-1})^n = \left(\frac{1}{|z|}\right)^n [\cos n(-\varphi) + i\sin n(-\varphi)] =$$

$$= |z|^{-n}[\cos(-n)\varphi + i\sin(-n)\varphi],$$

од што следува дека Моавровата формула важи за $n \in Z$.

Нека е даден комплексен број w. За комплексниот број z велиме дека е n-ти корен од комплексниот број w ако z е едно решение на равенката

$$z^n = w.$$

Од примерот со решенија на равенката

$$z^2 = -1$$

е јасно дека операцијата коренување не е еднозначна, т.е. постојат повеќе комплексни броеви кои се корени на даден комплексен број. За да го добиеме правилото за нивно наоѓање, тргнуваме од равенката

$$z^n = w$$

во која ги заменуваме броевите z и w во тригонометриски вид. Нека

$$w = |w|(\cos \arg w + i \sin \arg w)$$

и

$$z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Тогаш според Моавровата формула се добива равенството

$$|z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |w|(\cos \arg w + i \sin \arg w)$$

од кое, според дефиницијата за еднаквост на комплексните броеви во тригонометриски вид, се добиваат равенствата

$$|z|^n = |w|, \qquad n\varphi = \arg w + 2k\pi$$

односно формулите

$$|z| = \sqrt[n]{|w|}, \qquad \varphi = \frac{\arg w + 2k\pi}{n}, \qquad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Бидејќи за $\sqrt[n]{|w|}$ се зема аритметичката вредност, тогаш е јасно дека за z еднозначно е определен само модулот, додека аргументот не е еднозначно определен. Според тоа, ќе се добијат бесконечно многу комплексни броеви кои се n-ти корени на комплексниот број w (за секој цел број k се добива по еден n-ти корен). Може да се покаже со користење на особините на тригонометриските функции дека всушност има конечен број, и тоа точно n, различни комплексни броеви кои се n-ти корени на комплексниот број w, додека останатите се повторуваат. Притоа е доволно за k да се земаат вредностите 0, 1, 2, ..., n–1.

Нека

$$k > n - 1 \quad \text{или} \quad k < 0$$

и нека го поделиме со n, при што

$$k = sn + p, \qquad p \in \{0, 1, 2, ..., n-1, \quad s \in Z.$$

Нека z_k е соодветен n-ти корен. Тогаш од

$$n\varphi = \arg w + 2k\pi,$$

каде што

$$\varphi = \arg z_k,$$

се добива

$$\varphi = \frac{\arg w + 2p\pi}{n} + 2s\pi.$$

Бидејќи

$$\cos\left(\frac{\arg w + 2p\pi}{n} + 2s\pi\right) = \cos\frac{\arg w + 2p\pi}{n}$$

и

$$\sin\left(\frac{\arg w + 2p\pi}{n} + 2s\pi\right) = \sin\frac{\arg w + 2p\pi}{n},$$

заклучуваме дека

$$\arg z_k = \arg z_p,$$

односно

$$z_k = z_p.$$

Според тоа ќе важи

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|}\cdot\left[\cos\frac{\arg w + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\arg w + 2k\pi}{n}\right] \quad \text{за } k = 0, 1, 2, ..., n-1,$$

каде што равенството треба да се подразбере како равенство на две множества. Броевите кои се n-ти корени од еден комплексен број w одговараат на точки во Гаусовата комплексна рамнина, кои се темиња на правилен n-аголник впишан во круг со центар во координатниот почеток и радиус еднаков на $\sqrt[n]{|w|}$.

Да забележиме дека понекогаш се користи и експоненцијалниот вид на комплексниот број

$$z = |z|\, e^{i\varphi},$$

при што е искористена формулата на Ојлер:

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

§3. НИЗИ ОД РЕАЛНИ БРОЕВИ

Граничниот процес е еден од најважните основни поими во математиката, поконкретно во математичката анализа.

***Дефиниција* 3.1.** Ако на секој природен број n според некое правило му одговара некој единствен реален број a_n, тогаш велиме дека е зададена низа од реални броеви. За реалните броеви a_n велиме дека се членови на низата, a_n се вика општ член на низата, а n негов индекс. Низата обично се означува со $\{a_n\}$ или со (a_n).

Освен со општиот член низата може да биде зададена и на друг начин, на пример со врска меѓу повеќе нејзини членови, со првите неколку членови од кои може лесно да се уочи законот (правилото) и др.

***Пример* 3.1.** Низата $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, има општ член $a_n = \frac{1}{n}$ и запис $\{\frac{1}{n}\}$.

***Пример* 3.2.** Низата 1, –1, 1, –1, ..., има општ член $a_n = (-1)^{n+1}$.

***Пример* 3.3.** Низата со општ член a_n е зададена со врската

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2})$$

и со првите два члена

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2.$$

***Пример* 3.4.** Аритметичка низа (прогресија) е низа зададена со општ член

$$a_n = a_{n-1} + d,$$

каде што a_0 и d се однапред зададени.

***Пример* 3.5.** Геометриска низа (прогресија) е низа зададена со општ член

$$a_n = q \cdot a_{n-1},$$

каде што a_0 и q се однапред зададени.

Од самата дефиниција на низата произлегува дека секоја низа има бесконечно многу членови, додека множеството од членови на низата може да биде и конечно, како во примерот 3.2.

3.1. КОНВЕРГЕНТНИ НИЗИ: ПОИМ, ДЕФИНИЦИЈА, ГЕОМЕТРИСКА ИНТЕРПРЕТАЦИЈА И ОСОБИНИ

***Дефиниција* 3.2.** За конечниот реален број a велиме дека е граница (лимес) на низата $\{a_n\}$ ако за секој реален позитивен број ε постои природен број $n_0(\varepsilon)$ (кој зависи од ε) таков што за сите членови a_n, за чии индекси важи $n > n_0$, да важи неравенството $|a_n - a| < \varepsilon$.

Во тој случај пишуваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

и велиме дека низата $\{a_n\}$ се стреми кон границата a кога n се стреми кон бескрајност.

Да забележиме дека ε понекогаш се конкретизира како доволно мал позитивен реален број.

***Дефиниција* 3.3.** Низата $\{a_n\}$ велиме дека е конвергентна во R ако постои конечен реален број кој е нејзина граница. Низите кои не се конвергентни се нарекуваат дивергентни.

***Пример* 3.6.** Низата $\{\frac{1}{n}\}$ е конвергентна со граница 0.

Решение: Навистина, нека ε е произволен позитивен реален број. Тогаш за реалниот број $\frac{1}{\varepsilon}$, според аксиомата на Архимед, постои природен број n_0, така што $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Тогаш за секое $n > n_0$ ќе важи $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ односно ќе важи $|\, a_n - a \,| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Бидејќи ε е реален број, а n_0 е природен број, обично за n_0 се зема цел дел, што значи во овој случај дека $n_0 = [\frac{1}{\varepsilon}]$, каде $[x]$ го означува најголемиот цел број помал од x.

***Пример* 3.7.** Да се докаже дека

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Решение: Нека ε е реален произволен позитивен број. За да го најдеме соодветниот природен број n_0 (ако постои), ќе тргнеме од неравенството

$$|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0| < \varepsilon$$

и ќе го добиеме еквивалентното неравенство

$$n > \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Според тоа, ако за n_0 го земеме природниот број $[\frac{1}{\varepsilon^2}]$, тогаш за секој природен број $n > n_0$ ќе важи еквивалентното неравенство

$$|\frac{1}{\sqrt{n}} - 0| < \varepsilon.$$

Да забележиме дека во некои случаи лесно не се добива еквивалентно неравенство од кое би се добил бараниот природен број n_0. Во тој случај изразот $|a_n - a|$ се поедноставува со израз поголем од него и дури потоа се преминува на неравенството $< \varepsilon$.

***Пример* 3.8.** Низата $\{a_n\}$, каде $a_n = c$ (c е константа) за секој природен број n, се вика низа-константа и таа е конвергентна со границата c.

Решение: За доказ е доволно за n_0 да се земе вредност 1. Тогаш за кој било позитивен реален број ε неравенството

$$|a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

ќе биде задоволено за секое n (бидејќи според условот $\varepsilon > 0$) па може формално да се каже дека е задоволено за секој природен број $n > 1$ ($= n_0$).

Неравенството

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

од дефиницијата за граница всушност се сведува на две неравенства

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$

односно

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$

Според тоа, геометриската интерпретација на дефиницијата за конвергентна низа ќе се состои во следното тврдење. Реалниот број a е граница на низата $\{a_n\}$ ако во секоја ε-околина на точката a

$$\mathrm{V}(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

има бесконечно многу членови на низата, а надвор конечно многу (најмногу $n_0(\varepsilon)$).

Според оваа интерпретација е очевидно дека конвергентноста на една низа нема да се менува ако од неа се отстранат конечен број членови.

***Пример* 3.9.** За низата $\{\frac{1}{n}\}$, при $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $n_0 = 10$. Значи надвор од интервалот $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ се наоѓаат членовите со индекси помали или еднакви на 10 (вкупно 10 на број), т.е. членовите

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10},$$

додека сите други (бесконечно многу) се во интервалот $(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$.

***Пример* 3.10.** Да се покаже дека низата $\{(-1)^n\}$ не е конвергентна.

Решение: Нека конкретна вредност на ε е $\frac{1}{2}$. Тогаш во таа ε-околина на точката 1 се наоѓаат сите членови на низата со парен индекс, што значи бесконечно многу, додека пак надвор од истата околина на точката 1 се наоѓаат сите членови на низата со непарен индекс, што исто така значи бесконечно многу. Според тоа, 1 не може да биде граница на низата. На ист начин се покажува дека и –1 не може да биде граница. Ќе наведеме и друг начин на доказот. Ако

$$\varepsilon = \frac{1}{2},$$

тогаш не може да се најде n_0 такво што за сите природни броеви $n > n_0$ би важело неравенството

$$|(-1)^n - 1| < \frac{1}{2}.$$

Колку и да е n_0 големо, секогаш постои непарен природен број поголем од него за кој неравенството не би било задоволено. Истото размислување може да се примени и за неравенството

$$|(-1)^n - (-1)| < \frac{1}{2}.$$

***Дефиниција* 3.4.** Низата $\{a_n\}$ е ограничена ако постои конечен реален број $M > 0$ така што за секој природен број n да важи $|a_n| < M$.

***Особина* 3.1.** Ако низата $\{a_n\}$ е конвергентна, тогаш нејзината граница е еднозначно определена.

Доказ: Да претпоставиме дека низата има две различни граници, a и b, при што нека $a < b$. Нека земеме конкретна вредност за ε, и тоа

$$\varepsilon = \frac{1}{3}(b - a).$$

Соодветните ε-околини на точките a и b ќе бидат дисјуктни множества (цртеж 3).

--------(------|------)-------(-------|-------)------→

$a-\varepsilon$ a $a+\varepsilon$ $b-\varepsilon$ b $b+\varepsilon$

Цртеж 3

Според претпоставката надвор од интервалот $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ има конечен број членови од низата (најмногу $n_0(\varepsilon)$), што значи и во интервалот $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, што пак противречи на претпоставката дека b е исто така граница.

***Особина* 3.2.** Ако низата $\{a_n\}$ е конвергентна, тогаш е ограничена.

Доказ: Нека низата $\{a_n\}$ е конвергентна со граница a. Тогаш за $\varepsilon = 1$ ќе постои природен број $n_0(1)$, така што за секое $n > n_0$ ќе биде точно неравенството $|a_n - a| < 1$, односно неравенството

$$|a_n| = |a_n - a + a| < |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Нека со M го означиме бројот

$$\max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0}|, 1 + |a|\}.$$

Тогаш за секој природен број n ќе важи $|a_n| < M$.

Обратното тврдење не мора да важи. На пример, низата $\{(-1)^n\}$ е ограничена со $M = 2$, но сепак не е конвергентна (пример 3.10).

***Особина* 3.3.** Ако низата $\{a_n\}$ е конвергентна со границата a и $a<b$ $(a > b)$, тогаш постои природен број n_0, така што за секој природен број $n > n_0$ ќе важи неравенството

$$a_n < b \ (a_n > b).$$

Доказ: Од конвергенцијата на низата следи дека за

$$\varepsilon = b - a$$

постои природен број n_0, така што за секој природен број $n > n_0$ ќе важи неравенството

$$|a_n - a| < b - a,$$

односно неравенствата

$$2a - b < a_n < b,$$

од каде за доказ е потребно само неравенството $a_n < b$. На ист начин се докажува и случајот кога $a > b$.

***Последица* 3.1.** Специјално за $b = \frac{a}{2}$ $(a \neq 0)$ според особината 3.3 ќе постои природен број n_0, така што за секој природен број $n > n_0$ ќе важи $|a_n| > |\frac{a}{2}|$.

Доказ: Нека $a > 0$. Тогаш за $b = \frac{a}{2}$ (бидејќи $a > \frac{a}{2}$) според особината 3.3 ќе постои природен број n_1, така што за секој природен број $n > n_1$ ќе важи неравенството

$$a_n > \frac{a}{2} = |\frac{a}{2}|$$

(бидејќи според условот $a > 0$).

Нека $a < 0$. Тогаш за $b = \frac{a}{2}$ (бидејќи сега $a < \frac{a}{2}$) според особината 3.3 ќе постои природен број n_2, така што за секој природен број $n > n_2$ ќе важи неравенството

$$a_n < \frac{a}{2} < |\frac{a}{2}|$$

(според особината за апсолутна вредност), односно неравенството

$$-a_n > -\frac{a}{2} = |\frac{a}{2}|.$$

Нека

$$n_0 = \max\{n_1, n_2\}.$$

Тогаш од неравенствата

$$a_n > |\frac{a}{2}| \quad \text{и} \quad -a_n > |\frac{a}{2}|$$

следува дека за секој природен број $n > n_0$ ќе важи неравенството

$$|a_n| > |\frac{a}{2}|.$$

***Особина* 3.4.** Ако низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни со границите a и b соодветно и ако за секој природен број n (или $\forall n > n_0 > 1$) важи неравенството $a_n \leq b_n$, тогаш $a \leq b$.

Доказ: Да претпоставиме обратно, т.е. нека $a > b$. Од конвергенцијата на низите следува дека за специјално

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(a-b)\ (>0)$$

ќе постојат природни броеви n_1 и n_2, така што за секој природен број $n > n_1$ ќе важи неравенството $a - \varepsilon < a_n$, а за секој природен број $n > n_2$ ќе важи неравенството

$$b_n < b + \varepsilon.$$

Ако со n_0 го означиме бројот $\max\{n_1, n_2\}$ тогаш за секој природен број $n > n_0$ ќе важат неравенствата

$$b_n < b + \varepsilon = b + \frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}(a+b) = a - \frac{1}{2}(a-b) = a - \varepsilon < a_n,$$

односно неравенството $b_n < a_n$, што противречи на претпоставката дадена во условот. Значи, нашата претпоставка е погрешна, т.е. мора да е $a \leq b$.

***Особина* 3.5.** Ако низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни и имаат иста граница a и ако за членовите на двете низи и на трета низа $\{c_n\}$ за секој природен број n важат неравенствата $a_n \leq c_n \leq b_n$, тогаш и низата $\{c_n\}$ е конвергентна и има иста граница a.

Доказ: Од конвергентноста на низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ следува дека за произволен (но еден ист за двете низи) позитивен реален број ε може да се најдат природни броеви n_1 и n_2, така што за секој природен број $n > n_1$ ќе важи неравенството

$$a - \varepsilon < a_n,$$

а за секој природен број $n > n_2$ ќе важи неравенството

$$b_n < a + \varepsilon.$$

Тогаш за секој природен број $n > n_0$, каде што $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, ќе важат неравенствата

$$a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon,$$

односно неравенството

$$|c_n - a| < \varepsilon,$$

што значи дека низата $\{c_n\}$ е конвергентна и има иста граница a.

Оваа особина се нарекува и особина на меѓуниза или на сендвич-низа.

3.2. АРИТМЕТИЧКИ ОПЕРАЦИИ СО КОНВЕРГЕНТНИ БРОЈНИ НИЗИ. БЕСКОНЕЧНО МАЛИ И БЕСКОНЕЧНО ГОЛЕМИ НИЗИ. ТЕОРЕМА ЗА МОНОТОНИ И ОГРАНИЧЕНИ НИЗИ.

Нека се дадени две конвергентни низи $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ со граници a и b, соодветно. Дефинираме нови низи со општи членови $a_n \pm b_n$, $a_n \cdot b_n$ и $\frac{a_n}{b_n}$, наречени сума-низа, разлика-низа, производ-низа и количник-низа, при што за количник-низата е потребно да се претпостави дека за секој природен број n, $b_n \neq 0$.

***Теорема* 3.1.** Ако низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни со границите a и b соодветно, тогаш и низите збир-низа, разлика-низа, производ-низа и количник-низа се конвергентни со границите $a \pm b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$, соодветно, при што за последното треба и услов $b \neq 0$.

Доказ: а) Нека ε е произволен позитивен реален број. Тогаш според условот ќе постојат природни броеви n_1 и n_2, така што за секој природен број $n > n_1$ ќе важи неравенството

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и за секој природен број $n > n_2$ ќе важи неравенството

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Нека со n_0 го означиме бројот $\max\{n_1, n_2\}$. Тогаш за секој природен број $n > n_0$ ќе важи неравенството

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Со тоа е докажано тврдењето за збир-низата и разлика-низата.

б) Нека ε е произволен позитивен реален број. Од конвергенцијата на низата $\{b_n\}$, според особината 3.2 ќе постои реален број $M > 0$, така што за секој природен број n ќе важи

$$|b_n| < M.$$

Притоа слободно можеме да претпоставиме дека

$$|a| < M$$

(во спротивно за M го земаме $|a|$). Според условот ќе постојат природни броеви n_1 и n_2, така што за секој природен број $n > n_1$ ќе важи неравенството

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

и за секој природен број $n > n_2$ ќе важи неравенството

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Нека со n_0 го означиме бројот $\max\{n_1,n_2\}$. Тогаш за секој природен број $n > n_0$ ќе важи неравенството

$$|a_n \cdot b_n - a \cdot b| = |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n + a \cdot b_n - a \cdot b| \le |a_n \cdot b_n - a \cdot b_n| + |a \cdot b_n - a \cdot b| =$$

$$= |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

со што доказот е завршен за производ-низата.

в) Според последицата 3.1 ќе постои природен број n_1, така што за секој природен број $n > n_1$ ќе важи неравенството

$$|b_n| > \frac{1}{2}|b|.$$

Од друга страна, за произволен позитивен реален број ε ќе постојат природни броеви n_2 и n_3, така што за секој природен број $n > n_2$ ќе важи неравенството

$$|a_n - a| < \frac{1}{4}\varepsilon \cdot |b|$$

и за секој природен број $n > n_3$ ќе важи неравенството

$$|b_n - b| < \frac{1}{4|a|}\varepsilon \cdot b^2.$$

Нека со n_0 го означиме $\max\{n_1, n_2, n_3\}$.Тогаш за секој природен број $n > n_0$ ќе важи неравенството

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{1}{b_n \cdot b}(a_n \cdot b - b_n \cdot a)\right| = \frac{1}{|b_n||b|} \cdot |(a_n - a) \cdot b + (b - b_n) \cdot a| \le$$

$$\frac{1}{|b_n|}|a_n - a| + \frac{1}{|b_n||b|}|b - b_n|\cdot|a| < (\frac{1}{4}\,\varepsilon\cdot|b|)\cdot(\frac{2}{|b|}) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

со што доказот е завршен за количник-низата.

Да забележиме дека обратното не мора да важи, т.е. може разлика-низата да биде конвергентна низа, но формирачките низи да не бидат конвергентни. На пример, ако $a_n = b_n = n$, тогаш разлика-низата $\{0\}$ е конвергентна со граница 0, а двете формирачки низи не се конвергентни (тие се неограничени, особина 3.2) .

***Дефиниција* 3.5.** Ако низата $\{a_n\}$ е конвергентна и нејзината граница е 0, тогаш таа се нарекува нула-низа или бесконечно мала низа.

***Дефиниција* 3.6.** Низата $\{a_n\}$ е бесконечно голема низа ако за кој било позитивен реален број A постои природен број $n_0(A)$, така што за секој природен број $n > n_0$ важи неравенството $|a_n| > A$.

Од самата дефиниција произлегува дека секоја бесконечно голема низа е дивергентна во R (но не во проширено R), бидејќи не е ограничена.

Може да се покаже дека општиот член a_n на секоја конвергентна низа со граница a може да биде претставен во вид

$$a_n = a + \alpha_n$$

каде што α_n е општ член на некоја нула-низа.

Овде ќе се задржиме само на неколку тврдења за бесконечно малите и бесконечно големите низи. Врз основа на теоремата 3.1 следува дека збир-низа, разлика-низа и производ-низа на две нула-низи е пак нула-низа.

***Особина* 3.6** Ако $\{\alpha_n\}$ е нула-низа и $\{a_n\}$ ограничена низа, тогаш производ-низата $\{\alpha_n\cdot a_n\}$ е нула-низа.

Доказ: Од ограниченоста на низата $\{a_n\}$ постои позитивен реален број M, така што за секој природен број n ќе важи неравенството

$$|a_n| < M.$$

Понатаму, нека ε е позитивен произволен реален број. Според условот $\{\alpha_n\}$ е нула-низа и ќе постои природен број $n_0(\varepsilon)$, така што за секој природен број $n > n_0$ ќе важи неравенството

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M},$$

односно неравенството

$$|\alpha_n \cdot a_n| = |a_n| \cdot |\alpha_n| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

што значи дека низата $\{\alpha_n \cdot a_n\}$ е нула-низа.

***Особина* 3.7.** Ако $\{a_n\}$ е бесконечно голема низа, тогаш низата-количник $\{\frac{1}{a_n}\}$ е бесконечно мала низа (при формирањето на количник-низата се отстрануваат сите членови од бесконечно големата низа кои се 0, а кои сигурно ги има конечно многу).

Ако $\{\alpha_n\}$ е нула-низа, чии членови се различни од нула (или конечно многу членови се нула, па се отстрануваат), тогаш количник-низата $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$ е бесконечно голема низа.

Доказ: Според дефиницијата 3.6 за $M = 1$ ќе постои природен број n_1, така што за секој природен број $n > n_1$ ќе важи $|a_n| > 1$. Понатаму, нека ε е произволен позитивен реален број. Според дефиницијата 3.6 за реалниот позитивен број $\frac{1}{\varepsilon}$ ќе постои природен број n_2, така што за секој природен број $n > n_2$ ќе важи неравенството

$$|a_n| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Нека $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Тогаш за секој природен број $n > n_0$ ќе важи

$$\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \frac{1}{|a_n|} < \varepsilon,$$

со што е докажано дека низата $\{\frac{1}{a_n}\}$ е нула-низа.

Нека сега $\{\alpha_n\}$ е нула-низа чии членови се различни од нула. Нека M е произволен позитивен реален број. Тогаш за позитивниот реален број $\frac{1}{M}$ ќе постои природен број n_0, така што за секој природен број $n > n_0$ ќе важи неравенството

$$|\alpha_n| < \frac{1}{M},$$

односно неравенството

$$\left|\frac{1}{\alpha_n}\right| = \frac{1}{|\alpha_n|} > M,$$

со што е докажано дека $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$ е бесконечно голема низа.

***Дефиниција* 3.7.** За низа $\{a_n\}$ велиме дека монотоно расте (опаѓа) ако за секој природен број n важи

$$a_n \le a_{n+1} \quad (a_n \ge a_{n+1}).$$

Низите дефинирани со дефиницијата 3.7 се викаат монотони низи. Ако важи знакот за строго неравенство, тогаш велиме дека низата строго монотоно расте (опаѓа).

***Дефиниција* 3.8.** За низа $\{a_n\}$ велиме дека е ограничена одгоре (оддолу) ако постои реален број M (m), така што за секој природен број n да важи неравенството

$$a_n < M \quad (a_n > m).$$

Понекогаш се вели дека низата е ограничена оддесно (одлево).

***Теорема* 3.2.** Секоја монотоно растечка (опаѓачка) и ограничена одгоре (оддолу) низа е конвергентна.

Доказ: Нека низата $\{a_n\}$ монотоно расте и е ограничена одгоре. Тогаш во согласност со дефиницијата 3.8 множеството од сите нејзини членови ќе биде ограничено одгоре и според аксиомата VI за непрекинатост ќе има супремум. Нека тој супремум го означиме со a. Според дефиницијата 1.5 за супремум, за секој природен број n ќе важи неравенството

$$a_n \le a.$$

Понатаму, според истата дефиниција 1.5, за ε произволен позитивен реален број ќе постои барем еден член од низата (елемент од множеството членови на низата) a_{n_0}, така што ќе важи неравенството

$$a - \varepsilon < a_{n_0}.$$

Бидејќи пак според условот низата монотоно расте, за секој природен број $n > n_0$ ќе важи неравенството

$$a_{n_0} \le a_n.$$

Користејќи ги сите три неравенства, за секој природен број $n > n_0$ ќе важат неравенствата

$$a - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le a < a + \varepsilon,$$

односно неравенството

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

со што теоремата е докажана. На ист начин се докажува и тврдењето за монотоно опаѓачка и оддолу ограничена низа.

3.3. НЕКОИ СПЕЦИЈАЛНИ НИЗИ

Овде ќе ги разгледаме специјалните низи:

$$1.\ \{\sqrt[n]{n}\};\quad 2.\ \{\sqrt[n]{a}\},\ a > 0;\quad 3.\ \{q^n\};\quad 4.\{\frac{a^n}{n!}\};\quad 5.\{(1 + \frac{1}{n})^n\},$$

со кои ќе се среќаваме и понатаму.

Притоа за докажување на нивната конвергенција или дивергенција, покрај користење на дефиницијата 3.2, ќе ги користиме и особините 3.2, 3.5, 3.7, последицата 3.1, како и теоремите 3.1 и 3.2.

1. За $n > 1$ ќе важи $\sqrt[n]{n} > 1$. Тогаш можеме да ставиме

$$\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n,$$

каде што за секој природен број n ќе важи $\alpha_n > 0$. Од последното равенство со помош на биномната формула (теорема 1.1) за секој природен број $n > 1$ ќе добиеме:

$$n = (1+\alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_n^2 + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\alpha_n^3 + ... + \alpha_n^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_n^2 + \{n\alpha_n + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)\alpha_n^3 +...+ \alpha_n^n\} > 1 + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_n^2,$$

односно ќе го добиеме неравенството:

$$n > 1 + \frac{1}{2}n(n-1)\alpha_n^{\,2},$$

од каде што се добива неравенството

$$0 < \alpha_n < \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Според особината 3.5 и теоремата 3.1, применета на производот на низите $\{\sqrt{2}\}$ и $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$, чии граници ги најдовме во примерите 3.8 и 3.7, добиваме дека низата $\{\alpha_n\}$ е нула-низа. Со тоа е покажано дека низата $\{\sqrt[n]{n}\}$ е конвергентна со границата 1.

2. Нека $a \geq 1$. За секој природен број $n > [a]$ ќе важи неравенството $1 < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{n}$. Од особината 3.5 и со користење на првата специјална низа следува дека низата $\{\sqrt[n]{a}\}$е конвергентна со границата 1. Ако пак $0 < a < 1$, тогаш $\sqrt[n]{a} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$ и според првиот дел низата $\{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\}$ е конвергентна со границата 1 ($1 < \frac{1}{a}$). Според теоремата 3.1 следува дека и во овој случај низата $\{\sqrt[n]{a}\}$ е конвергентна со границата 1.

3. Ќе покажеме дека низата $\{q^n\}$ е бесконечно мала низа ако $|q| < 1$ и бесконечно голема низа ако $|q| > 1$. Во специјален случај, кога $q = 1$, се добива константа-низа која е конвергентна со границата 1, а кога $q = -1$, се добива дивергентна низа разгледана во примерот 3.10.

Нека $0 < q < 1$. Тогаш за секој природен број n ќе важи неравенството $q^n > q^{n+1}$, што значи дека низата монотоно опаѓа. Од друга страна, за секој природен број n важи неравенството $q^n > 0$, што значи дека низата е ограничена оддолу. Според теоремата 3.2 низата $\{q^n\}$ е конвергентна со граница некој конечен број A. Со користење на последицата од геометриската интерпретација за конвергенција (изоставување конечен број членови) и според теоремата 3.1, ќе добиеме

$$A = \lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \lim_{n\to\infty} q\cdot q^n = (\lim_{n\to\infty} q)(\lim_{n\to\infty} q^n) = q\cdot A,$$

од каде за наоѓање на границата A се добива равенката

$$A\cdot(1-q)=0.$$

Бидејќи $q \neq 1$, ја добиваме границата $A = 0$.

Нека $-1 < q < 0$. Поради равенството

$$|\,q^n - 0\,| = |q^n| = |q|^n = |q|^n - 0 = |\,|q|^n - 0\,|,$$

со користење на првиот дел и дефиницијата 3.2, следува дека и во овој случај низата е конвергентна со границата 0.

Нека $|q| > 1$. Тогаш $\dfrac{1}{|q|} < 1$ или $|\dfrac{1}{q}| < 1$ па, според претходно докажаното, низата $\{\dfrac{1}{q^n}\}$ е нула-низа. Според особината 3.7 следува дека во овој случај низата $\{q^n\}$ е бесконечно голема низа, т.е. е дивергентна (бидејќи $|q| > 1$ за секој природен број n, $\dfrac{1}{q^n} \neq 0$).

4. Ќе покажеме дека низата е конвергентна со границата 0. Според Архимедовата аксиома за реалниот број $|a|$ ќе постои природен број n_0, така што ќе важи неравенството $|a| < n_0$. Тогаш за секој природен број $n > n_0$ ќе важи $|a| < n + 1$. Од изразот за општиот член на низата се добива

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}a,$$

односно

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{n+1}|a|,$$

од каде што за секој природен број $n > n_0$ ќе важи неравенството

$$|a_{n+1}| < |a_n|.$$

Со тоа покажавме дека низата $\{|a_n|\}$ монотоно опаѓа, а бидејќи е и ограничена оддолу ($|a_n| > 0$), според теоремата 3.2 таа е конвергентна со граница некој конечен број A. Со користење на теоремата 3.1 и примерите 3.6 и 3.8 се добива:

$$A = \lim_{n\to\infty}|a_{n+1}| = \lim_{n\to\infty}|a_n|\cdot(\frac{1}{n+1}|a|) = (\lim_{n\to\infty}|a_n|)\cdot(\lim_{n\to\infty}|a|)\cdot(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}) = A\cdot|a|\cdot 0 = 0.$$

Поради равенството

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right| = \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^n}{n!}-0 = \left|\frac{|a|^n}{n!}-0\right|,$$

со користење на претходното тврдење и дефиницијата 3.2 следува дека низата $\{\frac{a^n}{n!}\}$ е конвергентна со границата 0 .

5. Според биномната формула (теорема 1.1) применета на членовите a_n и a_{n+1} од низата, ќе ги добиеме изразите:

$$a_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{1}{2!}[n(n-1)]\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3!}[n(n-1)(n-2)]\frac{1}{n^3} + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(n-1)]\}\frac{1}{n^n} = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) +$$

$$+ \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + \dots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n});$$

$$a_{n+1} = (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1}) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})(1-\frac{n}{n+1}).$$

Со користење на неравенствата

$$1-\frac{k}{n} < 1-\frac{k}{n+1} \quad \text{и} \quad 1-\frac{k}{n+1} > 0,$$

кои важат за сите природни броеви k и n, при што $k \le n$ (кои лесно се добиваат тргнувајќи од неравенството $n < n + 1$), со споредување на сите соодветни собироци (кои се позитивни) и земајќи предвид дека членот a_{n+1} има и уште еден позитивен собирок, доаѓаме до неравенството $a_{n+1} > a_n$ кое важи за секој природен број n, што значи дека нашата низа монотоно расте.

Бидејќи за $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$ важат неравенствата $1-\frac{k}{n} < 1$, ќе имаме

$$a_n = 2 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + ... + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) \cdots (1 - \frac{n-1}{n}) <$$

$$< 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Ако пак ги искористиме неравенствата

$$k! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots k \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{k-1}$$

кои важат за секој природен број $k \geq 2$, ќе го добиеме неравенството

$$a_n < 1 + [1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + ... + (\frac{1}{2})^{n-1}] = 1 + 2[1 - (\frac{1}{2})^n] = 3 - (\frac{1}{2})^n < 3.$$

Последното неравенство ќе важи за секој природен број n што значи дека низата е ограничена одгоре и според теоремата 3.2 покажавме дека низата

$$\{(1+\frac{1}{n})^n\}$$

е конвергентна. Нејзината граница е бројот $e \sim 2{,}718281....$ (Неперов број), за кој е докажано дека е ирационален број.

3.4. КОНВЕРГЕНЦИЈА НА НИЗИ ВО ПРОШИРЕНО МНОЖЕСТВО НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

Во дефиницијата 3.2 границата на низата беше конечен реален број. Сега ќе ја прошириме таа дефиниција на низи кои можат да имаат и граница $+\infty$ односно $-\infty$.

***Дефиниција* 3.9.** Низата $\{a_n\}$ има граница $+\infty$ $(-\infty)$ ако за секој произволен позитивен реален број A постои природен број n_0, така што за секој природен број $n > n_0$ важи неравенството

$$a_n > A \qquad (a_n < -A).$$

Тогаш пишуваме

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad (\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty).$$

Од последната дефиниција можеме лесно да заклучиме дека ако една низа има граница $+\infty$ односно $-\infty$, тогаш таа е бесконечно голема низа. Обратното не мора да важи, што може да се заклучи од примерот со низата $\{(-1)^n \cdot n\}$ која е бесконечно голема, но ги нема како граници $+\infty$ односно $-\infty$. Сепак важи тврдењето дека ако низата $\{a_n\}$ е бесконечно голема низа, тогаш низата $\{|a_n|\}$ има граница $+\infty$.

Можеме да кажеме дека со оваа дополнителна дефиниција го проширивме поимот за конвергенција во проширено множество реални броеви сметајќи ги и низите со граница $+\infty$ односно $-\infty$ како конвергентни низи во проширена смисла.

Сите досега наведени особини и теореми за конвергентни низи ќе важат и за конвергентните низи во проширена смисла, со забелешка дека притоа се изоставуваат резултатите кога се појавуваат изрази од вид: $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$; $(+\infty) + (-\infty)$; $0\cdot(\pm\infty)$ (наречени неопределени изрази).

Во случаите кога се јавуваат овие неопределени изрази можни се некои трансформации кои зависат од конкретни низи, со кои би се добиле сепак изрази на кои можат да се применат особините односно теоремите за конвергентни низи.

***Пример* 3.11.** Да се најде $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1}$.

Решение: Очевидно се работи за неопределен израз од вид $\frac{+\infty}{+\infty}$, бидејќи низите $\{n^2 + 1\}$ и $\{n^2 - 1\}$ имаат граница $+\infty$ и за наоѓање на бараната граница не може да се примени теоремата 3.1. Ако на општиот член од низата чија граница се бара се извршат следните трансформации

$$\frac{n^2+1}{n^2-1} = \frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n^2(1-\frac{1}{n^2})} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}},$$

ќе се добие израз за општиот член како количник од две конвергентни низи $\{1 + \frac{1}{n^2}\}$ и $\{1 - \frac{1}{n^2}\}$, така што ќе може да се примени теоремата 3.1. Значи, низата е конвергентна со границата 1.

3.5. ПРОИЗВОЛНИ НИЗИ

***Дефиниција* 3.10.** Нека е дадена низа $\{a_n\}$ и произволна строго монотоно растечка низа од природни броеви $\{k_n\}$. Нека понатаму од низата $\{a_n\}$ ги избереме членовите со индекси k_1, k_2, k_3, ..., k_n, ..., и формираме нова низа $\{a_{k_n}\}$. На тој начин добиената низа $\{a_{k_n}\}$ се нарекува подниза на низата $\{a_n\}$ дефинирана со низата индекси $\{k_n\}$.

Од дефиницијата е јасно дека за една бројна низа можат да се формираат бесконечно многу нејзини поднизи и дека секогаш за секој природен број n важи неравенството $k_n \geq n$.

***Особина* 3.8.** Ако низата $\{a_n\}$ е конвергентна со границата a, тогаш и која било нејзина подниза е конвергентна со истата граница.

Доказ: Нека ε е произволен позитивен реален број. Бидејќи низата $\{a_n\}$ е конвергентна, ќе постои природен број n_0 таков што за секој природен број $n > n_0$ ќе важи неравенството

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Нека $\{a_{k_n}\}$ е произволна подниза. Бидејќи $k_n \geq n$, од претходното неравенство следува дека за сите природни броеви (индекси) $k_n > n_0$ ќе важи неравенството

$$|a_{k_n} - a| < \varepsilon,$$

што значи дека поднизата $\{a_{k_n}\}$ е конвергентна со границата a. Од произволноста на изборот на поднизата следува дека тоа важи за сите поднизи.

***Особина* 3.9.** Ако сите поднизи на некоја низа $\{a_n\}$ се конвергентни и имаат иста граница, тогаш и самата низа $\{a_n\}$ исто така е конвергентна со истата граница.

Доказ: Бидејќи и самата низа за себе е подниза, од условот следува дека е конвергентна со некоја граница a, па според особината 3.8 следува и доказот.

***Дефиниција* 3.11.** Бројот a се нарекува точка на натрупување за низата$\{a_n\}$, ако во која било ε-околина на точката a има бесконечно многу членови од низата.

***Пример* 3.12.** Низата $\{(-1)^n\}$ има две точки на натрупување, 1 и -1.

***Пример* 3.13.** Низата $\{\sin\frac{1}{2}n\pi\}$ има три точки на натрупување, 1, -1 и 0.

Постојат низи кои имаат и повеќе точки на натрупување. Множеството од точки на натрупување на која било низа секогаш има најголем и најмал елемент.

Од дефиницијата 3.11 е јасно дека и границата на една конвергентна низа е точка на натрупување. Да забележиме дека поимот точка на натрупување за низи не е ист со истиот поим за множество.

***Теорема* 3.3.** Секоја конвергентна низа $\{a_n\}$ има само една точка на натрупување еднаква со нејзината граница.

Доказ: Ако a е граница на низата, тогаш според дефиницијата 3.11 и геометриската интерпретација на дефиницијата за граница на низа, a е исто така и точка на натрупување за низата. Да претпоставиме дека b е друга точка на натрупување, различна од a, и да претпоставиме дека $b < a$.

Да земеме конкретна вредност $\varepsilon = \frac{1}{3}(a - b) > 0$ (ако $b > a$, се зема $\varepsilon = \frac{1}{3}(b - a)$ и понатаму доказот е ист). Тогаш во ε-околината на точката a, т.е. во интервалот $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, ќе се наоѓаат бесконечно многу членови на низата, а надвор конечно многу (бидејќи a е граница). Тоа значи дека во интервалот $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$, т.е. во ε-околината на точката b, ќе има конечно многу членови на низата, што е во спротивност со претпоставката точката b да е точка на натрупување. Според тоа, не постои друга точка на натрупување освен границата a.

Обратното не мора да важи. Ако една низа има само една точка на натрупување, не мора да е и конвергентна.

***Пример* 3.14.** Низата со општ член

$$a_n = n + (-1)^n \cdot n + \frac{1}{n}$$

има само една точка на натрупување 0, но не е конвергентна .

***Дефиниција* 3.12.** Најголемата (најмалата) точка на натрупување на една низа се нарекува горна (долна) граница или лимес супериор (инфериор) и се означува

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \qquad (\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n)$$

или

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \qquad (\liminf_{n\to\infty} a_n).$$

Секогаш

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

и равенството важи за конвергентните низи.

***Дефиниција* 3.13.** Системот од бројни отсечки (сегменти)

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], ..., [a_n, b_n], ...,$$

кај кои важи

$$a_1 \leq a_2 \leq .... \leq a_n \leq ... \leq b_n \leq ... \leq b_2 \leq b_1,$$

се нарекува систем од вложени отсечки со ознака $\{[a_n, b_n]\}$. Отсечка или сегмент е всушност множество реални броеви дефинирано со

$$\{x |\ a \leq x \leq b\} = [a, b].$$

***Дефиниција* 3.14.** Нека е даден систем вложени отсечки $\{[a_n, b_n]\}$ (не е бројна низа). Реалниот позитивен број $b_n - a_n$ се нарекува должина на сегментот $[a_n, b_n]$. Ако низата $\{b_n - a_n\}$е нула-низа, тогаш велиме дека системот $\{[a_n, b_n]\}$ е фундаментален систем.

***Теорема* 3.4. (Болцано-Вајерштрас).** Од која било ограничена низа секогаш може да се издвои конвергентна подниза.

Доказ: Нека низата $\{x_n\}$ е ограничена, т.е нека постојат реални броеви a и b такви што за секој природен број n да важи

$$a \leq x_n \leq b.$$

Тогаш сите членови на низата припаѓаат на сегментот $[a, b]$.

Да го поделиме сегментот на два нови сегмента

$$[a, \frac{1}{2}(a+b)] \qquad \text{и} \qquad [\frac{1}{2}(a+b), b].$$

Тогаш барем едниот ќе содржи бесконечно многу членови од низата (ако не, тогаш двата би содржеле конечно многу, што е контрадикција). Нека сегментот кој содржи бесконечно многу членови го означиме со $[a_1, b_1]$ кој е подмножество од сегментот $[a, b]$. Продолжувајќи го тој процес, ќе добиеме низа од вложени сегменти

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ..... \supset [a_k, b_k] ...,$$

чија должина е

$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b - a),$$

во согласност со самата конструкција. Ако должините се земат како низа

$$\{\frac{1}{2^k}(b - a)\},$$

тогаш забележуваме дека таа низа е конвергентна со граница 0 (според специјалната низа 3 и теоремата 3.1).

Нека понатаму од секој таков сегмент $[a_k, b_k]$ избереме по еден член на низата $\{x_n\}$ и го означиме со x_{n_k} според индексот на сегментот од кој е избран. Таков избор е можен бидејќи според конструкцијата во сите така добиени сегменти има бесконечно многу членови од низата $\{x_n\}$. Низата $\{x_{n_k}\}$ добиена на тој начин е подниза на низата $\{x_n\}$ и го има својството

$$a_k \le x_{n_k} \le b_k \text{ за } k \in N.$$

Од друга страна, низата $\{a_k\}$, формирана од левите краеви на вложените сегменти $[a_k, b_k]$, е конвергентна според теоремата 3.2, бидејќи е монотоно растечка и ограничена одгоре (на пример со b). Исто така и низата $\{b_k\}$ од десните краеви на вложените сегменти $[a_k, b_k]$ е конвергентна според теоремата 3.2, бидејќи е монотоно опаѓачка и ограничена оддолу (на пример со a). Во согласност со конструкцијата, за секој природен број k важи

$$b_k = a_k + \frac{1}{2^k}(b - a),$$

па според теоремата 3.1 и специјалната низа 3 следува дека низите $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ имаат иста граница која ќе ја означиме со c. Од својството пак на поднизата $\{x_{n_k}\}$, конструирана погоре, според особината 3.5 ќе следува дека и поднизата е конвергентна со истата граница c. Според тоа, со егзистенцијата на конвергентната подниза $\{x_{n_k}\}$ доказот е завршен.

Да забележиме дека не мора броевите a_k и b_k да се и членови на низата $\{x_n\}$.

Во согласност со оваа теорема може да се искаже и друга дефиниција за точка на натрупување.

***Дефиниција* 3.11*.** Точката a се нарекува точка на натрупување за низата $\{a_n\}$ ако од неа може да се издвои подниза која е конвергентна со граница a.

Според тоа, теоремата 3.4 на Болцано-Вајерштрас може да се преформулира со текст: Секоја ограничена низа има барем една точка на натрупување.

3.6. ФУНДАМЕНТАЛНИ (КОШИЕВИ) НИЗИ. АКСИОМА НА КАНТОР

***Дефиниција* 3.15.** За низата $\{a_n\}$ велиме дека е Кошиева (фундаментална) ако за кој било позитивен реален број ε може да се најде природен број $n_0(\varepsilon)$, така што за сите природни броеви $n, m > n_0$ да важи неравенството

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Оваа дефиниција ја има и следната формулација:

***Дефиниција* 3.15*.** За низата $\{a_n\}$ велиме дека е Кошиева (фундаментална) ако за кој било позитивен реален број ε може да се најде природен број $n_0(\varepsilon)$, така што за секој природен број $n > n_0$ и за кој било природен број p да важи неравенството

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

(ако се стави $m = n + p$, ќе се добие дефиницијата 3.15).

***Теорема* 3.5.** Низата $\{a_n\}$ е Кошиева ако и само ако е конвергентна во R.

Доказ: Нека низата $\{a_n\}$ е конвергентна во R со граница a. Тогаш за секој позитивен реален број ε сигурно ќе постои природен број $n_0(\varepsilon)$, така што за секој природен број $n > n_0$ и кој било природен број p ќе важат неравенствата

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{и} \qquad |a_{n+p} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ (\text{бидејќи } n + p > n > n_0).$$

Значи, за секој природен број $n > n_0$ и за кој било природен број p ќе важи неравенството

$$|a_{n+p} - a_n| = |a_{n+p} - a + a - a_n| < |a_{n+p} - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

што значи дека низата е Кошиева.

Обратно, нека низата $\{a_n\}$ е Кошиева. Тогаш за конкретна вредност $\varepsilon = 1$ ќе постои природен број n_0, така што за секој природен број $n > n_0$ и за кој било природен број p ќе важи неравенството

$$|a_{n+p} - a_n| < 1.$$

Ако се земе конкретен индекс $n_0 + 2$ место индексот $n + p$ (при што $p = 1$ и $n = n_0 + 1 > n_0$), последното неравенство ќе важи за секој природен број $n > n_0$ во вид:

$$|a_{n_0+2} - a_n| < 1,$$

од каде што се добиваат и неравенствата

$$a_{n_0+2} - 1 < a_n < a_{n_0+2} + 1,$$

што значи дека низата е ограничена.

Според теоремата 3.4 и дефиницијата 3.11* низата $\{a_n\}$ има барем една точка на натрупување и останува уште да се покаже дека таа точка е единствена.

Да претпоставиме дека постојат две различни точки на натрупување a и b и да земеме конкретно

$$\varepsilon = \frac{1}{3}|b - a|.$$

Тогаш во ε-околината на точките a и b ќе има бесконечно многу членови од низата. Според тоа, ќе постои природен број $n_0(\varepsilon)$, така што за секој природен број $n > n_0$ и кој било природен број p,

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \qquad \text{и} \qquad a_{n+p} \in (b - \varepsilon, b + \varepsilon),$$

од каде што се добива

$$\varepsilon = 3\varepsilon - 2\varepsilon = |b - a| - 2\varepsilon < |b - a - 2\varepsilon| = |(b - \varepsilon) - (a + \varepsilon)| < |a_{n+p} - a_n|.$$

Последното неравенство противречи на претпоставката дека низата $\{a_n\}$ е Кошиева, со што доказот е завршен.

Да забележиме дека кај Кошиевата низа е карактеристично тоа што не мора да се знае границата на низата.

***Пример* 3.15.** Нека е дадена низа со општ член

$$a_n = \frac{1}{n}.$$

Оваа низа е Кошиева низа во множеството

$$A = (0, 1] \subset R,$$

но не е конвергентна во A, бидејќи нејзината граница 0 не му припаѓа на множеството A.

***Пример* 3.16.** Нека е дадена низа $\{a_n\}$ со општ член

$$a_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n, \quad 0 < q < 1.$$

Да се испита нејзината конвергенција во R.

Решение: За сите природни броеви n и p ќе важи неравенството

$$|a_{n+p} - a_n| = q^{n+1} + q^{n+2} + ... + q^{n+p} = \frac{1}{1-q}(q^{n+1} - q^{n+1+p}) < \frac{1}{1-q}q^{n+1}.$$

Нека ε е произволен позитивен реален број. Од конвергенцијата на специјалната низа $\{q^n\}$ (за $0 < q < 1$) за $\varepsilon_1 = \varepsilon(1 - q) > 0$ ќе постои природен број n_0, така што за секој природен број $n > n_0$ ќе важи

$$|q^{n+1} - 0| = q^{n+1} < \varepsilon(1 - q).$$

Според тоа, и за секој природен број $n > n_0$ и секој природен број p ќе важи неравенството

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon(1 - q)\frac{1}{1-q} = \varepsilon,$$

со што покажавме дека низата е Кошиева, односно според теоремата 3.5 таа е конвергентна во R.

***Пример* 3.17.** Нека е дадена низата $\{a_n\}$ со општ член

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}.$$

Да се испита нејзината конвергенција во R.

Решение: Нека $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $p = n$.

Тогаш за секој природен број n важи неравенството

$$|a_{n+p} - a_n| = |a_{2n} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Значи, за конкретна вредност на ε не постои природен број кој би ги задоволил барањата за Кошиева низа, па според тоа оваа низа не е конвергентна .

Во доказот на теоремата 3.2 за монотони и ограничени низи беше користена аксиомата VI за непрекинатост. Во теоријата се покажува дека теоремата 3.2 е еквивалентна на аксиомата VI за непрекинатост. Освен теоремата за Дедекиндови пресеци постои уште една теорема која е еквивалентна со аксиомата VI за непрекинатост, а тоа е теоремата на Кантор за вложени отсечки.

***Теорема* 3.6.** (Принцип на вложени отсечки – аксиома на Кантор.) За секој систем вложени отсечки постои барем еден реален број кој им припаѓа на сите отсечки.

Ќе ја наведеме уште и следната теорема:

***Теорема* 3.7.** За секој фундаментален систем вложени отсечки постои единствен реален број кој им припаѓа на сите отсечки.

Доказ: Нека $\{[a_n, b_n]\}$ е фундаментален систем вложени отсечки. Според дел од доказот на теоремата 3.4 низите $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ се конвергентни со иста граница c. Ќе докажеме уште дека c е бараниот реален број кој им припаѓа на сите отсечки.

Да претпоставиме обратно, т.е. нека постои сегмент

$$[a_{n_0}, b_{n_0}]$$

таков што

$$c \notin [a_{n_0}, b_{n_0}].$$

Тогаш $c < a_{n_0}$ или $c > b_{n_0}$, што е противречно на доказот дека c е граница на монотоно растечката низа $\{a_n\}$, односно монотоно опаѓачката низа $\{b_n\}$, во согласност со теоремата 3.2. Единственоста на бројот c следува од единственоста на границата на конвергентните низи $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

***Пример* 3.18.** Да се покаже дека секој реален број е граница на монотоно растечка (опаѓачка) низа од рационални броеви.

Решение: Нека x е реален број. Според Архимедовата аксиома постои цел број k за кој важат неравенствата

$$k < x < k + 1.$$

Сегментот $[k, k + 1]$ го делиме на два по должина еднакви сегменти:

$$[k, k + \frac{1}{2}] \qquad \text{и} \qquad [k + \frac{1}{2}, k + 1].$$

Ако x припаѓа на $[k, k + \frac{1}{2}]$, тогаш ставаме $r_1 = k$, $q_1 = k + \frac{1}{2}$, а во другиот случај ставаме $r_1 = k + \frac{1}{2}$, $q_1 = k + 1$. И во двата случаја должината на сегментот $[r_1, q_1]$ ќе биде $\frac{1}{2}$. Продолжувајќи ја оваа постапка, ќе добиеме фундаментална низа од вложени сегменти (отсечки) $\{[r_n, q_n]\}$, $r_n, q_n \in Q$, со соодветни должини $\frac{1}{2^n}$, при што, според конструкцијата, x ќе припаѓа на секој од нив.

Значи, добивме низа $\{r_n\}$ од рационални броеви за кои, според конструкцијата, за секој природен број n ќе важи неравенството

$$r_n < x \qquad \text{и} \qquad r_n < r_{n+1}.$$

Според тоа, така добиената низа е монотоно растечка и ограничена одгоре, па според теоремата 3.2 е конвергентна.

Втората добиена низа $\{q_n\}$ е монотоно опаѓачка и ограничена оддолу ($x < q_n$, $q_{n+1} < q_n$), што значи дека според теоремата 3.2 исто така е конвергентна.

Од друга страна, за секој природен број n важи неравенството

$$0 < x - r_n < q_n - r_n = \frac{1}{2^n}$$

и неравенството

$$0 < q_n - x < q_n - r_n = \frac{1}{2^n}$$

и според особина 3.5 низите

$$\{x - r_n\} \qquad \text{и} \qquad \{q_n - x\}$$

се нула-низи од каде се добива бараното тврдење.

***Пример* 3.19.** Да се покаже дека секој реален број е граница на низа од ирационални броеви.

Решение: Нека x е реален број. Ако x е ирационален број, тогаш бараната низа е константа-низа $\{x\}$. Ако x е рационален број, тогаш формираме низа со општ член

$$a_n = x + \frac{1}{n}\sqrt{2}$$

која според соодветните особини и теореми е конвергентна со граница реалниот број x и со членови ирационални броеви.

Да се вратиме на низата од природни броеви

$$m_0, m_1, m_2, ..., m_k, \ m_{k+1}, \dots ,$$

дефинирана кај реалните броеви, чии членови ги имаат следните особини:

$$0 \le m_{k+1} < 10^{k+1}[a - m_0 - \frac{m_1}{10} - \frac{m_2}{10^2} - ... - \frac{m_k}{10^k}] \le m_{k+1} + 1,$$

$$0 \le m_i < 10, \ i = 1, 2, ..., k + 1, \qquad a > m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10^2} + ... + \frac{m_k}{10^k},$$

за секој природен број k.

Нека сега дефинираме низа од рационални броеви со општ член

$$a_n = m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10^2} + ... + \frac{m_n}{10^n}.$$

Според горенаведените особини оваа низа монотоно расте ($0 \le m_i$), ограничена е од горе (со бројот a) и при тоа важи неравенството

$$0 < a - [m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10^2} + ... + \frac{m_n}{10^n}] < \frac{m_{n+1}+1}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^n}.$$

Според теоремата 3.2 така дефинираната низа е конвергентна.

Според особината 3.5 низата

$$\{a - [m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10^2} + ... + \frac{m_n}{10^n}]\}$$

е нула-низа (низата $\{\frac{1}{10^n}\}$ е нула-низа според специјалната низа 3), па според теоремата 3.1 го добиваме заклучокот дека низата $\{a_n\}$ за граница го има реалниот број a .

Всушност сме покажале дека за секој реален број a постои монотоно растечка низа од рационални броеви $\{a_n\}$ (а и низа од природни броеви $\{m_n\}$), добиени според претходно наведениот алгоритам, чија граница е самиот реален број a. Притоа се добива децимален запис на реалниот број (децимален број), со забелешка дека е можно по конечен број чекори члeновите на низата да бидат нула.

§4. РЕАЛНА ФУНКЦИЈА ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

4.1. ОСНОВНИ ПОИМИ И ДЕФИНИЦИИ

До поимот функција може да се дојде изучувајќи ги односите меѓу различни големини при некои појави во природата во кои е доста честа (скоро неминовна) таа меѓузависност. Притоа се среќаваме со големини кои се менуваат во текот на разгледуваниот процес. На пример, во геометријата е познато дека плоштината на квадрат со страна чија должина е a е a^2 и е јасно дека квадрати со поголеми страни имаат и поголема плоштина. Значи, можеме да заклучиме дека плоштината се менува со промена на должината на страната, што значи дека плоштината зависи од должината на страната.

Поимот функција зазема едно од централните места во математиката (но и во други области), а реалните функции од една реална променлива се само еден специјален случај. Да забележиме дека поимот променлива е различен од поимот непозната големина како што е, на пример, кај равенките.

***Дефиниција* 4.1.** Нека A и B се две дадени множества. Ако на секој елемент од A, според некој пропис (закон, правило) еднозначно му е придружен определен елемент од B, тогаш велиме дека е дефинирана функција од A во B.

Со множествата A и B и со правилото велиме дека е зададена функција со ознака f (други ознаки $g, h, F, G, ...$). Притоа пишуваме $f : A \to B$, при што ако на елементот $x \in A$ му е придружен елементот $y \in B$, пишуваме $y = f(x)$. Елементот y се нарекува зависно променлива или слика, а елементот x се нарекува независно променлива или аргумент (оригинал). Понекогаш за $f(x)$ се вели дека е вредност на функцијата f во точката x. За множеството A велиме дека е дефинициона област (домен), а за множеството

$$\{f(x) \mid x \in A\} = f(A) \subseteq B$$

велиме дека е множество вредности (кодомен).

***Дефиниција* 4.2.** Нека $A, B \subseteq R$. Ако е зададена функцијата $f : A \to B$ тогаш велиме дека е зададена реална функција од една реална променлива.

Понекогаш наместо ознака f за функција се користи и ознаката $y = f(x)$, со што покрај ознаката за функцијата се дадени и ознаките за независно и зависно променливите. Правилото според кое е зададена функцијата може да се искаже на повеќе начини, и тоа текстуален (описен), табеларен, аналитички (со формула), графички и др.

Да забележиме дека со формулите

$$f(x) = x^2, \qquad f(y) = y^2, \qquad f(z) = z^2$$

е дефинирана една иста функција.

Понатаму, наместо реална функција од една реална променлива ќе го користиме терминот функција од една променлива.

Во доказите ќе ја користиме и следната формулација за дефиниција на функција:

***Дефиниција* 4.1**.* Нека A и B се две дадени множества. Ако за кои било

$$x_1,\ x_2 \in A$$

важи импликацијата

$$x_1 = x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) = f(x_2),$$

односно импликацијата

$$f(x_1) \neq f(x_2) \ \Rightarrow\ x_1 \neq x_2,$$

при што

$$f(x_1), f(x_2) \in B$$

се елементи кои според некој пропис (закон, правило) се придружени на елементите

$$x_1, x_2 \in A$$

соодветно, тогаш велиме дека е дефинирана функција од A во B.

***Дефиниција* 4.3.** Нека е дадена функција f со дефинициона област $D_f \subseteq R$. Множеството од подредени парови $\{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$, со ознака G_f, се нарекува график на функцијата f.

Геометриски гледано само за некои класи функции графикот претставува подмножество точки (крива) од рамнината во која е даден координатен систем.

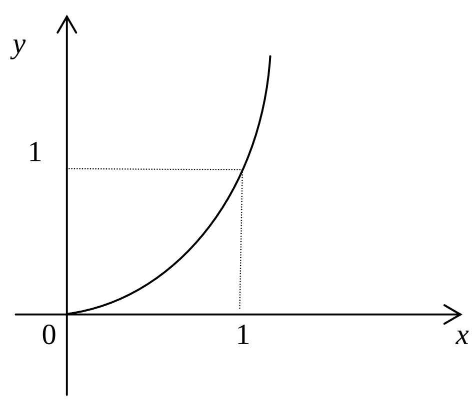
***Пример* 4.1.** Функцијата со која е дадена функционалната зависност на површината на квадрат од должината на неговата страна ќе биде дадена аналитички со формулата

$$f(x) = x^2.$$

Во конкретниот случај дефиниционата област ке биде интервалот $[0, +\infty)$, а кодоменот интервалот $[0, +\infty)$. Нејзиниот график

$$G_f = \{(x, x^2) \mid x \in [0, +\infty)\}$$

геометриски е даден на цртежот 4.



Цртеж 4

Да забележиме дека формулата со која аналитички е зададена оваа функција дозволува нејзината дефинициона област да биде R. Самата природа на проблемот (должина на отсечка е позитивен реален број) ја ограничува нејзината дефинициона област.

***Пример* 4.2.** Функцијата дадена аналитички со формулите:

$$f(x) = 0, \quad \text{за } x \in I,$$

и

$$f(x) = 1, \quad \text{за } x \in Q \quad \text{(функција на Дирихле)},$$

е дефинирана на множеството R, но нејзиниот график не може геометриски да се престави. Притоа

$$f(R) = \{0, 1\}$$

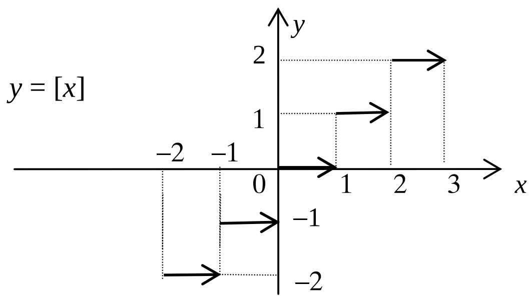
и

$$G_f = \{(x, 0) \mid x \in I\} \cup \{(x, 1) \mid x \in Q\}.$$

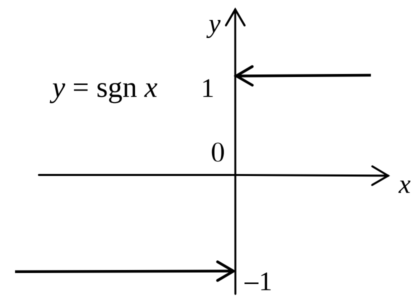
***Пример* 4.3.** Функцијата зададена со формулата

$$f(x) = [x]$$

(наречена цел дел од x) има дефинициона област R, додека кодоменот е множеството Z, а графикот геометриски е даден на цртежот 5. Вредноста на оваа функција во точката x е најголемиот цел број помал од x.



Цртеж 5



Цртеж 6

***Пример* 4.4.** Функцијата

$f(x) = 1$, за $x > 0$; $f(0) = 0$; $f(x) = -1$, за $x < 0$, или $f(x) = \mathrm{sgn}x$

(наречена сигнум од x), има дефинициона област R, кодомен множеството $\{-1, 0, 1\}$, а графикот геометриски е даден на цртежот 6.

***Дефиниција* 4.4**. Нека се дадени две функции f и g со дефинициони области E_1 и E_2, соодветно. Функциите f и g се еднакви на множеството E ако

$$E_1 \equiv E_2 \equiv E$$

или

$$E_1 \cap E_2 \equiv E$$

и ако

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x).$$

Дефиниција* 4.4. Две функции f и g се еднакви ако се еднакви нивните графици како множества.

***Пример* 4.5.** Функциите

$$f : x \to x \qquad \text{и} \qquad g : x \to \frac{x^2}{x}$$

не се еднакви, бидејќи $x = 0$ не □ припаѓа на дефинициoната област на функцијата g, т.е. точката (0, 0) припаѓа на G_f, но не припаѓа на G_g. Тие сепак се еднакви на множеството $R\backslash\{0\}$.

4.2. ЗБИР-ФУНКЦИЈА, РАЗЛИКА-ФУНКЦИЈА, ПРОИЗВОД-ФУНКЦИЈА И КОЛИЧНИК-ФУНКЦИЈА. СЛОЖЕНА ФУНКЦИЈА

***Дефиниција* 4.5.** Нека f и g се две функции дефинирани над едно множество E. Тогаш на следниот начин со дефиниционата област E се дефинираат нови функции наречени збир-функција, разлика-функција, производ-функција и количник-функција:

$$f \pm g : x \to f(x) \pm g(x);$$

$$f \cdot g : x \to f(x) \cdot g(x);$$

$$\frac{f}{g} : x \to \frac{f(x)}{g(x)},$$

или

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x);$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x);$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

при што за количник-функцијата е потребно да се претпостави функцијата g да ја има особината за секое $x \in E$ да важи $g(x) \neq 0$.

***Дефиниција* 4.6.** Нека е дадена функција f со дефинициона област D_f и $F = f(D_f)$ нека е нејзин кодомен. Нека понатаму е дадена функција g со дефинициона област F. Тогаш се дефинира нова функција со ознака $g \circ f$, наречена сложена функција со дефинициона област D_f, на следниот начин:

$$g \circ f : x \to g(f(x))$$

или

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

***Пример* 4.6.** Нека

$$f(x) = x^2 \qquad \text{и} \qquad g(x) = 5x + 4$$

се две функции дефинирани на R. Тогаш

$$g \circ f : x \xrightarrow{(f)} x^2 \xrightarrow{(g)} 5x^2 + 4,$$

односно

$$(g \circ f)(x) = 5x^2 + 4 \qquad (g(f(x)) = g(x^2) = 5x^2 + 4).$$

Бидејќи

$$f(R) = R,$$

можеме да разгледаме и друга сложена функција $f \circ g$ која ќе биде зададена со

$$f \circ g : x \xrightarrow{(g)} 5x + 4 \xrightarrow{(f)} (5x + 4)^2,$$

т.е.

$$(f \circ g)(x) = (5x + 4)^2.$$

Очевидно дека и ова е пример од кој може да се заклучи дека во општ случај

$$f \circ g \neq g \circ f$$

(не важи комутативен закон), додека во општ случај може да се докаже дека за три дадени функции f, g и h важи

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) \text{ (асоцијативен закон).}$$

4.3. ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА

***Дефиниција* 4.7.** Нека е дадена функција f со дефинициона област D_f, при што според дефиницијата 4.1 за

$$\forall x \in D_f$$

постои еднозначно определен број $y \in f(D_f)$, така што $y = f(x)$, односно за секое $x_1, x_2 \in D_f$ да важи импликацијата

$$x_1 = x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) = f(x_2).$$

Ако на

$$\forall y \in f(D_f)$$

му одговара единствен број $x \in D_f$ така што $y = f(x)$, тогаш велиме дека е дефинирана нова функција од множеството $f(D_f)$ во множеството D_f, наречена инверзна функција на функцијата f со ознака f^{-1}, а множеството

$$\{(f(x), x) \mid x \in D_f\}$$

е нејзин график.

Во согласност со дефиницијата 4.1* потребен и доволен услов да постои инверзната функција f^{-1} ќе биде условот за секое $x_1, x_2 \in D_f$ да важи импликацијата

$$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

или импликацијата

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2).$$

Од самата дефиниција е јасно дека дефиниционата област на инверзната функција f^{-1} е кодоменот на функцијата f, а кодоменот на инверзната функција f^{-1} е дефиниционата област на функцијата f. Исто така лесно се уочува дека за секое x од D_f

$$f^{-1} \circ f : x \to x$$

и за секое y од $f(D_f)$

$$f \circ f^{-1} : \mathrm{y} \to \mathrm{y},$$

од каде што следува и констатацијата дека инверзна функција од инверзната функција f^{-1} на некоја функција f е самата таа функција f, т.е. $(f^{-1})^{-1} = f$ (се разбира, под услови за нивно постоење).

Пример 4.7. Нека е дадена функција

$$f(x) = 2x + 1,$$

со $D_f = R$ и кодомен R. Да се најде инверзната функција f^{-1}.

Решение: Од равенката

$$y = 2x + 1$$

следува

$$x = \frac{1}{2}(y - 1),$$

така што f^{-1} ќе биде дадена со формулата

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 1),$$

т.е. со формулата

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 1).$$

Притоа функцијата f сигурно има своја инверзна функција, што може лесно да се покаже ($x_1 \neq x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 \neq 2x_2 + 1$).

***Теорема* 4.1.** Нека е дадена функција f со дефинициона област D_f и нека постои нејзината инверзна функција

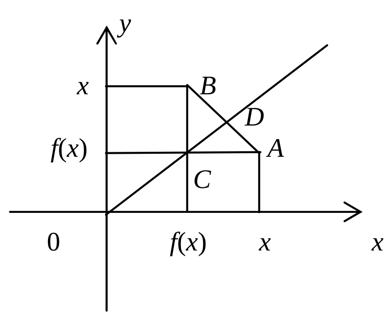
$$g = f^{-1}.$$

Ако графикот на функцијата f може геометриски да се интерпретира, тогаш графикот на функцијата f^{-1} е симетричен со графикот на фунцијата f во однос на симетралата $y = x$ на I и III квадрант во правоаголниот координатен систем .

Доказ: Нека

$$A(x, f(x)) \in G_f, \quad B(f(x), x) \in G_g$$

се две точки од графиците на функциите f и $g = f^{-1}$ за една иста вредност $x \in D_f$. Го формираме триаголникот ABC каде што $C(f(x), f(x))$ е точка од симетралата $y = x$ (цртеж 7).



Цртеж 7

Бидејќи

$$\overline{AC} = \overline{BC} = x - f(x) \quad \text{и} \quad \angle C = 90^0,$$

триаголникот ABC е рамнокрак правоаголен триаголник, од каде следува дека

$$\overline{AD} = \overline{BD},$$

што значи дека точките A и B се симетрични во однос на симетралата $y = x$ на I и III квадрант во правоаголниот координатен систем .

Според оваа теорема е јасна и конструкцијата на графикот на инверзна функција со помош на графикот на дадена функција.

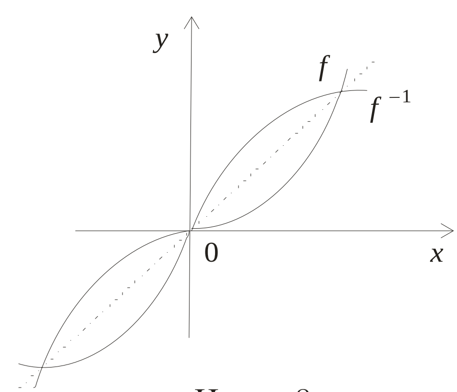
***Пример* 4.8.** Нека е дадена функција

$$f(x) = x^3, \qquad D_f = R.$$

Нејзината инверзна функција f^{-1} е дадена со формулата

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

и нивните графици се дадени на цртежот 8.



Цртеж 8

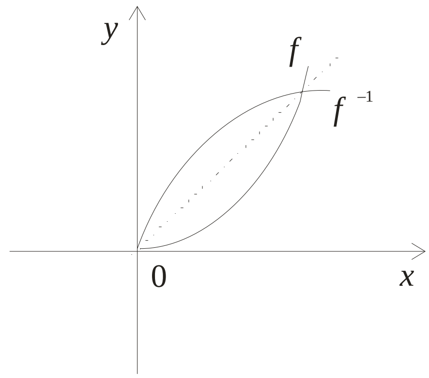
***Пример* 4.9.** Нека е дадена функција

$$f(x) = x^2$$

и дефинициона област $E = [0, +\infty)$. Нејзината инверзна функција f^{-1} е дадена со формулата

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

и нивните графици се дадени на цртежот 9.

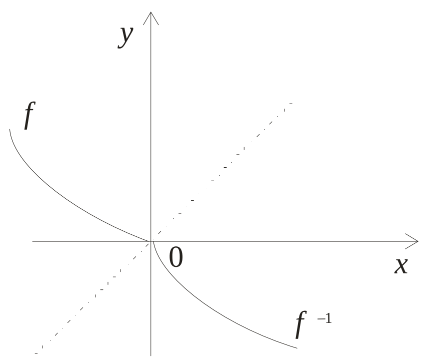


Цртеж 9

За функцијата f дадена со истата формула, но со друга дефинициона област $E = (-\infty, 0]$, соодветната инверзна функција f^{-1} е дадена со формулата

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

и нивните графици се дадени на цртежот 10.



Цртеж 10

Да забележиме дека функција дадена со истата формула и со дефинициона област R нема своја инверзна функција, што значи дека поимот за инверзна функција е поврзан и со соодветна дефинициона област или подмножество од неа.

4.4. ПАРНИ И НЕПАРНИ ФУНКЦИИ. ПЕРИОДИЧНА ФУНКЦИЈА. МОНОТОНИ ФУНКЦИИ

***Дефиниција* 4.8.** Нека е дадена функција f со дефинициона област D_f која има особина ако

$$x \in D_f,$$

тогаш и

$$-x \in D_f.$$

За функцијата f велиме дека е парна (непарна) ако за

$$\forall x \in D_f$$

важи

$$f(x) = f(-x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Според самата дефиниција графикот на парна (непарна) функција геометриски гледано е симетричен во однос на оската y (координатниот почеток). Тоа следува од симетричноста на точките

$$M(x,\ f(x)) \qquad \text{и} \qquad N(-x,\ f(x))$$

$$(M(x,\ f(x)) \qquad \text{и} \qquad N(-x, -f(x))).$$

***Дефиниција* 4.9.** Нека е дадена функција f со дефинициона област D_f. Ако постои реален број ω, различен од 0, така што за

$$\forall x \in D_f$$

да важи

$$f(x + \omega) = f(x),$$

тогаш велиме дека функцијата f е периодична. Притоа D_f мора да ја има особината ако

$$x \in D_f,$$

тогаш

$$x + \omega \in D_f.$$

Ако $T \neq 0$ ($T > 0$) е најмалиот од сите оние позитивни реални броеви ω со особина

$$f(x + \omega) = f(x)$$

(ако постои најмал позитивен број на тоа множество), тогаш T се вика период (некаде основен период) на периодичната функција f.

Од самата дефиниција е јасно дека за графикот на периодична функција со период T е доволно геометриски да се скицира на сегментот $[0, T]$, а потоа периодично се повторува.

***Дефиниција* 4.10.** За функцијата f, дефинирана на D_f, велиме дека е монотоно растечка (опаѓачка) на множеството D_f (може и на подмножество од D_f) ако за секои

$$x_1, x_2 \in D_f$$

(односно од соодветното подмножество) за кои $x_1 < x_2$ важи

$$f(x_1) \leq f(x_2) \qquad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Понекогаш се вели дека функцијата со оваа особина не опаѓа (не расте) на множеството D_f. Ако важи строго неравенство, тогаш за функцијата се вели дека строго монотоно расте (строго монотоно опаѓа).

***Пример* 4.10.** Функцијата

$$f(x) = x^3$$

на множеството R строго монотоно расте, бидејки ако е

$$x_1 < x_2,$$

тогаш

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0,$$

односно

$$f(x_1) < f(x_2) .$$

***Теорема* 4.2.** Нека е дадена функција f, дефинирана на D_f, која е строго монотоно растечка на D_f и нека

$$F = f(D_f).$$

Тогаш функцијата f има инверзна функција f^{-1} дефинирана на F, која е строго монотоно растечка на F.

Доказ: Бидејки според условот f е строго монотоно растечка, за секое

$$x_1, x_2 \in D_f,$$

ќе важи импликацијата

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Нека $x_1 \neq x_2$, што значи $x_1 < x_2$ или $x_1 > x_2$.

Тогаш ќе важи

$$f(x_1) < f(x_2)$$

или

$$f(x_1) > f(x_2)$$

(од строгата монотоност на f), што значи

$$f(x_1) \neq f(x_2),$$

со што е докажана егзистенцијата на инверзната функција f^{-1}.

Понатаму, нека $y_1, y_2 \in F$ и нека $y_1 < y_2$.

Тогаш за $y_1 \in F$ постои единствен број $x_1 \in D_f$, така што $y_1 = f(x_1)$ (бидејќи f е функција).

Исто така и за

$$y_2 \in F$$

ќе постои единствен број x_2 така што $y_2 = f(x_2)$.

Да претпоставиме

$$x_1 \geq x_2.$$

Од строгата монотоност на f добиваме дека $f(x_1) \geq f(x_2)$, што значи дека $y_1 \geq y_2$, што е во спротивност со претпоставката $y_1 < y_2$.

Значи, од

$$y_1 < y_2 \Rightarrow x_1 < x_2$$

односно

$$f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

со што покажавме дека f^{-1} е строго монотоно растечка функција на F.

Оваа теорема може да се користи и како критериум за егзистенција на инверзна функција (како во примерот 4.9). Да забележиме дека поимот инверзна функција е врзан за множество (да се види истиот пример 4.9).

4.5. ОГРАНИЧЕНОСТ НА ФУНКЦИИ. ЛОКАЛНИ И ГЛОБАЛНИ ЕКСТРЕМИ. ИМПЛИЦИТНО И ПАРАМЕТРИСКИ ЗАДАДЕНИ ФУНКЦИИ

***Дефиниција* 4.11.** За функцијата f, дефинирана на D_f, велиме дека е ограничена ако е ограничено множеството $f(D_f)$, односно ако постојат реални броеви m и M така што за секој елемент

$$y \in f(D_f)$$

да важи неравенството

$$m < y < M.$$

Геометриски графикот на ограничена функција се наоѓа меѓу две хоризонтални прави

$$y = m, \qquad y = M,$$

при што $\forall x \in D_f$ важи $m \leq f(x) \leq M$.

***Дефиниција* 4.12.** Нека е дадена функција f дефинирана на D_f. Ако постои број

$$x_0 \in D_f \ \ (x_1 \in D_f),$$

така што

$$\inf\ f(D_f) = f(x_0) \quad (\sup\ f(D_f) = f(x_1)),$$

тогаш бројот $f(x_0)$ $(f(x_1))$ се нарекува најмала (најголема) вредност на f во областа на D_f .

Броевите $f(x_0)$ и $f(x_1)$ (ако постојат) се викаат екстремни вредности на функцијата f во областа D_f (глобални екстреми).

***Дефиниција* 4.13.** Нека е дадена функција f дефинирана на D_f. Ако постои $\delta > 0$ така што $f(c)$ да биде единствена најголема (најмала) вредност на функцијата f на множеството

$$(c - \delta, c + \delta) \cap D_f,$$

или со други зборови ако за

$$\forall x \in (c - \delta, c + \delta) \cap D_f$$

важи

$$f(x) \leq f(c) \quad (f(x) \geq f(c)),$$

тогаш велиме дека бројот $f(c)$ е локален максимум (минимум) на функцијата f. Бројот $f(c)$, ако постои, се вика локален екстрем за функцијата f.

Да забележиме дека секој глобален екстрем е и локален, додека обратното не мора да важи.

Во некои случаи функцијата f со график

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$$

може да биде зададена со равенката

$$F(x, y) = 0,$$

каде $y = f(x)$.
Тогаш велиме дека функцијата f е зададена имплицитно (во скриен вид) за разлика од експлицитно (јавно) зададена со формулата

$$y = f(x).$$

Јасно е дека равенката

$$F(x, y) = 0$$

ја задоволуваат множеството парови (x, y) кое не е помало од G_f, бидејќи, например, можат да постојат повеќе вредности y кои одговараат на една иста вредност x, така што за нив да важи

$$F(x, y) \equiv 0.$$

Според тоа, со равенката $F(x, y) = 0$ можат да бидат дефинирани и повеќе функции.

***Пример* 4.11.** Со равенката

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

се зададени повеќе функции од кои ќе наведеме само три. Тоа се функциите:

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2},$$

со $D_f = [-1, 1]$ и график даден на цртежот 11;

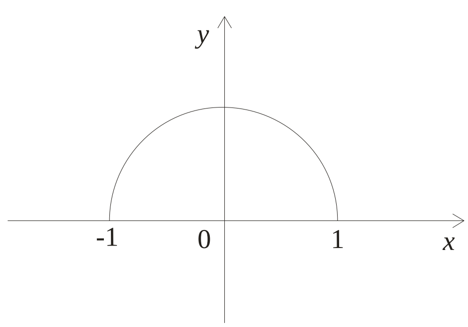
$$g(x) = -\sqrt{1 - x^2},$$

со $D_g = [-1, 1]$ и график даден на цртежот 12;

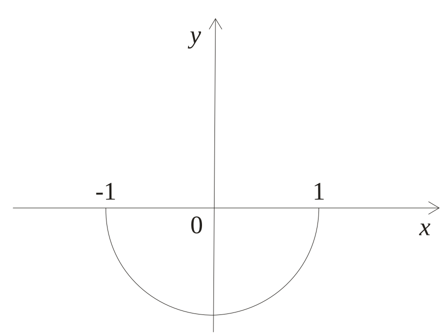
$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, x \in R \\ -\sqrt{1 - x^2}, x \in I \end{cases},$$

со $D_F = [-1, 1]$.

Дали постојат и други функции?



Цртеж 11



Цртеж 12

Честопати една функција

$$f : x \to f(x) = y,$$

дефинирана на D_f, може да биде зададена во параметарски вид. Притоа и независно променливата x и зависно променливата y се дадени со функционална зависност од некоја трета променлива t наречена параметар. Ако тие две зависности се дефинирани преку нови функции φ и ψ, тогаш равенките на функцијата f ќе бидат запишани со

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

(параметарски равенки). Функциите φ и ψ се дефинирани на некое множество T, при што за секое $t \in T$ важи $(\varphi(t), \psi(t)) \in G_f$. Притоа е потребно функцијата φ да има инверзна функција на T, бидејќи всушност f е сложена функција $\psi \circ \varphi^{-1}$

$$(y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = (\psi \circ \varphi^{-1})(x) = f(x)).$$

Ваков начин на претставување често се користи во техниката каде параметарот t е времето.

***Пример* 4.12.** Функцијата

$$f(x) = \tfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,, \quad a > 0,\ b > 0,$$

дефинирана на сегментот $[-a, a]$, може да се зададе и со параметарските равенки

$$x = a \cdot \cos t, \quad y = b \cdot \sin t, \ \text{ за } \ t \in [0, \pi],$$

при што $y = f(x)$.

§5. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ НА РЕАЛНА ФУНКЦИЈА ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

5.1. ГРАНИЧНА ВРЕДНОСТ (ПОИМ, ДЕФИНИЦИЈА И ОСОБИНИ)

Граничните процеси се фундамент на природата. Со нивните математички формулации е создаден моќен математички апарат со чија помош се разрешени голем број проблеми во природните и другите науки и области. Првите чекори во таа насока се направени уште неколку века пред нашата ера. Граничните процеси отсекогаш биле предмет на опсервација и проучување од античко време сé до денес. Добро се познати парадоксите на Зенон (V век пред нашата ера) за трката на Ахил и желката и за човекот кој чекори кон ѕид со чекори еднакви на половината од неговото моментално растојание од ѕидот, како и проблемот за наоѓање плоштина на круг и периметар на кружница.

Поимот граница беше дефиниран кај низите од реални броеви. Всушност, тие низи беа дефинирани со функција која е пресликување од N во R. Сега тој поим ќе го обопштиме кај функција од една променлива.

Дефиниција **5.1** (Коши). Нека е дадена функција f со дефинициона област D_f и нека a е точка на натрупување за D_f. Конечниот реален број A се нарекува гранична вредност на функцијата f кога x се стреми кон a ако функцијата f е дефинирана во некоја околина на точката a, освен можеби во a, и ако за кој било позитивен реален број ε постои реален позитивен број $\delta(\varepsilon)$ (кој зависи од ε), така што за сите реални броеви $x \in D_f$, за кои важат неравенствата

$$0 < |x - a| < \delta,$$

да биде задоволено неравенството

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тогаш пишуваме

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

или

$$f(x) \to A \quad \text{кога} \quad x \to a.$$

Тоа всушност значи дека за секоја ε-околина $V(A, \varepsilon)$ на точката A постои δ-околина $V(a, \delta)$ на точката a, така што за сите точки $x \in D_f$, $x \neq a$, кои припаѓаат на околината $V(a, \delta)$, соодветните вредности $f(x)$ припаѓаат на околината $V(A, \varepsilon)$.

***Дефиниција* 5.2** (Хајне). Нека е дадена функција f со дефинициона област D_f и нека a е точка на натрупување за D_f. Конечниот реален број A се нарекува гранична вредност на функцијата f кога x се стреми кон a ако функцијата f е дефинирана во некоја околина на точката a, освен можеби во a, и ако за која било конвергентна низа

$$\{x_n\}, \quad x_n \in D_f, \; x_n \neq a,$$

чија граница е бројот a, соодветната низа

$$\{f(x_n)\}$$

е конвергентна со граница A.

Овој процес за наоѓање гранична вредност се нарекува граничен процес.

***Теорема* 5.1.** Дефинициите 5.1 и 5.2 се еквивалентни.

Доказ: Нека A е гранична вредност на функцијата f кога $x \to a$ според дефиницијата 5.1. Нека $\{x_n\}$ е која било конвергентна низа со граница a, при што за секој природен број n важи $x_n \neq a$ (барем една таква низа постои бидејќи f е дефинирана во некој интервал

$$(a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$$

во кој a е точка на натрупување, на пример низата

$$\{a - \frac{1}{2^n}(a - x_0)\},$$

каде што

$$x_0 \in (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)).$$

Нека ε е произволен позитивен реален број. Според дефиницијата 5.1 ќе постои позитивен реален број $\delta(\varepsilon)$, така што за сите x за кои важат неравенствата

$$0 < |x - a| < \delta$$

ќе биде задоволено неравенството

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Бидејќи според условот $\{x_n\}$ е конвергентна низа и $x_n \neq a$, за истото δ ќе постои природен број n_0, така што за сите природни броеви $n > n_0$ ќе бидат задоволени неравенствата

$$0 < |x_n - a| < \delta,$$

што пак повлекува задоволување на неравенството

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon.$$

Со тоа всушност покажавме дека низата

$$\{f(x_n)\}$$

е конвергентна со границата A, а бидејќи низата $\{x_n\}$ беше произволна, покажавме дека A е гранична вредност на функцијата f и според дефиницијата 5.2.

Нека сега A е гранична вредност на функцијата f кога $x \to a$ според дефиницијата 5.2 и нека претпоставиме дека A не е гранична вредност на функцијата f кога $x \to a$ според дефиницијата 5.1. Тоа значи дека ќе постои некој конкретен позитивен реален број ε_0, така што за секој позитивен реален број δ ќе може да се најде барем една вредност на аргументот x која ги задоволува неравенствата

$$0 < |x - a| < \delta$$

да го задоволува и неравенството

$$|f(x) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Нека за вредностите на δ ги земеме членовите на низата $\{\frac{1}{n}\}$ и нека со x_n^* ги означиме вредностите на аргументот x чија егзистенција следува од веќе направената претпоставка. Притоа за сите точки x_n^* ќе важат неравенствата

$$0 < |x_n^* - a| < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad |f(x_n^*) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Со оваа конструкција избравме една конкретна конвергентна низа

$$\{x_n^*\},$$

каде што $x_n^* \neq a$ (според неравенството $0 < |x_n^* - a|$), со граница a (според неравенството $0 < |x_n^* - a| < \frac{1}{n}$, особината 3.5 и примерите 3.6 и 3.8). Од друга страна пак, бидејќи за секој природен број n важи неравенството

$$|f(x_n^*) - A| \geq \varepsilon_0,$$

заклучуваме дека низата

$$\{f(x_n^*)\}$$

не е конвергентна низа со граница A, со што дојдовме до контрадикторност со дефиницијата 5.2. Со тоа тврдењето е докажано.

***Пример* 5.1.** Да се покаже дека функцијата

$$f(x) = x^2$$

има гранична вредност 4 кога $x \to 2$.

Решение: Нека ε е произволен позитивен реален број. Од неравенството

$$|f(x) - 4| = |x^2 - 4| = |(x - 2)^2 + 4(x - 2)| \le |x - 2|^2 + 4|x - 2| < \varepsilon$$

треба да го најдеме $\delta(\varepsilon)$ (ако постои; нешто слично со барањето $n_0(\varepsilon)$ кај низите). Од квадратната равенка

$$t^2 + 4t = \varepsilon \qquad (|x - 2| = t)$$

добиваме

$$t_{1/2} = -2 \pm \sqrt{4+\varepsilon}\,.$$

Поради ограничувањето

$$|x - 2| = t > 0,$$

останува вредноста

$$t_1 = -2 + \sqrt{4+\varepsilon}$$

како горна граница за t, така што ќе важи неравенството

$$t^2 + 4t - \varepsilon < 0$$

за сите t за кои важи $0 < t < t_1$.

Според тоа, бараната вредност за $\delta(\varepsilon)$ ќе биде t_1, така што за сите x за кои важи

$$0 < |x - 2| < \sqrt{4+\varepsilon} - 2 = \delta(\varepsilon)$$

ќе важи неравенството

$$|x - 2|^2 + 4|x - 2| < \varepsilon$$

т.е. неравенството

$$|f(x) - 4| < \varepsilon.$$

Од произволноста на бројот ε и во согласност со дефиницијата 5.1 следува дека навистина 4 е гранична вредност на функцијата $f(x) = x^2$ кога $x \to 2$.

***Пример* 5.2.** Да се покаже дека функцијата

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

нема гранична вредност кога $x \to 0$.

Решение: Формираме две конвергентни низи

$$\{\frac{1}{n\pi}\} \quad \text{и} \quad \{\frac{2}{(4n+1)\pi}\}$$

со граница 0. Соодветните низи од вредностите на функцијата ќе бидат низите

$$\{\sin n\pi\} \quad \text{и} \quad \{\sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)\},$$

односно низите

$$\{0\} \quad \text{и} \quad \{1\},$$

кои се конвергентни (константа-низи) со граници 0 и 1. Според дефиницијата 5.2 функцијата нема гранична вредност, бидејќи соодветните низи од вредности на функцијата имаат различни граници. Да забележиме уште и тоа дека 0 не припаѓа на дефинициoната област на самата функција.

***Пример* 5.3.** Да се најде граничната вредност на функцијата

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

кога $x \to 2$.

Решение: Нека ε е произволен позитивен реален број. За $x \neq 2$ од неравенството

$$|f(x) - 4| = |\frac{x^2-4}{x-2} - 4| = |x-2| < \varepsilon$$

се добива бараната вредност за $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Значи, за сите x за кои важи неравенството

$$0 < |x-2| < \delta\,(= \varepsilon)$$

ќе важи неравенството

$$|f(x) - 4| < \varepsilon$$

(тоа е всушност истото неравенство). Со тоа е покажано според дефиницијата 5.1 дека функцијата има гранична вредност 4 кога $x \to 2$. И овде да забележиме дека 2 не □ припаѓа на дефинициoната област на самата функција.

***Пример* 5.4.** Функцијата

$$f(x) = c$$

(c е константа) има гранична вредност c кога x се стреми кон која било точка од R.

Решение: Навистина, при произволно ε за $\delta(\varepsilon)$ може да се земе кој било позитивен реален број, на пример $\delta = 1$.

***Пример* 5.5.** Да се покаже дека

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

Решение: Нека ε е произволен позитивен реален број. Бидејќи

$$|\cos x - 1| = |\cos x - \cos 0| = |2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}| < 2|\frac{x}{2}| = |x|,$$

доволно е за $\delta(\varepsilon)$ да се земе $\delta = \varepsilon$, со што ќе добиеме дека за сите x за кои $|x - 0| < \delta$ ќе важи неравенството

$$|\cos x - 1| < \varepsilon.$$

***Пример* 5.6.** Да се покаже дека функцијата на Дирихле,

$$f(x) = 0 \ \text{ за } x \in I,$$

$$f(x) = 1 \ \text{ за } x \in Q,$$

нема гранична вредност кога x се стреми кон која било точка од R.

Решение: Нека $x \to a$.

Тогаш можеме да формираме две конкретни конвергентни низи $\{x_n\}$ и $\{x_n^*\}$ со иста граница a, при што за сите природни броеви n, $x_n \in I$ и $x_n^* \in Q$ (егзистенцијата на тие низи е покажана кај низите). Соодветните низи од вредности на функцијата ќе бидат низите $\{0\}$ и $\{1\}$ кои се конвергентни со граници 0 и 1. Според дефиницијата 5.2 функцијата нема гранична вредност, бидејќи соодветните низи од вредности на функцијата имаат различни граници.

***Теорема* 5.2.** Нека функцијата f има гранична вредност A кога $x \to a$ и нека $A \neq 0$. Тогаш постои $\delta > 0$, така што за сите x за кои

$$0 < |x - a| < \delta,$$

ќе важи неравенството

$$|f(x)| > \frac{1}{2}|A|.$$

Во специјален случај, ако $A > 0$, постои околина $V(a, \delta)$ така што

$$\forall x \in V(a, \delta)\setminus\{a\}$$

ќе важи

$$f(x) > \frac{1}{2}A \quad (>0),$$

а ако $A < 0$, ќе важи неравенството

$$f(x) < \frac{1}{2}A \quad (< 0).$$

Поради тоа оваа теорема се нарекува и теорема за запазување на знакот .

Доказ. Нека

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|A| > 0$$

е конкретна вредност на ε. Од егзистенцијата на граничната вредност A на функцијата f ќе постои δ, така што за сите x за кои важи

$$0 < |x - a| < \delta$$

ќе биде задоволено неравенството

$$|f(x) - A| < \frac{1}{2}|A|,$$

односно неравенствата

$$A - \frac{1}{2}|A| < f(x) < A + \frac{1}{2}|A|$$

од каде се добива и тврдењето.

***Дефиниција* 5.3.** Нека е дадена функција $y = f(x)$ дефинирана на сегментот $[a, b]$, освен можеби во точката $c \in (a, b]$ $(c \in [a, b))$. Функцијата f има во точката c лева (десна) гранична вредност A кога $x \to c - 0$ $(x \to c + 0)$ ако за произволен позитивен реален број ε постои позитивен реален број $\delta(\varepsilon)$ $(\delta_1(\varepsilon))$, така што за сите x за кои важи неравенството

$$c - \delta < x < c \quad (c < x < c + \delta_1)$$

е задоволено неравенството

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тогаш пишуваме

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = A \qquad (\lim_{x \to c+0} f(x) = A)$$

или кратко

$$f(c - 0) = A \qquad (f(c + 0) = A).$$

Притоа е битно

$$(c - \delta, c) \subseteq (a, b] \qquad ((c, c + \delta) \subseteq [a, b)),$$

а ако не е задоволен овој услов, тогаш, без да се губи од општоста, за δ (δ_1) се зема помала вредност која го задоволува и тој услов.

Оваа дефиниција може да се формулира и со помош на низи според Хајне.

***Пример* 5.7.** За функцијата $f(x) = \operatorname{sgn} x$ да се најде лева и десна гранична вредност кога $x \to 0 - 0$, односно $x \to 0 + 0$.

Решение: Всушност,

$$\text{за } x > 0 \qquad \operatorname{sgn} x = 1,$$

$$\text{за } x < 0 \qquad \operatorname{sgn} x = -1 \quad \text{и} \quad \operatorname{sgn} 0 = 0.$$

За да покажеме дека

$$f(0 + 0) = 1, \quad f(0 - 0) = -1,$$

доволно е за кој било позитивен реален број ε да се земе $\delta = 1$. Тогаш неравенството

$$|f(x) - (-1)| = |(-1) - (-1)| = 0 < \varepsilon,$$

односно неравенството

$$|f(x) - 1| = |1 - 1| = 0 < \varepsilon,$$

е задоволено за секој реален број $x < 0$ односно $x > 0$, па и за сите x за кои важи $-1 < x < 0$, односно $0 < x < 1$, во согласност со дефиницијата 5.3.

***Теорема* 5.3.** Функцијата f има гранична вредност A кога $x \to a$ ако и само ако има лева и десна гранична вредност кога $x \to a - 0$, односно кога $x \to a + 0$, еднакви на A.

Доказ: Нека f има гранична вредност A кога $x \to a$. Тогаш за секој реален позитивен број ε ќе постои реален позитивен број $\delta(\varepsilon)$, така што за сите x за кои важи неравенството

$$0 < |x - a| < \delta$$

ќе важи неравенството

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тоа пак значи дека и за сите x за кои важи

$$a - \delta < x < a,$$

односно

$$a < x < a + \delta,$$

ќе важи неравенството

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

што значи дека функцијата има лева односно десна гранична вредност A кога $x \to a - 0$, односно кога $x \to a + 0$.

Нека A е лева и десна гранична вредност на функцијата f кога $x \to a-0$, односно кога $x \to a+0$.

Тогаш за секој позитивен реален број ε ќе постои реален позитивен број $\delta_1(\varepsilon)$, односно $\delta_2(\varepsilon)$, така што за сите x за кои важи неравенството

$$a-\delta_1 < x < a,$$

и неравенството

$$a < x < a+\delta_2,$$

ќе важи неравенството

$$|f(x)-A| < \varepsilon.$$

Нека

$$\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon)\}.$$

Тогаш за сите x за кои важи неравенството

$$0 < |x-a| < \delta$$

ќе важи неравенството

$$|f(x)-A| < \varepsilon,$$

со што покажавме дека A е гранична вредност на функцијата f кога $x \to a$.

Притоа е битно функцијата f да биде дефинирана во интервалите $(a-\delta_1, a)$, $(a-\delta, a)$, $(a, a+\delta_2)$, $(a, a+\delta)$.

***Дефиниција* 5.4.** Функцијата f има гранична вредност A кога $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) ако за сите реални позитивни броеви ε постои реален позитивен број $M(\varepsilon)$, така што за сите x за кои важи неравенството

$$x > M \quad (x < -M)$$

е задоволено неравенството

$$|f(x)-A| < \varepsilon.$$

Тогаш пишуваме

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \qquad (\lim_{x\to-\infty} f(x) = A),$$

при што f треба да е дефинирана во интервалите $(M, +\infty)$, $((-\infty, -M))$.

***Дефиниција* 5.5.** Функцијата f има гранична вредност $+\infty$ ($-\infty$) кога $x \to a$ ако за сите реални позитивни броеви E постои реален позитивен број $\delta(E)$, така што за сите x за кои важи неравенството

$$0 < |x-a| < \delta$$

е задоволено неравенството

$$f(x) > E \qquad (f(x) < -E).$$

Тогаш пишуваме

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad (\lim_{x\to a} f(x) = -\infty).$$

Притоа f треба да е дефинирана во интервалите $(a - \delta, a)$, $(a, a + \delta)$, додека за $x = a$ може, но не мора, да биде дефинирана.

***Дефиниција* 5.6.** Функцијата f има гранична вредност $+\infty$ $(-\infty)$ кога $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ ако за произволен позитивен реален број M постои позитивен реален број $\delta(M)$, така што за сите x за кои важи $x > \delta$ $(x < -\delta)$, важи неравенството

$$f(x) > M \qquad (f(x) < -M).$$

Тогаш пишуваме

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad (\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty).$$

Притоа функцијата f треба да е дефинирана во интервалите $(\delta, +\infty)$ и $(-\infty, -\delta)$.

Овие дефиниции на гранични вредности во проширеното множество реални броеви може да се искажат и во смисла на Хајне.

Слично се дефинираат и граничните вредности

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad (\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty) .$$

***Теорема* 5.4.** Нека се дадени две функции f и g, дефинирани во некоја околина $V(a, \delta)$ на точката a, освен можеби во неа. Нека функциите f и g имаат иста гранична вредност A кога $x \to a$. Нека F е функција дефинирана во истата околина $V(a, \delta)$. Ако за

$$\forall x \in V(a, \delta)$$

важи

$$f(x) \le F(x) \le g(x)$$

тогаш постои и гранична вредност на функцијата F кога $x \to a$, еднаква на A.

Доказот се сведува на користење на особината 3.5 и дефиницијата 5.2

***Теорема* 5.5.** Нека се дадени две функции f и g, дефинирани во некоја околина на точката a, освен можеби во неа. Нека функциите f и g имаат гранични вредности A и B кога $x \to a$.

Тогаш функциите $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0$ за сите x од некоја околина на точката a) имаат гранични вредности

$$A + B,\ A - B,\ A \cdot B,\ \frac{A}{B}\ (B \neq 0),$$

соодветно кога $x \to a$.

Доказот се сведува на користење на теоремата 3.1 за аритметички операции со конвергентни низи и со користење на дефиницијата 5.2 за гранична вредност на функција според Хајне.

Истата теорема важи и за едностраните гранични вредности (лева и десна), како и за обопштените гранични вредности, со исклучок на случаите кога се добиваат неопределени изрази.

***Теорема* 5.6.** Нека функцијата f има гранична вредност A кога $x \to a$. Тогаш постои позитивен реален број δ, така што за сите x за кои важи неравенството

$$0 < |x - a| < \delta$$

функцијата f е ограничена, т.е. постои позитивен реален број M за кој

$$|f(x)| < M$$

(или постојат реални броеви m, M за кои важи $m < f(x) < M$).

Доказ: Нека ε е произволен позитивен реален број. Тогаш ќе постои $\delta(\varepsilon)$, така што за сите x за кои важи неравенството

$$0 < |x - a| < \delta,$$

ќе важи неравенството

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

односно неравенствата

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon.$$

Според тоа, доволно е да се земе

$$m = A - \varepsilon$$

и

$$M = A + \varepsilon$$

за конкретна вредност на ε, со што е докажано дека f е ограничена функција на множеството $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

Ако функцијата f е дефинирана и во точката a со вредност $f(a)$, тогаш

$$m = \min\{A - \varepsilon, f(a)\}$$

и

$$M = \{A + \varepsilon, f(a)\}.$$

5.2. БЕСКОНЕЧНО МАЛИ И БЕСКОНЕЧНО ГОЛЕМИ ФУНКЦИИ. ПРАВОЛИНИСКИ АСИМТОТИ

***Дефиниција* 5.7.** Функцијата $\alpha(x)$ се нарекува бесконечно мала функција кога $x \to a$, ако нејзината гранична вредност (ако постои) кога $x \to a$ е еднаква на 0, т.е. ако

$$\lim_{x \to a} \alpha(\mathrm{x}) = 0.$$

Да забележиме дека кога една функција f има гранична вредност A кога $x \to a$, тогаш функцијата дефинирана со равенката

$$\alpha(x) = f(x) - A$$

е бесконечно мала кога $x \to a$. Според тоа, функцијата f може да се запише во вид

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

во некоја околина на точката a.

***Дефиниција* 5.8.** Функцијата $A(x)$ се нарекува бесконечно голема функција оддесно (одлево) во точката a кога $x \to a + 0$, односно кога $x \to a - 0$, ако за произволна низа $\{x_n\}$ која конвергира кон a така што за сите природни броеви n важи $x_n > a$ $(x_n < a)$, соодветната низа од вредности на функцијата $\{f(x_n)\}$ има граница $+\propto$ или $-\propto$.

***Дефиниција* 5.9.** Нека се дадени две бесконечно мали функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ кога $x \to a$ со услов да постои околина на точката a во која $\beta(x) \neq 0$.

1^0. Ако постои гранична вредност

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

и е еднаква на нула, тогаш велиме дека $\alpha(x)$ е бесконечна мала функција од повисок ред од $\beta(x)$ кога $x \to a$. Тогаш пишуваме

$$\alpha = o(\beta)$$

во околина на точката a.

2^0. Ако постои гранична вредност

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

и ако таа е конечен број различен од нула, тогаш велиме дека $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се бесконечно мали функции од ист ред кога $x\to a$. Во тој случај пишуваме

$$\alpha = O(\beta)$$

во околина на точката a.

Во специјален случај, кога граничната вредност е 1, велиме дека $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ се еквивалентни бесконечно мали функции кога $x \to a$ со ознака $\alpha \sim \beta$ или $\alpha = \beta + o(\beta)$ во некоја околина на точката a.

Симболите o и O се викаат симболи на Ландау. Во согласност со дефиницијата 5.1 е јасно дека мора функциите да се дефинирани во некоја околина на точката a, освен можеби во a, и точката a да е точка на натрупување за таа околина.

Во согласност со дефиниција 5.9, ако

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0$$

тогаш

$$f = o(1)$$

кога $x \to a$ и ако f е ограничена функција во некоја околина на точката a, тогаш

$$f = O(1)$$

кога $x \to a$.

За бесконечно мали функции постојат и поопшти дефиниции во кои не се користи гранична вредност.

***Теорема* 5.7.** Нека се дадени две функции f и g. Ако f е бесконечно мала функција кога $x \to a$ и g е ограничена функција во некоја околина $V(a, \delta)$ на точката a, тогаш функцијата-производ $f{\cdot}g$ е бесконечно мала функција кога $x \to a$.

Доказ: Нека ε е произволен позитивен реален број. Од ограниченоста на g следува дека постои реален позитивен број M, така што за сите x од $V(a, \delta)$ ќе важи неравенството

$$|g(x)| < M.$$

Бидејќи f е бесконечно мала функција кога $x \to a$, ќе постои позитивен реален број $\delta(\varepsilon)$, така што за сите x од $V(a, \delta)$, за кои важат неравенствата

$$0 < |x - a| < \delta,$$

ќе биде задоволено неравенството

$$|f(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Според тоа, за сите x од $V(a, \delta)$ за кои важи

$$0 < |x - a| < \delta$$

ќе биде задоволено неравенството

$$|f(x) \cdot g(x) - 0| = |f(x)| \cdot |g(x)| < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon,$$

што значи дека функцијата $f \cdot g$ е бесконечна мала функција кога $x \to a$.

***Пример* 5.8.** Нека се дадени функции

$$g(x) = \sin\frac{1}{x} \qquad \text{и} \qquad f(x) = x.$$

Да се најде граничната вредност $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x}$.

Решение: Функцијата g е ограничена на множеството

$$R \setminus \{0\} \qquad (|\sin\frac{1}{x}| \leq 1)$$

и функцијата f е бесконечно мала функција кога $x \to 0$ ($\lim\limits_{x\to 0} x = 0$) и според теоремата 5.7 граничната вредност е нула.

***Дефиниција* 5.10.** Нека е дадена функција f со график G_f во правоаголен координатен систем. Тогаш:

а) правата чија равенка е $x = a$ се нарекува вертикална асимтота за графикот на функцијата f ако важи еден или најмногу два од следните четири услови:

$$\lim_{x\to a\pm 0} f(x) = \pm\infty$$

(ако постојат граничните вредности);

б) правата чија равенка е $y = b$ се нарекува хоризонтална асимтота за графикот на функцијата ако е задоволен барем еден од условите

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = b$$

(ако постојат);

в) Правата чија равенка е $y = ax + b$ се нарекува коса асимтота за графикот на функцијата ако

$$a = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

и

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax]$$

(ако постојат).

***Пример* 5.9.** Нека е дадена функција

$$f(x) = \frac{1}{x}\sin x,$$

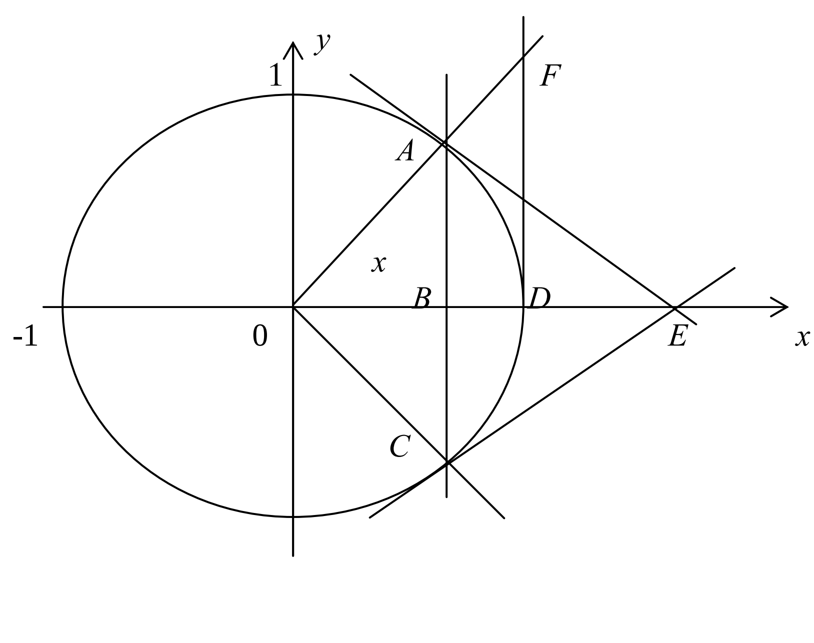
дефинирана на $R \setminus \{0\}$. Да се покаже дека постои нејзина гранична вредност кога $x \to 0$, еднаква на 1.

Решение: Нека $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Кај тригонометрискиот круг со радиус 1, ги разгледуваме триаголниците OBA, ODF и кружниот исечок ODA од цртежот 13, при што

$$\overset{\frown}{AD} = x, \quad \overline{AB} = \sin x, \quad \overline{OB} = \cos x\,, \quad \overline{OA} = 1, \quad \overline{AE} = \operatorname{tg} x = \overline{DF}$$

(бидејќи $\overline{OE} = \overline{OF}$). Притоа x е всушност должината на дел од кружницата (кружната линија) меѓу точките A и D (кружен лак) мерена во радијани, а x како агол е аголот кој одговара на тој лак, мерен во степени.



Цртеж 13

Бидејќи за нивните плоштини важи неравенството

$$P_{OBA} < P_{ODA} < P_{ODF},$$

во согласност со дефинициите на тригонометриските функции и формулите за плоштина на триаголници и кружен исечок, ќе го добиеме следното неравенство

$$\sin x \cdot \cos x < x < \operatorname{tg} x,$$

односно неравенството

$$\cos x < \frac{1}{x} \cdot \sin x < \frac{1}{\cos x}$$

($x > 0$, $\sin x > 0$, $\cos x > 0$ според претпоставката). Во согласност со теоремата 5.4 и примерот 5.5, од последното неравенство се добива егзистенција на десната гранична вредност

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{1}{x} \sin x = 1.$$

За

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0$$

важи

$$\frac{1}{-x} \sin(-x) = \frac{1}{-x}(-\sin x) = \frac{1}{x} \sin x$$

и земајќи $t = -x$ истиот доказ може да се спроведе и за функцијата $\frac{1}{t}\sin t$.

Со тоа се добива егзистенција на левата гранична вредност

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x} \sin x = 1,$$

од каде според теоремата 5.3 (левата и десната гранична вредност се еднакви) следува егзистенција на граничната вредност

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \sin x = 1.$$

Тоа пак значи дека $\sin x \sim x$ или $\sin x = x + o(x)$ во некоја околина на нулата.

***Пример* 5.10.** Нека е дадена круг со радиус R и нека во него е впишан правилен n-аголник. Плоштината на тој n-аголник, како сума од плоштините на рамнокраки триаголници, е еднаква на

$$nR^2 \sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}.$$

Со граничен процес кога $n \to \infty$ и со користење на познати гранични вредности (пример 5.5 и пример 5.9) се добива познатата формула за плоштина на кругот $P = R^2\pi$. Од формулата за обиколка на n-аголникот

$$L_n = 2nR\sin\frac{\pi}{n},$$

со користење на позната гранична вредност (пример 5.9) со граничен процес кога $n \to \infty$, се добива познатата формула за должина на кружницата

$$L = 2R\pi.$$

***Пример* 5.11.** Нека е дадена функцијата

$$f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x.$$

Да се покаже дека

$$\lim_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e.$$

Решение: Нека $x > 1$.

Бидејќи $x < [x] + 1 < x + 1$, ќе важи неравенството

$$(1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]+1} < (1 + \frac{1}{x})^{x+1} < (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]+2}.$$

Нека $x \to +\infty$. Тогаш $[x] \to +\infty$, односно $[x] + 1 \to +\infty$, и со користење на специјалната граница 5 кај низи и теоремата 3.1 за аритметички операции со конвергентни низи, се добиваат следните граници на низи од реални броеви ($[x]$ е природен број):

$$\lim_{[x]+1\to+\infty}(1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]+1} = e,$$

$$\lim_{[x]\to+\infty}(1 + \frac{1}{[x]})^{[x]+2} = e.$$

Со примена на теоремата 5.4 од последното неравенство се добива егзистенцијата на граничната вредност

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+1},$$

односно граничната вредност

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = e.$$

Нека сега $x \to -\infty$. Тогаш со замена $y = -x$, при што $y \to +\infty$, и со користење на резултатот од првиот дел ќе добиеме

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x} = \lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} =$$

$$\lim_{y\text{-}1\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right] = e\cdot 1 = e.$$

За $h = \frac{1}{x}$ се добива модифицираната гранична вредност

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e.$$

***Пример* 5.12.** Да се покаже дека

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(a^{x}-1) = \ln a\,,\ \ a > 0.$$

Решение: Ако $a^{x}-1 = t$, односно $x = \log_{a}(1+t)$, со трансформација се добива

$$\frac{1}{x}(a^{x}-1) = \frac{t}{\log_{a}(1+t)} = \frac{1}{\log_{a}(1+t)^{\frac{1}{t}}}.$$

Ако $x \to 0$, тогаш $t \to 0$ ($\lim\limits_{x\to 0}(a^{x}-1) = 0$) и со користењето на примерот 5.11 се добива бараната гранична вредност.

***Пример* 5.13.** Нека се дадени две функции f и g дефинирани во некоја околина на точката a, при што $f(x) > 0$. Ако постојат

$$\lim_{x\to a} f(x) = A > 0 \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = B,$$

тогаш важи формулата

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[g(x)\ln f(x)]} = A^B,$$

а ако постојат

$$\lim_{x\to a} f(x) = 1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

тогаш важи формулата

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[g(x)(f(x)-1)]}.$$

Втората формула се добива со помош на трансформацијата

$$[f(x)]^{g(x)} = [1 + (f(x) - 1)]^{g(x)} = \{[1 + (f(x) - 1)]^{1/(f(x)-1)}\}^{g(x)(f(x)-1)}$$

и примерот 5.11 $\quad (f(x) - 1 \to 0$ кога $x \to a)$.

§6. НЕПРЕКИНАТОСТ НА РЕАЛНА ФУНКЦИЈА ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

***Дефиниција* 6.1.** Нека е дадена функција f дефинирана во некоја околина $V(a, \delta)$ на точката a. Ако постои конечна гранична вредност на функцијата f кога $x \to a$ еднаква на $f(a)$, тогаш велиме дека функцијата f е непрекината во точката a и пишуваме

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Да забележиме дека до поимот непрекинатост доаѓаме всушност кога условот

$$0 < |x - a| < \delta$$

кај дефиниција 5.1 за гранична вредност се замени со условот

$$|x - a| < \delta$$

и функцијата f е дефинирана и во точката a.

Навистина, според Коши, дефиницијата 6.1 ќе биде дадена со следната формулација:

Дефиниција* 6.1 Функцијата f е непрекината во точката a ако е дефинирана на некоја околина $V(a, \delta_1)$ на точката a, ако точката a е точка на натрупување за множеството $V(a, \delta_1)$ и ако

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0,$$

така што за сите

$$x \in V(a, \delta_1)$$

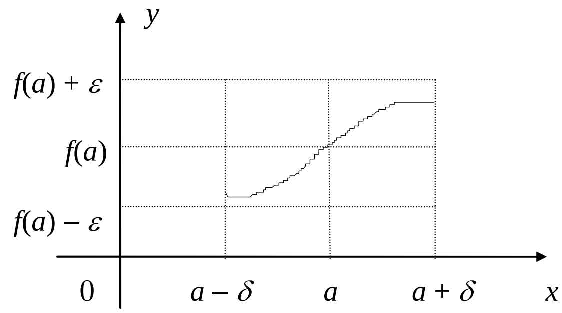
што го задоволуваат неравенството

$$|x - a| < \delta$$

да важи

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Притоа ако $\delta > \delta_1$, тогаш за δ се зема δ_1 (цртеж 14).



Цртеж 14

Бидејќи

$$\lim_{x\to a} x = a$$

(лесно се докажува) кога f е непрекината во точката a, можеме симболички да запишеме

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = f(\lim_{x\to a} x).$$

Лесно се формулира и дефиницијата за непрекинатост со низи според Хајне.

Ако функцијата f не е непрекината во точката a, тогаш велиме дека има прекин во точката a, односно дека точката a е точка на прекин.

***Дефиниција* 6.2.** Нека е дадена функција f. Точките на прекин кај кои постои конечна лева и десна гранична вредност (еднострани гранични вредности) се нарекуваат точки на прекин од прв ред за функцијата f. Другите точки на прекин се нарекуваат точки на прекин од втор ред за функцијата f.

Да забележиме дека точката a во која функцијата f не е дефинирана, но постои конечна гранична вредност кога $x \to a$, е точка на привиден прекин. Тогаш функцијата f може да се додефинира и во точката a со вредност еднаква на граничната вредност, со што во таа точка функцијата веќе ќе биде непрекината.

***Пример* 6.1.** Функцијата

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

има во точката $x = 0$ точка на прекин од прв ред, бидејќи

$$f(0 - 0) = -1, \qquad f(0 + 0) = 1.$$

***Пример* 6.2.** Функцијата

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

има во точката $x = 0$ точка на прекин од втор ред, бидејќи

$$f(0-0) = -\infty, \qquad f(0+0) = +\infty.$$

***Пример* 6.3.** Функцијата

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

има во точката $x = 0$ точка на прекин од втор ред, бидејќи не постои гранична вредност кога $x \to 0$ (пример 5.2).

***Пример* 6.4.** Функцијата

$$f(x) = x\cdot\sin\frac{1}{x}$$

не е дефинирана во точката $x = 0$. Бидејќи постои

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x} = 0$$

(пример 5.8), точката $x = 0$ е точка на привиден прекин.

***Пример* 6.5.** Функцијата

$$f(x) = \frac{1}{x}\cdot\sin x$$

не е дефинирана во точката $x = 0$. Бидејќи постои

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\sin x = 1$$

(пример 5.9), точката $x = 0$ е точка на привиден прекин.

Од самата дефиниција 6.1 произлегува дека може на соодветен начин да се дефинира и непрекинатост одлево (оддесно) на функцијата f во точката a, земајќи ја за лева (десна) гранична вредност вредноста на функцијата во точката a. Притоа мора да се претпостави дека f е дефинирана во некој полусегмент $(a-\delta, a]$, односно $[a, a+\delta)$.

Исто така понатаму ќе важи и соодветната теорема на теоремата 5.5, заменувајќи ги граничните вредности со вредностите на функциите во точката a (секако мора функциите да бидат и дефинирани во точката a). Ќе важат и сите други теореми и особини искажани за функции кои имаат гранична вредност, со тоа што терминот гранична вредност се заменува со терминот непрекинатост, а самата гранична вредност како број се заменува со вредноста на функциите во точката a.

Поимот гранична вредност на функција е поопшт од поимот непрекинатост. Тоа се поими од локален карактер (врзани за точка). Имено, ако функцијата е непрекината во точка a, тогаш таа има и гранична вредност кога $x \to a$, додека обратното не мора да важи.

***Дефиниција* 6.3.** За функцијата f велиме дека е непрекината на интервалот (a, b) ако е непрекината во секоја точка од тој интервал.

***Дефиниција* 6.4.** За функцијата f велиме дека е непрекината на сегментот $[a, b]$ ако е непрекината во интервалот (a, b) и е непрекината одлево во точката b и оддесно во точката a.

***Теорема* 6.1.** Нека функцијата f е непрекината во точката a, функцијата g е непрекината во точката $b = f(a)$. Ако постои сложена функција $h = g \circ f$, тогаш таа е непрекината во точката a.

Доказ: Нека ε е произволен позитивен реален број. Од непрекинатоста на функцијата g во точката $b = f(a)$ следува дека ќе постои

$$\delta_1(\varepsilon) > 0,$$

така што за секое y за кое важи неравенството

$$|y - b| < \delta_1$$

ќе биде задоволено неравенството

$$|g(y) - g(b)| < \varepsilon.$$

Понатаму, од непрекинатоста на функцијата f во точката a следува дека за тоа δ_1 ќе постои $\delta_2 > 0$, така што за сите x за кои важи

$$|x - a| < \delta_2$$

ќе биде задоволено неравенството

$$|f(x) - f(a)| < \delta_1,$$

односно со други ознаки

$$|y - b| < \delta_1.$$

Според тоа, за произволно ε добиваме дека постои такво $\delta_2 > 0$ (кое зависи од ε, бидејќи δ_1 зависи од ε), така што за сите x за кои важи

$$|x - a| < \delta_2$$

важи неравенството

$$|f(x) - f(a)| < \delta_1,$$

односно неравенството

$$|y - b| < \delta_1,$$

кое повлекува и задоволување на неравенството

$$|g(y) - g(b)| < \varepsilon,$$

односно неравенството

$$|g(f(x)) - g(f(a))| = |h(x) - h(a)| < \varepsilon.$$

Притоа со самиот услов f да е непрекината во точката a, а g во точката $b = f(a)$, сметаме дека f е дефинирана на интервалот $(a - \delta_2, a + \delta_2)$, а g на интервалот $(b - \delta_1, b + \delta_1)$. Во спротивен случај за δ_1 и δ_2 се земаат помали вредности, така што условот за дефинираност сепак да биде задоволен.

Значи, симболички можеме да напишеме

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)).$$

***Теорема* 6.2.** Нека функцијата f е непрекината во точката a и нека $f(a) \neq 0$.

Тогаш постои $\delta > 0$, така што за сите x за кои важи неравенството

$$|x - a| < \delta$$

ќе важи неравенството

$$|f(x)| > \frac{1}{2}|f(a)|.$$

Во специјален случај, ако $f(a) > 0$, тогаш ќе важи

$$f(x) > \frac{1}{2}f(a) \quad (> 0),$$

а ако $f(a) < 0$, ќе важи неравенството

$$f(x) < \frac{1}{2}f(a) \quad (< 0).$$

Поради тоа оваа теорема се нарекува и теорема за запазување на знакот кај непрекинатите функции.

Доказ. Нека

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|f(a)| > 0$$

е конкретна вредност на ε. Од непрекинатоста на функцијата f ќе постои δ, така што за сите x за кои важи $|x - a| < \delta$ ќе биде задоволено неравенството

$$|f(x) - f(a)| < \frac{1}{2}|f(a)|,$$

односно неравенствата

$$f(a) - \frac{1}{2}|f(a)| < f(x) < f(a) + \frac{1}{2}|f(a)|,$$

од каде се добива тврдењето.

***Теорема* 6.3.** Нека функцијата f е строго монотоно растечка (опаѓачка) и непрекината функција на сегментот $[a, b]$ и нека $A = f(a)$, $B = f(b)$. Тогаш постои инверзна функција $g = f^{-1}$ на функцијата f на сегментот $[a, b]$, која е строго монотоно растечка (опаѓачка) и непрекината на сегментот $[A, B]$.

Доказ: Егзистенцијата на инверзната функција, која е исто така строго монотоно растечка (опаѓачка), веќе е покажана во теоремата 4.2. Значи останува да се докаже непрекинатоста на инверзната функција g на сегментот $[A, B]$.

Нека $y_0 \in (A, B)$.

Тогаш постои единствена точка $x_0 \in (a, b)$, така што $y_0 = f(x_0)$, односно $x_0 = g(y_0)$.

Нека ε е произволен позитивен реален број, така што

$$[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset [a, b],$$

и нека

$$y_1 = f(x_0 - \varepsilon) \quad \text{и} \quad y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$$

при што

$$y_0 \in (y_1, y_2).$$

Нека

$$\delta = \min\{|y_1 - y_0|, |y_2 - y_0|\}.$$

Од строгата монотоност на функцијата f следува дека за сите y за кои важи

$$|y - y_0| < \delta$$

ќе постојат единствени точки

$$x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon),$$

така што

$$x = g(y).$$

Значи, да сумираме, за произволен реален позитивен број ε избравме δ-околина на точката y_0, така што за сите y кои □ припаѓаат на неа ќе важи неравенството

$$|x - x_0| < \varepsilon,$$

односно неравенството

$$|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

(т.е. вредностите $g(y)$ ќе □ припаѓаат на ε-околината на точката $g(y_0)$). Бидејќи y_0 е произволна точка од (A, B), со тоа е докажано тврдењето за непрекинатоста на инверзната функција g во интервалот (A, B).

Непрекинатоста на инверзната функција g оддесно во точката A и одлево во точката B се покажува на сличен начин.

***Теорема* 6.4.** Нека f е функција дефинирана на интервалот (a, b), ограничена и монотоно растечка на тој интервал. Тогаш постои $f(b - 0)$ и $f(a + 0)$.

Од поважните својства на непрекинатите функции кои се од локален карактер ќе наведеме уште едно.

***Теорема* 6.5.** Нека f е строго монотоно растечка (опаѓачка) функција на $[a, b]$ и нека $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Функцијата f е непрекината на $[a, b]$ ако и само ако секој број $\gamma \in [\alpha, \beta]$ е вредност на функцијата f во некоја точка од сегментот $[a, b]$, т.е. за $\forall \gamma \in [\alpha, \beta]$ постои единствен број $c \in [a, b]$, така што $\gamma = f(c)$.

Ако во дефиницијата 6.1* за непрекинатост на функцијата f во точката a со h ја означиме разликата $x - a$, тогаш самата дефиниција ќе ја има следната формулација:

Дефиниција* 6.1.* Функцијата f е непрекината во точката a ако

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0,$$

така што за секој реален број h за кој важи неравенството

$$|h| < \delta$$

да важи неравенството

$$|f(a + h) - f(a)| < \varepsilon.$$

Притоа е потребно функцијата f да биде дефинирана во точките $a + h$ и можеме да запишеме

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a).$$

Разликата

$$h = x - a$$

се нарекува нараснување на аргументот x во точката a (значи од точката a со нараснување h се добива точка $a + h$, при што h може да биде и позитивен и негативен реален број или нула), а разликата

$$\Delta y = f(a + h) - f(a)$$

се нарекува нараснување на вредноста на функцијата (понатаму само на функцијата) кое одговара на нараснувањето h на аргументот x.

Според тоа дефиницијата 6.1* за непрекинатост би ја имала и следната формулација:

Дефиниција* 6.1.** Функцијата f е непрекината во точката a ако нараснувањето на функцијата се стреми кон нула кога нараснувањето на аргументот во точката a се стреми кон нула. Тогаш пишуваме

$$\lim_{h \to 0} \Delta y = 0,$$

односно

$$\lim_{h \to 0} [f(a + h) - f(a)] = 0.$$

Да забележиме дека во конкретниот граничен процес вредноста $f(a + h)$ зависи само од нараснувањето h и како функција од аргументот h е дефинирана во некоја околина на точката $h = 0$ (бидејќи непрекинатоста се дефинира во точка и според тоа a е фиксна точка). Во случај на други ознаки на аргументите односно независните променливи и функциите, за нараснувањето на аргументот со ознака x се употребува и ознаката Δx, а за соодветното нараснување на функцијата ознаката

$$\Delta y = \Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Исто така и за точката во која се испитува непрекинатоста (па и егзистенција на гранична вредност) се употребува и ознака x_0.

Непрекинатоста како појава многу често се јавува во природните процеси. Таа се карактеризира со својство при мало нараснување на независно променливата да му одговара мало нараснување на функцијата, т.е. на променливата која зависи од неа.

Во класата непрекинати функции важат и следните доста важни теореми кои ги искажуваат нивните особини на интервал или сегмент.

***Теорема* 6.6 (Коши).** Нека е дадена функција f, непрекината на сегментот $[a, b]$ и нека

$$f(a) = A, \quad f(b) = B \qquad (A \cdot B \neq 0).$$

Ако $A \cdot B < 0$, тогаш постои барем една точка $c \in (a, b)$ така што

$$f(c) = 0.$$

Специјално, за кој било број γ кој се наоѓа меѓу броевите A и B постои барем една точка $c \in (a, b)$ така што

$$f(c) = \gamma.$$

Доказ: Нека $A < 0$, $B > 0$ и нека $M \subset [a, b]$ е множество точки x со својство $\forall x \in M,\ f(x) < 0$.

Множеството M не е празно множество (барем $a \in M$) и е ограничено од горе (со b). Според аксиомата VI за непрекинатост постои супремум кој ќе го означиме со c. Ќе покажеме дека $c \neq a$ и $c \neq b$. Да претпоставиме обратно, односно нека $c = b$. Бидејќи

$$f(b) = B > 0,$$

според теоремата 6.2 постои $\delta > 0$, така што

$$\forall x \in (\delta - b, b), \qquad f(x) > 0,$$

што е во спротивност со фактот дека c е супремум на множеството M. Нека сега претпоставиме дека $c = a$. Бидејќи

$$f(a) = A < 0,$$

според теоремата 6.2 постои $\delta > 0$, така што

$$\forall x \in (a, a + \delta), \quad f(x) < 0,$$

што е во спротивност со фактот дека c $(=a)$ е супремум на множеството M. На крајот ќе покажеме дека

$$f(c) = 0.$$

Да претпоставиме обратно, односно нека

$$f(c) \neq 0,$$

односно нека

$$f(c) > 0 \quad \text{или} \quad f(c) < 0.$$

Според теоремата 6.2, ако

$$f(c) > 0 \quad (f(c) < 0),$$

тогаш постои $\delta > 0$, така што

$$\forall x \in (c - \delta, c + \delta), \quad f(x) > 0 \quad (f(x) < 0).$$

Од друга страна c е супремум и во согласност со дефиницијата 1.5 ќе постои барем една точка $x_0 \in M$ за која важи $f(x_0) < 0$, додека

$$\forall x \in (c, c + \delta), \quad f(x) \geq 0$$

(бидејќи c е најмала мајоранта и значи $(c, c + \delta) \cap M = \varnothing$), што претставува контрадикторност.

Специјалниот случај се покажува со дефинирање на нова функција

$$F(x) = f(x) - \gamma$$

и со примена на истиот резултат за функцијата F, со претпоставка $A \neq B$. Ако $A = B$, тогаш $\gamma = A = B$ и за c може да се земе или a или b.

***Теорема* 6.7 (Вајерштрас 1).** Ако функцијата f е непрекината на сегментот $[a, b]$, тогаш е ограничена на сегментот $[a, b]$.

***Теорема* 6.8 (Вајерштрас 2).** Нека е дадена функција f, непрекината на сегментот $E = [a, b]$. Тогаш функцијата f ја достигнува својата најголема и својата најмала вредност на тој сегмент, односно постојат точки $x_1, x_2 \in [a, b]$, така што

$$f(x_1) = \min f([a,b]) = \min \{f(x) | a \leq x \leq b\} =$$
$$= \min \{f(x) | x \in [a, b]\} = \min f(E)$$

и

$$f(x_2) = \max f(E)$$

(овде се употребени повеќе ознаки).

Доказ: Според теоремата 6.7 функцијата f е ограничена и одгоре и оддолу и според аксиомата VI за непрекинатост и последицата 1.7 постои супремум M и инфимум m на множеството вредности (кодоменот) $f([a, b])$. Да претпоставиме дека не постои

$$c_2 \in [a, b]$$

такво што

$$f(c_2) = M,$$

што значи дека

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) < M.$$

Дефинираме нова функција F со равенката

$$F(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

на сегментот $[a, b]$ со особина

$$\forall x \in [a, b], \quad F(x) > 0$$

и која според теоремата сооодветна на теоремата 5.5 е исто така непрекината функција на $[a, b]$. Според теоремата 6.7 и F е ограничена функција на $[a, b]$, што значи дека постои број $A > 0$, така што

$$\forall x \in [a, b], \quad F(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq A,$$

односно

$$f(x) \leq M - \frac{1}{A}.$$

Последното неравенство е во спротивност со фактот дека M е супремум на множеството $f([a, b])$ (M е најмала мајоранта). Според тоа ќе постои $c_2 \in [a, b]$, така што

$$f(c_2) = M.$$

Доказот за егзистенцијата на $c_1 \in [a, b]$ такво што $f(c_1) = m$ е исти.

***Дефиниција* 6.5.** Нека е дадена функција f, дефинирана на множеството E. Ако за кој било позитивен реален број ε може да се најде позитивен реален број δ, така што за кои било две точки x_1, x_2 од множеството E, за кои важи неравенството

$$|x_1 - x_2| < \delta,$$

да биде задоволено неравенството

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

тогаш велиме дека функцијата f е рамномерно (униформно) непрекината на множеството E.

Да забележиме дека за разлика од поимот непрекинатост, кој е врзан за точка, поимот рамномерна непрекинатост е врзан за множество.

***Теорема* 6.9.** Ако функцијата f е рамномерно непрекината на некое множество E, тогаш таа е непрекината во секоја точка од тоа множество. Обратното не мора да важи.

***Пример* 6.6.** Функцијата

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}$$

е непрекината на интервалот (0, 1), но не е рамномерно непрекината на истиот интервал.

Ако функцијата f е непрекината на интервалот (a, b), тоа значи дека е непрекината во секоја точка од тој интервал. Значи, за произволен позитивен реален број ε за точката $x_0 \in (a, b)$ постои позитивен реален број δ кој зависи од ε, но кој не мора да биде еднаков и за друга точка x_1 при еднакво ε (значи кај непрекинатоста δ зависи и од самата точка освен од ε). Според тоа, егзистенцијата на δ зависи и од ε, но и од точката во која се покажува непрекинатост на функцијата. Од друга страна пак, кај рамномерната непрекинатост егзистенцијата на δ зависи само од ε и е единствено за кои било точки од соодветното множество .

***Теорема* 6.10 (Кантор).** Ако функцијата f е непрекината на сегментот $[a, b]$, тогаш е рамномерно непрекината на тој сегмент.

§7. ЕЛЕМЕНТАРНИ РЕАЛНИ ФУНКЦИИ ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

***Дефиниција* 7.1.** Како основни елементарни функции ќе ги дефинираме следните функции:

1^0 $f(x) = c$ (c – константа) – константа функција ,

2^0 $f(x) = a^x$ ($a > 0$; $a \neq 1$; a– константа)– експоненцијална функција,

3^0 $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$; a – константа) – логаритамска функција,

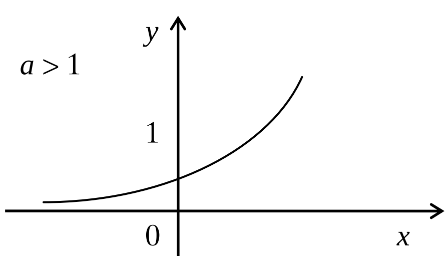
4^0 $f(x) = x^{\alpha}$ ($\alpha \neq 0$; α – константа) – степенска функција,

5^0 $f(x) = \sin x$ – синусна функција.

Секако дека постојат и други класификации на функциите. За секоја од овие основни функции ќе ги покажеме накратко (без докази) најважните особини и соодветните графици .

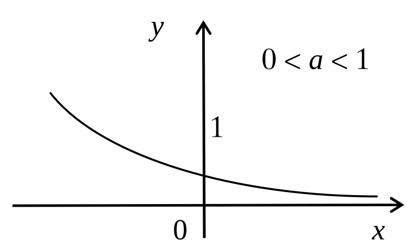
1^0. Функцијата е дефинирана на множеството реални броеви R со кодомен $\{c\}$, непрекината е во секоја точка од дефинициона та област, нема инверзна функција и графикот во правоаголен координатен систем е хоризонтална права.

2^0. Функцијата е дефинирана и непрекината на R, со кодомен R^+ $(=(0, +\propto))$. За $a > 1$ $(0 < a < 1)$ е строго монотоно растечка (опаѓачка). Има своја инверзна функција и нејзиниот график заедно со соодветните гранични вредности на краевите од дефиниционата област е даден на цртежите 15 и 16.



$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0^+$; $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\propto$

Цртеж 15



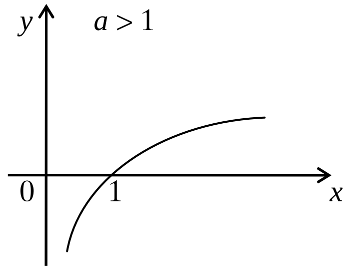
$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\propto$; $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0^+$

Цртеж 16

3^0. Функцијата е дефинирана и непрекината на R^+, со кодомен R. Всушност, таа е инверзна функција на експоненцијалната функција дефинирана преку релациите

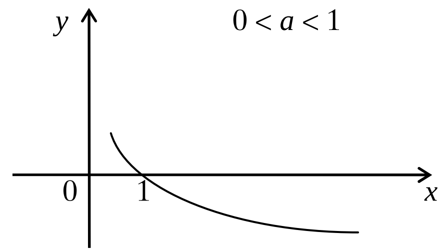
$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y\ .$$

За $a > 1$ $(0 < a < 1)$ функцијата строго монотоно расте (опаѓа). Графикот заедно со соодветните гранични вредности на краевите од дефинициoната област е даден на цртежите 17 и 18.



$\lim\limits_{x\to 0+0} \log_a x = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$

Цртеж 17



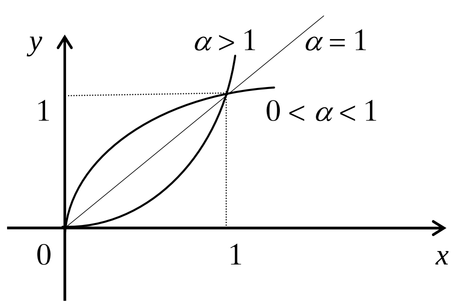
$\lim\limits_{x\to 0+0} \log_a x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$

Цртеж 18

4^0. Функцијата всушност се дефинира како сложена функција од експоненцијалната и логаритамската функција преку релацијата

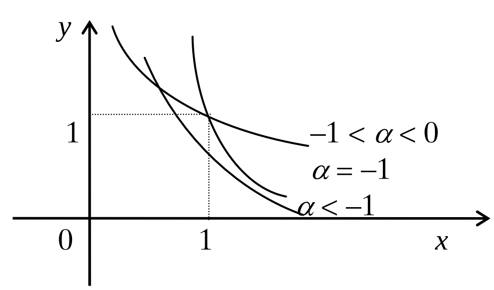
$$x^{\alpha} = \left(a^{\log_a x}\right)^{\alpha} = a^{\alpha \log_a x},$$

при што за константата a се зема обично број поголем од 1 (а може и број меѓу 0 и 1). Оваа функција е дефинирана и непрекината на R^+, со кодомен R^+. За $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$ функцијата строго монотоно расте (опаѓа). Графикот заедно со соодветните гранични вредности на краевите од дефинициoната област е даден на цртежите 19 и 20.



$\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\alpha} = 0^+$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\alpha} = +\infty$

Цртеж 19



$\lim\limits_{x\to 0+0} x^{\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\alpha} = 0^+$

Цртеж 20

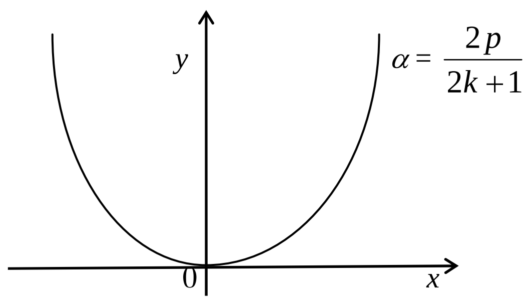
Специјално за некои рационални броеви α оваа функција е дефинирана и на R. Така за

$$\alpha = \frac{2p}{2k+1}, \qquad p, k \in N,$$

функцијата е дефинирана и непрекината на R, со кодомен $R^+ \cup \{0\}$, строго монотоно опаѓа на $(-\infty, 0]$, а строго монотоно расте на $[0, +\infty)$. За

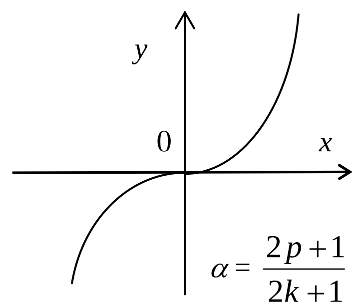
$$\alpha = \frac{2p+1}{2k+1}, \qquad p, k \in N,$$

функцијата е дефинирана и непрекината на R, со кодомен R и строго монотоно расте на R. Тие случаи се дадени со графици и соодветни гранични вредности на цртежите 21 и 22.



$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty$

Цртеж 21



$\lim\limits_{x\to-\infty} x^{\alpha} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha} = +\infty$

Цртеж 22

За $\alpha \in Z^-$ (негативни цели броеви) функцијата е дефинирана и непрекината на $R \setminus \{0\}$, при што за α парен негативен цел број функцијата има кодомен R^+, а за α непарен негативен цел број функцијата има кодомен $R \setminus \{0\}$.

5^0. Функцијата е дефинирана и непрекината на R, периодична со основен период 2π и ограничена на R. Разгледувајќи го само сегментот $[0, 2\pi]$, на множеството

$$[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$$

функцијата строго монотоно расте, а на множеството

$$[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$$

функцијата строго монотоно опаѓа. Другите особини, на пример нулите, екстремите и друго, како и графикот, се доволно познати од средно образование.

***Дефиниција* 7.2.** Сите функции кои можат да се дефинираат со помош на аритметички операции и преку сложени функции од основните елементарни функции се нарекуваат елементарни функции.

Тоа се полиномните функции, дробнорационалните функции, функциите

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x), \qquad \mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \mathrm{cosec}x = \frac{1}{\sin x}, \qquad \mathrm{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$\mathrm{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \mathrm{th}x = \frac{shx}{chx}, \qquad \mathrm{cth}x = \frac{chx}{shx},$$

$$f(x) = \arcsin x, \qquad f(x) = \arccos x,$$

и други.

Овде ќе разгледаме само некои од нив.

6^0. Функцијата

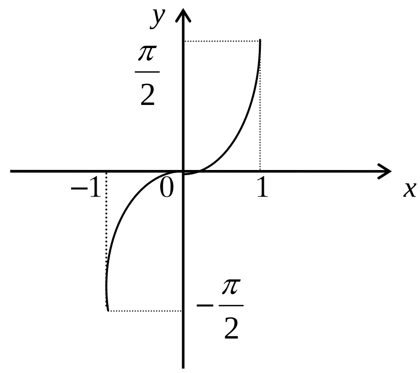
$$f(x) = \arcsin x,$$

дефинирана на $[-1, 1]$, строго момотоно растечка и непрекината, со кодомен $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, е една од инверзните функции на синусната функција. Всушност таа е инверзна функција на функцијата

$$g(x) = \sin x$$

на сегментот $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ и постои според теоремата 6.3.

Нејзиниот график е даден на цртежот 23.



$$f(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$f(1) = \frac{\pi}{2}$$

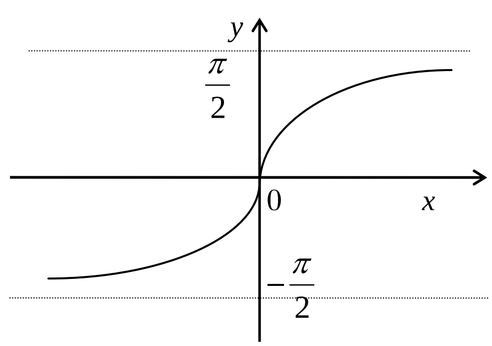
Цртеж 23

Да забележиме дека ако се разгледува истата функција g на друг сегмент (на пример $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$), тогаш би била дефинирана друга инверзна функција.

7^0. Функцијата

$$f(x) = \text{arctg}x,$$

дефинирана, непрекината и монотоно растечка на R, со кодомен $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, е една од инверзните функции на тангенсната функција на интервалот $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ и постои според теоремата 6.3. Нејзиниот график и соодветните гранични вредности се дадени на цртежот 24.



$$\lim_{x\to-\infty} \text{arctg}x = -\frac{\pi}{2}$$

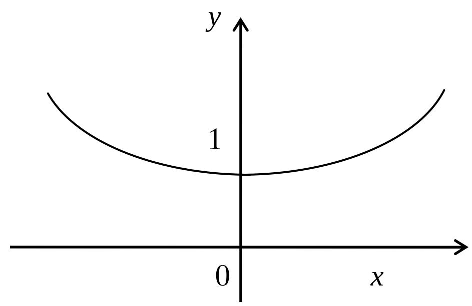
$$\lim_{x\to+\infty} \text{arctg}x = \frac{\pi}{2}$$

Цртеж 24

8^0. Функцијата

$$f(x) = \mathrm{ch}x$$

(косинус хиперболикум икс), наречена синџир (ланчаница), е дефинирана и непрекината на R, со кодомен $[1, +\infty)$. Нејзиниот график и соодветните гранични вредности се дадени на цртежот 25.



$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}x = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}x = +\infty$$

Цртеж 25

ГЛАВА ВТОРА

ДИФЕРЕНЦИЈАЛНО СМЕТАЊЕ НА РЕАЛНА ФУНКЦИЈА ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА СО НЕКОИ ПРИМЕНИ

§8. ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ НА РЕАЛНА ФУНКЦИЈА ОД ЕДНА РЕАЛНА ПРОМЕНЛИВА

8.1. ИЗВОДИ ОД ПРВ РЕД: ДЕФИНИЦИЈА И ОСОБИНИ

***Дефиниција* 8.1.** Нека функцијата f е дадена со формулата

$$y = f(x),$$

дефинирана на множество

$$E \subseteq R,$$

нека x_0 е внатрешна точка на множеството E и нека $\Delta x \neq 0$ е нараснување на аргументот со особина $x_0 + \Delta x$ да припаѓа на E. Ако постои конечна гранична вредност на количникот

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

кога $\Delta x \to 0$, тогаш таа се нарекува прв извод на функцијата f во однос на независната променлива x во точката x_0 и има ознака $f'(x_0)$ или $f_x'(x_0)$. Значи,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Разликата

$$x - x_0 = \Delta x$$

се нарекува нараснување на аргументот x во точката x_0 (значи, од точката x_0 со нараснување Δx се добива точка $x_0 + \Delta x$, при што Δx може да биде и позитивен и негативен реален број). Разликата

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$$

се нарекува нараснување на вредноста на функцијата (понатаму само на функцијата) кое одговара на нараснувањето Δx на аргументот x во точката x_0 (значи, од вредноста $f(x_0)$ се добива вредноста

$$f(x_0 + \Delta x)$$

која одговара на нараснувањето Δx на аргументот x во точката x_0).

Според дефиницијата 8.1 изводот е конечен реален број и можеме да кажеме дека всушност претставува гранична вредност од количникот на нараснувањето на функцијата и нараснувањето на аргументот кога нараснувањето на аргументот се стреми кон нула. Притоа граничната вредност се бара од една реална функција F од независната променлива големина Δx, дадена со равенката

$$F(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(самата точка x_0 е константа при тој граничен процес), која е дефинирана во некоја околина $V(0, \delta) \setminus \{0\}$, на точката $\Delta x = 0$, но не е дефинирана во самата точка 0. Притоа

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq E$$

или

$$(x_0 - \delta, x_0] \subseteq E$$

или

$$[x_0, x_0 + \delta) \subseteq E.$$

За нараснувањето на аргументот се употребува ознаката Δx, соодветна на ознаката на аргументот x, како и други ознаки, а за соодветното нараснување на функцијата ознаките:

$$\Delta y; \quad \Delta f; \quad \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y.$$

За изводот се употребуваат и ознаките:

$\dfrac{dy}{dx}; \quad \dfrac{df(x_0)}{dx}$ (според Лајбниц);

$f_x'(x_0); \quad y'; \quad y'_x; \quad f'(x_0); \quad y'_0$ (според Лагранж);

$\mathrm{D}y; \quad \mathrm{D}f(x_0); \quad \mathrm{D}_x y; \quad \mathrm{D}_x f(x_0)$ (според Коши).

Понатаму, кога е позната ознаката за која било променлива, тогаш ќе се користи скратен запис. Исто така може да се користи и ознаката a наместо x_0 за точката во која се бара изводот. Да забележиме дека изводот ја карактеризира промената на вредноста на функцијата, односно брзината на промената на вредноста на функцијата во точката x_0. Терминот извод прв го вовел Лагранж.

***Дефиниција* 8.2.** Нека функцијата f е дадена со формулата

$$y = f(x),$$

дефинирана на множество

$$E \subseteq R,$$

нека постои $\delta > 0$, така што

$$(x_0 - \delta, x_0] \subseteq E \qquad ([x_0, x_0 + \delta) \subseteq E)$$

и нека

$$\Delta x < 0 \qquad (\Delta x > 0)$$

е нараснување на аргументот со особина $x_0 + \Delta x$ да припаѓа на E. Ако постои конечна лева (десна) гранична вредност на количникот

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

кога $\Delta x \to 0 - 0$ ($\Delta x \to 0 + 0$), тогаш таа се нарекува лев (десен) прв извод на функцијата f во однос на независната променлива x во точката x_0 со ознака

$$f_-'(x_0) \qquad (f_+'(x_0)).$$

Според дефиницијата 8.2 едностраните конечни гранични вредности

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

и

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

се еднострани први изводи (лев и десен) на функцијата f во точката x_0.

Од дефинициите 8.1 и 8.2, во согласност со теоремата 5.3, може да се заклучи дека од егзистенцијата на првиот извод на функцијата f следува егзистенција и еднаквост на првиот лев и првиот десен извод на функцијата f во определена точка, и обратно.

Да забележиме дека првиот лев или првиот десен извод на функцијата f во определена точка можат да постојат, но да не постои првиот извод на функцијата f во таа точка.

***Дефиниција* 8.3**. Ако граничната вредност

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

постои и е $+\infty$ или $-\infty$ (не е конечен број), тогаш велиме дека функцијата f има извод $+\infty$ или $-\infty$ во точката x_0. Ако пак постојат соодветни еднострани гранични вредности

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

или

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

и се $+\infty$ или $-\infty$, тогаш тие се нарекуваат еднострани бесконечни изводи (лев и десен) на функцијата f во точката x_0.

***Дефиниција* 8.4.** Нека функцијата f има прв извод $f'(x)$ во секоја точка $x \in (a, b)$. Тогаш можеме да дефинираме на (a, b) нова функција $f' : x \to f'(x)$ како изводна функција.

***Пример* 8.1.** Нека

$$f(x) = c \qquad (c \text{ е константа}),$$

нека a е внатрешна точка од дефинicionата област R и нека Δx е нараснување на аргументот x во точката a. Тогаш

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}[f(a+\Delta x) - f(a)] = \frac{1}{\Delta x}(c-c) = 0$$

и според дефиницијата

$$f'(a) = 0.$$

***Пример* 8.2.** Нека

$$f(x) = x^n,$$

нека x_0 е внатрешна точка од дефиниционата област R и нека h е нараснување на аргументот x во точката x_0. Тогаш

$$\frac{1}{h}\Delta y = \frac{1}{h}[(x_0+h)^n - x_0^n] =$$

$$\frac{1}{h}[(x_0+h) - x_0]\cdot[(x_0+h)^{n-1} + (x_0+h)^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}] =$$

$$(x_0+h)^{n-1} + (x_0+h)^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1},$$

па граничната вредност од количникот $\frac{1}{h}\Delta y$, кога $h \to 0$, ќе биде

$$nx_0^{n-1}.$$

Значи,

$$f'(x_0) = n \cdot x_0^{n-1}.$$

***Пример* 8.3.** Нека

$$f(x) = \cos x,$$

нека x_0 е внатрешна точка од дефиниционата област R и нека h е нараснување на аргументот x во точката x_0. Тогаш

$$\frac{1}{h}\Delta y = \frac{1}{h}\,[\cos(x_0 + h) - \cos x_0] =$$

$$\frac{1}{h}\{-2[\sin(x_0 + \frac{h}{2})]\cdot\sin\frac{h}{2}\} =$$

$$-\,[\sin(x_0 + \frac{h}{2})]\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.$$

Користејќи една од специјалните гранични вредности (пример 5.9, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$) и непрекинатоста на функцијата синус, граничната вредност од количникот кога $h \to 0$ ќе биде $-\sin x_0$. Значи $f'(x_0) = -\sin x_0$.

***Пример* 8.4.** Нека

$$f(x) = e^x \ (= \exp x),$$

нека x_0 е внатрешна точка од дефиниционата област R и нека h е нараснување на аргументот x во точката x_0. Тогаш

$$\frac{1}{h}\Delta y = \frac{1}{h}[\exp(x_0+h) - \exp x_0] = (\exp x_0)\frac{e^h - 1}{h}.$$

Користејќи една од специјалните гранични вредности (пример 5.12, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$), граничната вредност од количникот кога $h \to 0$ ќе биде e^{x_0}. Значи,

$$f'(x_0) = \exp x_0 = e^{x_0}.$$

***Пример* 8.5.** Нека

$$f(x) = \sqrt{x}\,,$$

нека x_0 е внатрешна точка од дефиниционата област $R^+ \cup \{0\}$ и нека h е нараснување на аргументот x во точката x_0. Тогаш

$$\frac{1}{h}\Delta y = \frac{1}{h}[\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}\,] = \frac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}.$$

Користејќи соодветни особини и теореми за гранични вредности и непрекинатост на степенска функција, граничната вредност од количникот кога $h \to 0$ ќе биде $\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. Значи,

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

***Пример* 8.6.** Нека

$$f(x) = |x|,$$

нека $x_0 = 0$ и нека h е нараснување на аргументот x во точката 0. Тогаш за $h > 0$:

$$\frac{1}{h}\Delta y = \frac{1}{h}(h - 0) = 1,$$

а за $h < 0$:

$$\frac{1}{h}\Delta y = \frac{1}{h}\,(-h - 0) = -1.$$

Според тоа, ќе постојат еднострани гранични вредности од количникот

$$F(h) = \frac{1}{h}\Delta y$$

кога $h \to 0$, и тоа

$$F(h - 0) = -1 = f_-'(0);$$

$$F(h + 0) = 1 = f_+'(0).$$

Бидејќи левата и десната гранична вредност на количникот $F(h)$, односно левиот и десниот извод на функцијата f, се различни, заклучуваме дека не постои гранична вредност од количникот кога $h \to 0$, што значи не постои извод на оваа функција f во точката $x_0 = 0$.

***Пример* 8.7.** Нека е дадена функција f со формулите

$$f(x) = 0 \quad \text{за} \quad x \in Q \qquad \text{и} \qquad f(x) = x^2 \quad \text{за} \quad x \in I.$$

Оваа функција има прекин во сите точки $x \neq 0$, но има извод во точката $x = 0$.

Решение: Навистина, ако $h \in Q$ е нараснување на променливата x во точката $x = 0$ и ако $h \in Q$, тогаш постои граничната вредност

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

Ако пак $h \in I$, тогаш постои и граничната вредност

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2-0}{h} = 0,$$

што значи дека постои извод

$$f'(0) = 0.$$

Со користење на дефиницијата за гранична вредност според Хајне (со низи) се покажува дека оваа функција има прекин во сите точки $x \neq 0$.

***Дефиниција* 8.5.** Ако функцијата f има конечен извод во точката x_0, тогаш велиме дека функцијата f е диференцијабилна во точката x_0.

Нека функцијата f има конечен извод $f_x'(x_0)$. Тогаш

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f_x'(x_0),$$

односно

$$\lim_{h\to 0} \left\{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f_x'(x_0)\right\} = 0,$$

што значи дека функцијата

$$\alpha(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f_x'(x_0)$$

е бесконечно мала функција кога $h \to 0$.

Од последното равенство го добиваме равенството

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h \cdot f_x'(x_0) + h \cdot \alpha(h),$$

кое во некоја литература претставува дефиниција за диференцијабилност, ставајќи

$$h \cdot \alpha(h) = \beta(h)$$

($\beta(h) = o(h)$ кога $h \to 0$) и $f'(x_0) = A$ (A е конечен број).

Дефиниција* 8.5. Нека функцијата f е дадена со формулата

$$y = f(x),$$

дефинирана на множество $E \subseteq R$, нека x_0 внатрешна точка од E и нека $\Delta x \neq 0$ е нараснување на аргументот со особина $x_0 + \Delta x$ да припаѓа на E. Ако постои конечен број A таков што

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \beta(\Delta x)$$

($\beta(\Delta x) = o(\Delta x)$ кога $\Delta x \to 0$), тогаш велиме дека функцијата f е диференцијабилна во точката x_0 .

Бидејќи лесно се покажува дека дефинициите 8.1 за прв извод и 8.5* за диференцијабилност се еквивалентни кај реална функција од една реална променлива (бројот A ќе биде всушност еднаков на $f'(x_0)$, а дефиницијата 8.5 ќе биде тврдење), овде диференцијабилноста ја дефиниравме со дефиницијата 8.5 преку извод (што нема да важи и за други функции како што се, на пример, реални функции од две реални променливи).

***Теорема* 8.1.** Ако f е диференцијабилна функција во точката x_0, тогаш е непрекината во точката x_0.

Доказ: Ќе тргнеме од веќе добиеното равенство

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h \cdot f'(x_0) + h \cdot \alpha(h)$$

од кое, кога $h \to 0$, ја добиваме граничната вредност

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = 0,$$

што значи дека f е непрекината во x_0.

Обратното тврдење не мора да важи (види го примерот 8.6).

***Теорема* 8.2.** Нека се дадени две функции f и g, диференцијабилни во точката x_0. Тогаш функциите $f \pm g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ се диференцијабилни во x_0 (за количник-функцијата се потребни и ограничувањата $g(x) \neq 0$ за сите x од некоја околина на x_0 која □ припаѓа на дефиниционата област на g и $g'(x_0) \neq 0$). При тоа важат следните правила:

1^0. $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$;

2^0. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;

3^0. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.

Доказ: Нека $h \neq 0$ е нараснување на аргументот во точката x_0.

1^0. Формираме количник

$$\frac{1}{h}\Delta(f \pm g) = \frac{1}{h}[(f \pm g)(x_0 + h) - (f \pm g)(x_0)] =$$

$$= \frac{1}{h}[f(x_0 + h) - f(x_0)] \pm \frac{1}{h}[g(x_0 + h) - g(x_0)].$$

Користејќи ги соодветните особини и теореми за гранични вредности, како и условот на теоремава, граничната вредност од количникот кога $h \to 0$ ќе постои и ќе биде еднаква на $f'(x_0) \pm g'(x_0)$.

2^0. Формираме количник

$$\frac{1}{h}\Delta(f\cdot g) = \frac{1}{h}[(f\cdot g)(x_0 + h) - (f\cdot g)(x_0)] =$$

$$\frac{1}{h}[f(x_0 + h)\cdot g(x_0 + h) - f(x_0)\cdot g(x_0 + h) + f(x_0)\cdot g(x_0 + h) - f(x_0)\cdot g(x_0)] =$$

$$\left[\frac{\Delta f}{h}\cdot g(x_0 + h)\right] + \left[\frac{\Delta g}{h}\cdot f(x_0)\right].$$

Користејќи ги соодветните особини и теореми за гранични вредности и непрекинатост на функцијата g, како и условот на теоремава, граничната вредност од количникот кога $h \to 0$ ќе постои и ќе биде еднаква на

$$f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

3^0. Формираме количник

$$\frac{1}{h}\Delta\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{h}\left[\left(\frac{f}{g}\right)(x_0 + h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{g(x_0)\cdot g(x_0 + h)}\left[\frac{\Delta f}{h}\cdot g(x_0) - \frac{\Delta g}{h}\cdot f(x_0)\right].$$

Користејќи ги соодветните особини и теореми за гранични вредности и непрекинатост, како и условот на теоремава, граничната вредност од количникот кога $h \to 0$ ќе постои и ќе биде еднаква на

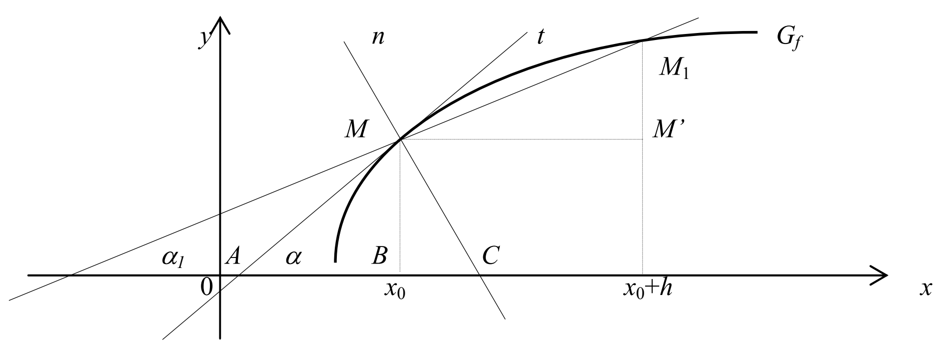
$$\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0) - f(x_0)\cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

8.2. ГЕОМЕТРИСКО И ДРУГИ ТОЛКУВАЊА НА ПРВИОТ ИЗВОД

Нека е дадена функција f со дефинициона област D_f и график G_f кој може геометриски да се претстави со крива во даден правоаголен координатен систем и нека е диференцијабилна во точката $x_0 \in D_f$. Нека h е нараснување на аргументот. Дефинираме права низ точките $M(x_0, f(x_0)) \in G_f$ и $M_1(x_0 + h, f(x_0 + h)) \in G_f$, која зафаќа агол α_1 со позитивната насока на оската x. При граничниот процес кога $h \to 0$, а геометриски гледано кога точката $M_1 \in G_f$ се приближува кон точката $M \in G_f$, останувајќи на кривата со која е претставен графикот G_f, правата MM_1, наречена сечица, ќе се приближува кон права која се нарекува тангента на кривата во точката M. Нека со α го означиме аголот што го зафаќа тангентата со позитивната насока на оската x и нека го разгледаме триаголникот $MM'M_1$, каде $M'(x_0 + h, f(x_0))$. Тогаш

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{1}{h}\,\overline{M_1M'} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\Delta f(x_0),$$

од каде $\alpha_1 = \mathrm{arctg}[\frac{1}{h}\Delta f(x_0)]$, па значи дека α_1 зависи од h, т.е. е функција од h. Според условот функцијата f има извод во точката x_0 и, аналитички гледано, кога $h \to 0$ граничната вредност од десната страна постои и е еднаква на $\mathrm{arctg}\, f'(x_0)$ (со користење на непрекинатоста на функцијата arctg). Геометриски таа гранична вредност од α_1 кога $h \to 0$ е всушност аголот α, така што се добива $\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0)$. Значи, геометриски првиот извод во точката x_0 е тангенс од аголот што го зафаќа тангентата на кривата повлечена во точката M со позитивната насока на оската x, односно е коефициент на правецот на тангентата (цртеж 26).



Цртеж 26

Во согласност со тоа равенката на тангентата е

$$y - y_0 = f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

а равенката на нормалата е

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0), \qquad f'(x_0) \neq 0.$$

Од цртежот 26 и од соодветните триаголници се добиваат бројните карактеристики:

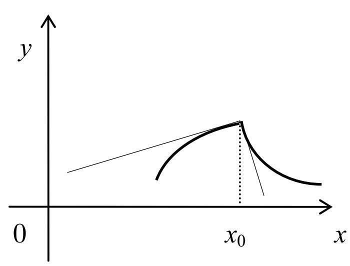
$$\overline{MA} = T = \frac{1}{f'(x_0)}\cdot[y_0\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2}\,] \text{ (должина на тангента)},$$

$$\overline{MC} = N = y_0\cdot\sqrt{1+\left(f'(x_0)\right)^2} \text{ (должина на нормала)},$$

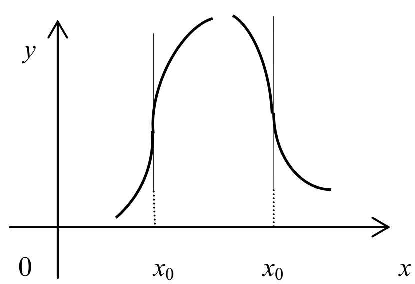
$$\overline{AB} = S_t = \frac{1}{f'(x_0)}\cdot y_0, \quad f'(x_0) \neq 0 \text{ (субтангента)},$$

$$\overline{BC} = S_n = y_0\cdot f'(x_0), \quad \text{каде што } y_0 = f(x_0) \text{ (субнормала)}.$$

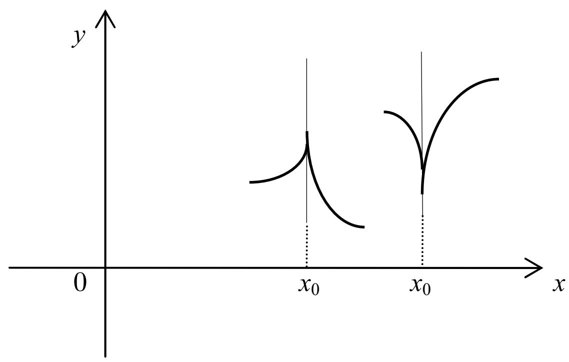
Геометриски гледано, ако не постои прв извод во соодветната точка од графикот на функцијата, а постојат еднострани изводи (лев или десен), тогаш имаме еднострани тангенти со коефициент на правец еднаков со соодветниот едностран извод (цртеж 27). Исто така во случај кога првиот извод е $+\infty$ или $-\infty$, геометриски гледано, графикот на функцијата во соодветната точка ќе има тангента паралелна со оската y (цртеж 28). Ако пак постојат еднострани први изводи кои се $+\infty$ или $-\infty$ и не се еднакви меѓусебно, тогаш геометриски гледано графикот на функцијата во соодветната точка ќе има тангента паралелна со оската y (цртеж 29).



Цртеж 27



Цртеж 28



Цртеж 29

***Дефиниција* 8.6.** Нека f и g се две функции чии графици можат геометриски да се претставaт во правоаголен координатен систем и нека се диференцијабилни во точката x_0, при што $f(x_0) = g(x_0)$. Тогаш под агол меѓу двете криви G_f и G_g, кои се графици на функциите f и g, се подразбира аголот φ меѓу соодветните тангенти на кривите повлечени во точката со апциса x_0. Аголот φ се пресметува со формулата

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{1}{1 + f'(x_0)\cdot g'(x_0)}\,[g'(x_0) - f'(x_0)].$$

Нека едно тело се движи и поминува пат чија должина зависи од поминатото време со функционална зависност $s(t)$ (закон на движење). Нека во моментот $t = t_0$ телото има поминато пат со должина $s(t_0)$ и нека по извесно време Δt (нараснување) поминало пат со должина $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Ако притоа движењето е рамномерно праволиниско, тогаш количникот $\frac{1}{\Delta t}[s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)]$ ќе претставува една карактеристика на движењето наречена средна брзина за време Δt. Граничната вредност од тој количник (ако постои) кога $\Delta t \to 0$, при движење кое не мора да е рамномерно праволиниско, ќе даде една друга карактеристика на движењето во моментот $t = t_0$, наречена моментална брзина, која аналитички гледано е всушност првиот извод на патот s во однос на времето t, т.е.

$$s'(t_0) = v(t_0).$$

Нека е позната функција

$$Q = f(t)$$

која го изразува количеството на електрицитет кое поминало низ фиксен напречен пресек на даден спроводник за време t. За период Δt од t_0 до $t_0 + \Delta t$ низ пресекот ќе протече количество електрицитет дадено со

$$\Delta Q = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0).$$

Притоа средната брзина на протокот ќе биде дадена со количникот $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$. При граничен процес $\Delta t \to 0$ се добива брзината на протокот во моментот t_0, која аналитички гледано е всушност првиот извод на функцијата f во однос на времето t, т.е.

$$f'(t_0) = I(t_0),$$

и која ја дава јачината на електричната струја.

Кај реалните функции од една променлива можеме да констатираме дека изводот во точката x_0 може да се разгледува и како брзина на промена на вредностите на функцијата во некоја околина на таа точка. Тоа значи дека при поголем извод како број треба да се очекува поголема промена на вредностите на функцијата. Според геометриското толкување на првиот извод, тој претставува аглов коефициент (коефициент на правец) на тангентата како права, повлечена во точка $(x_0, f(x_0))$ од графикот (кривата) на функцијата f. Нека

$$\vec{t}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta\}$$

е единичниот вектор на тангентата, при што

$$\mathrm{tg}\alpha = f'(x_0), \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Тогаш

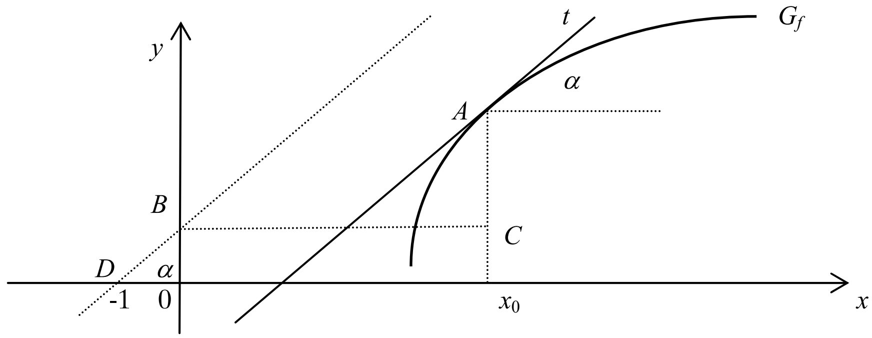
$$\frac{1}{\cos\alpha}\vec{t}_0 = \{1, \mathrm{tg}\alpha\} = \{1, f'(x_0)\}.$$

Ова е геометриско толкување и на големината на изводот како број и овозможува геометриско диференцирање прикажано на цртежот 30.

Притоа имаме

$$A(x_0, f(x_0)) \in G_f; \quad D(-1, 0); \quad \overline{OD} = 1; \quad \angle ODB = \alpha;$$

$$f'(x_0) = \mathrm{tg}\alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}} = \overline{OB}; \qquad C(x_0, f'(x_0)) \in G_{f'}.$$



Цртеж 30

Значи, при даден график (крива) на една функција f, диференцијабилна на интервалот (a, b), може геометриски да се добие график на нејзината изводна функција f' на тој интервал.

8.3. ИЗВОД ОД СЛОЖЕНА И ИНВЕРЗНА ФУНКЦИЈА. ИЗВОД ОД ПАРАМЕТАРСКИ ЗАДАДЕНА ФУНКЦИЈА

***Теорема* 8.3.** Нека се дадени две функции f и g, при што g не е функција-константа и нека постои сложена функција $h = g\text{o}f$. Ако f е диференцијабилна во точката x_0 и g е диференцијабилна во точката $y_0 = f(x_0)$, тогаш сложената функција h е диференцијабилна во точката x_0 и притоа важи правилото

$$h'_x(x_0) = g'_y(y_0)\cdot f'_x(x_0).$$

Да забележиме дека со y го означивме аргументот за функцијата g, а со x аргументот за функцијата f, кои во сложената функција h се во функционална врска $y = f(x)$ (y е зависна променлива од независно променливата x).

Доказ: Нека $\Delta x \neq 0$ е нараснување на променливата x во точката x_0,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

соодветното нараснување на функцијата f, кое истовремено ќе биде и нараснување на променливата y во точката $y_0 = f(x_0)$ со соодветно нараснување на функцијата g,

$$\Delta g = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0).$$

За сложената функција h ќе имаме соодветно нараснување

$$\Delta h = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0).$$

Од друга страна, во согласност со дефиницијата 8.5* за диференцијабилност ќе важи равенството

$$\Delta g = \Delta y \cdot [g'_y(y_0) + \alpha(\Delta y)]$$

за $\Delta y \neq 0$, каде што $\alpha(\Delta y)$ е бесконечно мала функција кога $\Delta y \to 0$. Со додефинирање на бесконечно малата функција $\alpha(\Delta y)$, ставајќи $\alpha(0) = 0$, истото равенство ќе важи и за $\Delta y = 0$ (потребно, бидејќи од $\Delta x \neq 0$ не е очевидно дека следува и $\Delta y \neq 0$). Тогаш во согласност со дефиницијата 4.6 за сложена функција го трансформираме количникот $\dfrac{\Delta h}{\Delta x}$ на следниот начин:

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}[h(x_0 + \Delta \mathrm{x}) - h(x_0)] = \frac{1}{\Delta x}[(g\mathrm{o}f)(x_0 + \Delta x) - (g\mathrm{o}f)(x_0)] =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}[g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))] = \frac{1}{\Delta x}[g(f(x_0) + \Delta y) - g(f(x_0))] =$$

$$= \frac{1}{\Delta x}[g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)] = \frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\Delta y[g'_y(y_0) + \alpha(\Delta y)] =$$

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x}[g'_y(y_0) + \alpha(\Delta y)] = \frac{1}{\Delta x}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]\,[g'_y(y_0) + \alpha(\Delta y)]\,.$$

Нека $\Delta x \to 0$. Функциите f и g се диференцијабилни во точката x_0, односно во точката $y_0 = f(x_0)$ (што значи и непрекинати). Тогаш $\Delta y \to 0$ и ќе постојат граничните вредности од изразите

$$\frac{1}{\Delta x}\,[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]$$

и

$$g'_y(y_0) + \alpha(\Delta y).$$

Според тоа, ќе постои гранична вредност од количникот $\dfrac{\Delta h}{\Delta x}$, која според дефиниција 8.1 е извод на сложената функција h во точката x_0 во однос на променливата x.

Со тоа е добиено и соодветното правило

$$h'_x(x_0) = g'_y(y_0)\cdot f'_x(x_0).$$

Обично променливата y се нарекува преносна променлива, односно функцијата f се нарекува преносна функција.

***Пример* 8.8.** Нека

$$h(x) = (2x + 1)^{1000}.$$

Ставајќи

$$y = f(x) = 2x + 1, \qquad g(y) = y^{1000},$$

добиваме

$$f'_x(x_0) = 2, \qquad g'_y(y_0) = 1000\cdot y_0^{999}$$

и со примена на добиеното правило добиваме

$$h'_x(x_0) = 1000\cdot y_0^{999}\cdot 2 = 2000\cdot(2x_0 + 1)^{999}.$$

***Пример* 8.9.** Нека

$$h(x) = \ln[x + \sqrt{x^2 + a^2}\,].$$

Ставајќи

$$y = f(x) = x + \sqrt{x^2 + a^2}\,, \qquad g(y) = \ln y,$$

доаѓаме до проблем за примена на теоремата 8.3, бидејќи $f_x'(x)$ не е извод од елементарна функција. За да се најде тој прв извод, ќе ја примениме најпрвин теоремата 8.3 само на функцијата

$$h^*(x) = \sqrt{x^2 + a^2}$$

ставајќи со помош на нова функција F нова преносна променлива

$$t = F(x) = x^2 + a^2$$

и нова функција

$$G(t) = \sqrt{t}\,.$$

Бидејќи

$$F'_x(x_0) = 2x_0, \qquad G'_t(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{t_0}}\,,$$

според теоремата 8.3 добиваме

$$h_x^*{}'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{t_0}}\,2x_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + a^2}}\,x_0.$$

Користејќи го овој резултат, се добива

$$f_x'(x_0) = 1 + h_x^*{}'(x_0) = 1 + x_0\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + a^2}}$$

и со повторно користење на теоремата 8.3 се добива

$$h_x'(x_0) = \frac{1}{y_0}\,(1 + x_0\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + a^2}}) = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + a^2}}\,(1 + x_0\frac{1}{\sqrt{x_0^2 + a^2}}) = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + a^2}}\,.$$

Притоа секогаш се претпоставува дека сите функции се диференцијабилни во соодветната точка.

Од овие примери може да се согледа големата примена на правилото за извод на сложена функција.

***Теорема* 8.4.** Нека е дадена функција f диференцијабилна во точката x_0, при што $f_x'(x_0) \neq 0$, и нека постои нејзина инверзна функција f^{-1} во некоја околина на точката x_0 во која f е строго монотоно растечка (опаѓачка). Тогаш инверзната функција f^{-1} е диференцијабилна во точката $y_0 = f(x_0)$ и притоа важи правилото

$$f_x'(x_0)\cdot(f^{-1})'_y(y_0) = 1.$$

Доказ: Најпрвин да забележиме дека според теоремата 6.3 и дефиницијата 4.7 за инверзна функција, функцијата f^{-1} е непрекината во точката y_0 и е строго монотоно растечка (опаѓачка) (во зависност од f) во некоја околина на точката y_0. Понатаму, со x ќе ја означуваме променливата за функцијата f, а со y променливата за функцијата f^{-1}. Нека $\Delta y \neq 0$ е нараснување на променливата y во точката y_0 и

$$\Delta f^{-1} = f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)$$

соодветното нараснување на функцијата f^{-1}. Бидејќи

$$f^{-1}(y) = x$$

ако и само ако

$$y = f(x),$$

добиваме

$$f^{-1}(f(x_0) + \Delta y) = x_0 + \Delta f^{-1},$$

односно

$$f(x_0) + \Delta y = f(x_0 + \Delta f^{-1})$$

или

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta f^{-1}) - f(x_0),$$

што значи дека $\Delta f^{-1} = \Delta x$ е всушност нараснување на променливата x во точката x_0 кое одговара на нараснувањето Δy. Поради строгата монотоност имаме

$$\Delta y \neq 0 \Rightarrow \Delta x \neq 0$$

и тогаш ќе важи

$$\frac{\Delta f^{-1}}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Нека $\Delta y \to 0$, што повлекува и $\Delta x \to 0$ (бидејќи f^{-1} е непрекината функција). Тогаш ќе постои гранична вредност од десната страна на последното равенство кога $\Delta x \to 0$ еднаква на $\dfrac{1}{f_x'(x_0)}$ (при услов $f_x'(x_0) \neq 0$), од што следува дека постои гранична вредност кога $\Delta y \to 0$ и од левата страна. Според дефиницијата 8.1 таа гранична вредност ќе биде извод на инверзната функција f^{-1} во точката y_0 и ќе важи правилото

$$f_x'(x_0) \cdot (f^{-1})'_y(y_0) = 1.$$

***Пример* 8.10.** Функцијата

$$f(x) = \arcsin x$$

е инверзна функција на функцијата

$$f^{-1}(y) = \sin y$$

на соодветен сегмент, каде што $y = f(x)$, т.е. $x = \sin y$. Нека x_0 е точка од тој сегмент, различна од ± 1. Бидејќи

$$(f^{-1})_y'(y_0) = \cos y_0,$$

според правилото ќе имаме

$$f_x'(x_0) = \frac{1}{\cos y_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y_0}} = \frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}.$$

***Пример* 8.11.** Функцијата

$$f(x) = \mathrm{arctg}x$$

е инверзна функција на функцијата

$$f^{-1}(y) = \mathrm{tg}y$$

на соодветен интервал, при што $y = \mathrm{arctg}x$, т.е. $x = \mathrm{tg}y$. Бидејќи

$$(f^{-1})_y'(y_0) = \frac{1}{\cos^2 y_0},$$

според правилото

$$f_x'(x_0) = \cos^2 y_0 = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y_0} = \frac{1}{1+x_0^2}.$$

***Теорема* 8.5.** Нека е дадена функција f, зададена со параметарските равенки

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t),$$

каде што $y = f(x)$, при што функциите φ и ψ се дефинирани на сегментот $[\alpha, \beta]$ и диференцијабилни на интервалот (α, β). Ако

$$\varphi_t'(t_0) \neq 0 \qquad (t_0 \in (\alpha, \beta)),$$

тогаш важи правилото

$$f_x'(x_0) = \frac{\psi_t'(t_0)}{\varphi_t'(t_0)},$$

каде $x_0 = \varphi(t_0)$.

Доказ: Бидејќи

$$f(x) = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)) = (\psi \circ \varphi^{-1})(x),$$

за докажување се користи правилото за извод на сложена и инверзна функција и се добива

$$f_x'(x_0) = \psi_t'(t_0)\cdot(\varphi^{-1})_x'(x_0) = \psi_t'(t_0)\cdot\frac{1}{\varphi_t'(t_0)} = \frac{\psi_t'(t_0)}{\varphi_t'(t_0)}.$$

ТАБЕЛА НА ИЗВОДИ НА НЕКОИ ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

	Функција	Изводна функција	Забелешка
1^0	C	0	C–константа
2^0	x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$n\in Z$
3^0	a^x	$a^x\cdot\ln a$	$a>0$
4^0	x^α	$\alpha\cdot x^{\alpha-1}$	$x>0,\ \alpha\in R$
5^0	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\cdot\log_a e$	$x>0,\ a>0$
6^0	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x>0$
7^0	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$x\neq 0$
8^0	$\sin x$	$\cos x$	
9^0	$\cos x$	$-\sin x$	
10^0	$\mathrm{tg}x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in Z$
11^0	$\mathrm{ctg}x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$x\neq k\pi,\ k\in Z$
12^0	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
13^0	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
14^0	$\mathrm{arctg}x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
15^0	$\mathrm{arcctg}x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	
16^0	$\mathrm{sh}x$	$\mathrm{ch}x$	
17^0	$\mathrm{ch}x$	$\mathrm{sh}x$	
18^0	$\mathrm{th}x$	$\frac{1}{\mathrm{sh}^2x}$	
19^0	$\mathrm{cth}x$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2x}$	

8.4. ПРВ ДИФЕРЕНЦИЈАЛ НА ФУНКЦИЈА. ГЕОМЕТРИСКО ТОЛКУВАЊЕ НА ПРВИОТ ДИФЕРЕНЦИЈАЛ. ИНВАРИЈАНТНОСТ НА ФОРМАТА

Нека функцијата f, дадена со формулата $y = f(x)$, е диференцијабилна во точката x_0 и нека Δx е нараснување на аргументот x во x_0. Тогаш нараснувањето Δy може да се претстави во вид

$$\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \Delta x\cdot\alpha(\Delta x),$$

каде што $\alpha(\Delta x)$ е бесконечна мала функција кога $\Delta x \to 0$. Да забележиме дека Δy е претставен како сума од два производа од кои првиот се нарекува главен дел и е линеарна хомогена функција од Δx ($f'(x_0)$ е костанта).

Бидејќи

$$\Delta x\cdot\alpha(\Delta x) = o(\Delta x) \qquad \left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot[\Delta x\cdot\alpha(\Delta x)] = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0\right),$$

ќе го имаме видот

$$\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x).$$

Според тоа, при $\Delta x \to 0$ нараснувањето Δy може да се апроксимира со линеарна функција од Δx, односно Δy и $f'(x_0)\cdot\Delta x$ се бесконечно мали функции од ист ред кога $\Delta x \to 0$ (т.е. $\Delta y = O(f'(x_0)\cdot\Delta x)$).

***Дефиниција* 8.7.** Главниот дел на нараснувањето Δy на функцијата f кое одговара на нараснувањето на аргументот Δx се нарекува диференцијал на функцијата во точката x_0 кој одговара на соодветното нараснување Δx.

Поимот диференцијал прв го вовел Лајбниц. Диференцијалот се означува со

$$\mathrm{d}y; \qquad \mathrm{d}f; \qquad \mathrm{d}f(x_0)$$

и во тој случај $\mathrm{d}y = f'(x_0)\cdot\Delta x$.

Ако $f'(x_0) = 0$, тогаш според дефиниција се зема $\mathrm{d}y = 0$ во таа точка x_0. Во општ случај Δy и $\mathrm{d}y$, кои одговараат на едно исто нараснување Δx, не се еднакви. Сепак за доволно мали вредности на Δx, ќе важи апроксимативната релација $\Delta y \approx \mathrm{d}y$, од која се добива приближната формула

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

Со таа формула можеме да ја најдеме приближната вредност на функцијата во некоја точка од доволно мала околина на точката x_0 со помош на една едноставна линеарна функција во однос на Δx ($f(x_0)$ и $f'(x_0)$ се константи).

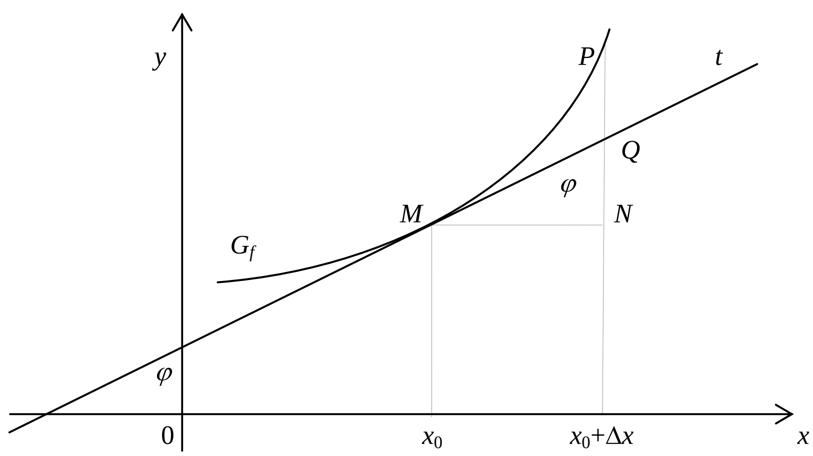
***Пример* 8.12.** За

$$f(x) = e^x$$

во $x_0 = 0$ се добива приближната формула

$$e^{\Delta x} \sim 1 + \Delta x.$$

Нека е дадена функција f со график G_f. Според цртежот 31 $\overline{NQ} = \mathrm{d}y$ (од ΔMNP се добива $\mathrm{tg}\varphi = f'(x_0)$ и $\overline{MN} = \Delta x$) и $\overline{PN} = \Delta y$, што претставува геометриска интерпретација на диференцијалот $\mathrm{d}y$.



Цртеж 31

По договор нараснувањето Δx кај диференцијалот ќе го означуваме со $\mathrm{d}x$ како диференцијал од x, т.е. $\Delta x = \mathrm{d}x$. Овој договор може да се оправда ако се земе специјална функција

$$f(x) = x$$

и тогаш

$$\mathrm{d}f(x) = 1\cdot\Delta x$$

односно

$$\mathrm{d}x = \Delta x.$$

Според тој договор диференцијалот може да се запише во вид

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\cdot\mathrm{d}x,$$

од каде доаѓа и ознаката за првиот извод

$$f\,'(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},$$

како вистинска дропка.

Сега да го разгледаме поимот диференцијал од две страни. Прво, кога аргументот е независна променлива и, второ, кога аргументот се јавува како диференцијабилна функција од вид

$$x = \varphi(t)$$

од некоја нова променлива која ќе ја сметаме за независна променлива (како кај сложените функции). Во првиот случај имаме

$$\mathrm{d}y = f_x'(x_0)\cdot\mathrm{d}x,$$

при што

$$f_x'(x_0) \neq 0.$$

Во вториот случај ќе имаме сложена функција $h = f\circ\varphi$ дефинирана со формулата

$$h(t) = y = f(\varphi(t)),$$

за која аргумент е t. Во согласност со правилото за извод од сложена функција се добива

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}h(t_0) = h'(t_0)\mathrm{d}t = [f_x'(x_0)\cdot\varphi_t'(t_0)]\mathrm{d}t =$$

$$f_x'(x_0)\cdot[\varphi_t'(t_0)\cdot\mathrm{d}t] = f_x'(x_0)\cdot\mathrm{d}x \qquad (x_0 = \varphi(t_0)),$$

бидејќи од своја страна $\mathrm{d}x = \varphi_t'(t_0)\cdot\mathrm{d}t$.

Притоа $\mathrm{d}x$ е земен во однос на нараснувањето $\mathrm{d}t$, а $\mathrm{d}y$ во однос на нараснувањето $\mathrm{d}x$, а со тоа и во однос на нараснувањето $\mathrm{d}t$.

Со тоа покажавме дека и во двата случаја се добива иста форма на диференцијалот, т.е. таа е инваријантна.

Инваријантноста на формата на првиот диференцијал има примена при наоѓање прв извод на имплицитно зададена функција. Нека функцијата f е имплицитно зададена со равенката

$$F(x, y) = 0,$$

каде што

$$y = f(x).$$

Со користење на особините на првиот диференцијал и инваријантноста на неговата форма, сметајќи ја y како сложена функција од x, од равенката

$$\mathrm{d}F(x, y) = 0$$

се добива

$$F_1(x, y)\mathrm{d}x + F_2(x, y)\mathrm{d}y = 0$$

од каде

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_1(x,y)}{F_2(x,y)},$$

под услов да е

$$F_2(x, y) \neq 0.$$

***Пример* 8.13.** Нека

$$F(x, y) \equiv x^3 - (x^2 + y^2)e^{-y} = 0.$$

Тогаш

$$\mathrm{d}F(x, y) \equiv 3x^2\mathrm{d}x - (2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y)e^{-y} + (x^2 + y^2)e^{-y}\mathrm{d}y = 0,$$

од каде се добива првиот извод

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{3x^2 - 2xe^{-y}}{(x^2 + y^2 - 2y)e^{-y}}$$

во точките во кои

$$x^2 + y^2 - 2y \neq 0.$$

Сите аритметички операции со изводи ќе важат и за диференцијали, што лесно се докажува согласно со дефиницијата за прв диференцијал и аритметичките операции со изводи т.е.

$\mathrm{d}(Cf(x_0)) = C\mathrm{d}(f(x_0))$, ($C$–константа);

$\mathrm{d}(f \pm g)(x_0) = \mathrm{d}f(x_0) \pm \mathrm{d}g(x_0)$;

$\mathrm{d}(f\cdot g)(x_0) = g(x_0)\cdot\mathrm{d}f(x_0) + f(x_0)\cdot\mathrm{d}g(x_0)$;

$\mathrm{d}(\frac{f}{g})(x_0) = \dfrac{1}{g^2(x_0)}[g(x_0)\cdot\mathrm{d}f(x_0) - f(x_0)\cdot\mathrm{d}g(x_0)]$.

Притоа сите диференцијали се во однос на едно исто нараснување.

8.5. ИЗВОДИ И ДИФЕРЕНЦИЈАЛИ ОД ПОВИСОК РЕД

***Дефиниција* 8.8.** Ако постои прв извод од изводната функција f' во точката $x_0 \in (a, b)$, тогаш тој се нарекува втор извод на функцијата f во точката x_0 и се означува со $f''(x_0)$ или $f_{xx}''(x_0)$. Значи,

$$f''(x_0) = (f'(x))'(x_0).$$

Понекогаш се користат и ознаките y'', $y''(x_0)$ и други во зависност од тоа дали треба да се потенцира ознаката на независната променлива во однос на која се бара изводот или ознаката на точката во која се бара изводот.

***Дефиниција* 8.9.** За природен број n под n-ти извод (или извод од ред n) на функцијата f во точката $x_0 \in (a, b)$ се подразбира првиот извод (ако постои) од $(n-1)$-та изводна функција на функцијата f, т.е.

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x))'(x_0),$$

под претпоставка дека постои $(n-1)$-та изводна функција дефинирана во некоја околина на x_0.

***Дефиниција* 8.10.** Диференцијал од втор ред е прв диференцијал од првиот диференцијал на функцијата f во точката x_0 со ознака $\mathrm{d}^2 f(x_0)$ или $\mathrm{d}^2 y$, при што двата диференцијала еден по друг се земени во однос на едно исто нараснување на независната променлива.

Во општ случај за природен број n n-тиот диференцијал се дефинира со

$$\mathrm{d}^n f(x_0) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} f(x))(x_0),$$

при што сите претходни диференцијали се земени во однос на едно исто нараснување.

Всушност, за да се добие вториот диференцијал, првиот диференцијал се зема како функција дефинирана како производ од изводната функција f', дефинирана во некоја околина на точката x_0, и едно исто нараснување $\mathrm{d}x$. Потоа од таа функција

$$f'(x)\cdot \mathrm{d}x,$$

која зависи од x и е дефинирана во некоја околина на точката x_0 ($\mathrm{d}x$ се третира како константа), се зема диференцијал во точката x_0, но во однос на истото нараснување $\mathrm{d}x$ во однос на кое е земен првиот диференцијал.

За вториот диференцијал се добива следната форма:

$$\mathrm{d}^2 f(x_0) = \mathrm{d}(\mathrm{d}(f(x)))(x_0) =$$

$$\mathrm{d}(f'(x)\cdot \mathrm{d}x)(x_0) = \mathrm{d}(f'(x))(x_0)\cdot \mathrm{d}x + f'(x_0)\cdot \mathrm{d}(\mathrm{d}x) =$$

$$[f''(x_0)\cdot \mathrm{d}x]\cdot \mathrm{d}x + f'(x_0)\cdot 0 = f''(x_0)\cdot (\mathrm{d}x)^2$$

каде што

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}x) = (\mathrm{d}x)'_x\cdot \mathrm{d}x = 0,$$

бидејќи $\mathrm{d}x$ како нараснување на независната променлива не зависи од независната променлива x во однос на која се бара извод.

Истата форма се добива и со директно користење на дефиницијата за диференцијал т.е.

$$\mathrm{d}^2 f(x_0) = \mathrm{d}(\mathrm{d}(f(x))(x_0) =$$

$$\mathrm{d}(f'(x)\cdot \mathrm{d}x)(x_0) = (f'(x)\cdot \mathrm{d}x)'(x_0)\cdot \mathrm{d}x =$$

$$[f''(x_0)\cdot \mathrm{d}x + f'(x_0)\cdot (\mathrm{d}x)'_x]\cdot \mathrm{d}x = f''(x_0)\cdot (\mathrm{d}x)^2.$$

На ист начин за природен број n се добива формата

$$\mathrm{d}^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\cdot (\mathrm{d}x)^n,$$

така што за изводите од повисок ред се добиваат следните ознаки:

$$f^{(n)}(x_0); \qquad y^{(n)}; \quad \frac{1}{\mathrm{d}x^n}[\mathrm{d}^n f(x_0)]; \qquad \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n},$$

а често се користат и ознаките

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(y); \qquad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(f(x_0)).$$

Ќе покажеме дека кај вториот диференцијал во општ случај формата не е инваријантна. Имено, ако

$$x = \varphi(t),$$

тогаш

$$d^2y = (f_{xx}''(x_0)\cdot dx)\cdot dx + f_x'(x_0)\cdot d(dx) =$$

$$f_{xx}''(x_0)\cdot dx^2 + f_x'(x_0)\cdot d[\varphi_t'(t)\cdot dt](t_0) =$$

$$f_{xx}''(x_0)\cdot dx^2 + f_x'(x_0)\cdot\{d[\varphi_t'(t)](t_0)\cdot dt + \varphi_t'(t_0)\cdot d(dt)\} =$$

$$f_{xx}''(x_0)\cdot dx^2 + f_x'(x_0)\cdot\{[\varphi_{tt}''(t_0)\cdot dt]\cdot dt + \varphi_t'(t_0)\cdot d(dt)(t_0)\} =$$

$$f_{xx}''(x_0)\cdot dx^2 + f_x'(x_0)\cdot \varphi_{tt}''(t_0)\cdot dt^2,$$

каде што

$$x_0 = \varphi(t_0), \quad d(dt)(t_0) = 0.$$

***Пример* 8.14.** Нека функцијата f е зададена во параметарски вид со равенките $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и нека $x_0 = \varphi(t_0)$. Тогаш

$$f_{xx}''(x_0) = y'' = \frac{dy'}{dx}(x_0) = \frac{1}{dx}\cdot d\left(\frac{\psi_t'(t)}{\varphi_t'(t)}\right)(t_0) =$$

$$\frac{1}{\varphi_t'(t_0)\cdot dt}\cdot\left(\frac{\psi_t'(t)}{\varphi_t'(t)}\right)_t'(t_0)\cdot dt =$$

$$\frac{1}{[\varphi_t'(t_0)]^3}[\psi_{tt}''(t_0)\cdot\varphi_t'(t_0) - \psi_t'(t_0)\cdot\varphi_{tt}''(t_0)].$$

При тоа се користени правилата за диференцирање и диференцијал и се претпоставува дека постојат првите и вторите изводи на функциите f, φ и ψ во точката x_0, односно во точката t_0, во однос на променливата x односно t.

Нека се дадени две функции u и v од независната променлива x, дефинирани на исто множество E и нека постојат нивните n-ти изводи во точката $x_0 \in E$. Тогаш важи формулата (Лајбницова формула) за n-ти извод од нивниот производ

$$(u\cdot v)^{(n)} = \binom{n}{0}\cdot u^{(n)}\cdot v + \binom{n}{1}\cdot u^{(n-1)}\cdot v' + \ldots + \binom{n}{n-1}\cdot u'\cdot v^{(n-1)} + \binom{n}{n}\cdot u\cdot v^{(n)},$$

при што изводите се земаат во точката x_0 и во однос на променливата x.

Оваа формула се докажува со математичка индукција и е слична со биномната формула со тоа што место степенски показатели се употребуваат изводи, при што нулти извод е самата функција.

Вториот и останатите изводи и диференцијали наоѓаат исто така практична примена во испитувањето на некои процеси во кои се јавуваат функционални зависности, на пример забрзувањето во кинематиката и др.

§9. ОСНОВНИ ТЕОРЕМИ НА ДИФЕРЕНЦИЈАЛНОТО СМЕТАЊЕ. ТЕОРЕМИ НА ФЕРМА, РОЛ, ЛАГРАНЖ И КОШИ. ПРИВИДНО НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИЗРАЗИ. ЛОПИТАЛОВО ПРАВИЛО

При дефинирањето на поимот извод беше нагласено дека тоа е карактеристика на промената на една функција. Затоа ќе искажеме неколку теореми (тврдења) кои ќе ја сочинуваат основата за проучување на својствата на функциите со помош на изводи.

9.1. ТЕОРЕМА НА ФЕРМА

***Теорема* 9.1. (Ферма).** Нека е дадена функција f дефинирана на (a, b) и нека има локален екстрем (најголема или најмала вредност) во некоја точка $c \in (a, b)$. Ако во точката c постои извод $f'(c)$, тогаш

$$f'(c) = 0.$$

Доказ: Да претпоставиме дека $f(c)$ е локален максимум (аналогно се докажува и случајот со локален минимум), што значи дека постои околина на c

$$(c - \delta, c + \delta) \subseteq (a, b), \quad \delta > 0,$$

така што за сите x од таа околина ќе важи

$$f(x) \le f(c).$$

Нека Δx е нараснување на променливата x во точката c, така што

$$c + \Delta x \in (c - \delta, c + \delta).$$

Тогаш количникот

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

ќе има ненегативна вредност кога $\Delta x < 0$ и непозитивна вредност кога $\Delta x > 0$ (бидејќи $f(c + \Delta x) \le f(c)$). Според теоремата 5.2 граничната вредност од количникот кога $\Delta x \to 0-0$ односно $\Delta x \to 0+0$, ќе биде исто така ненегативен односно непозитивен број кој според дефиницијата 8.2 ќе биде еднаков на левиот односно десниот извод на функцијата f во точката c.

Значи,

$$f_-'(c) \geq 0 \quad \text{и} \quad f_+'(c) \leq 0.$$

Егзистенцијата на $f'(c)$ повлекува

$$f_-'(c) = f_+'(c)$$

(теорема 5.3). Сите услови (равенства и неравенства) се задоволени единствено доколку

$$f'(c) = 0,$$

со што теоремата е докажана.

9.2. ТЕОРЕМА НА РОЛ

***Теорема* 9.2 (Рол).** Нека функцијата f е дефинирана и непрекината на сегментот $[a, b]$, нека е диференцијабилна на интервалот (a, b) и нека $f(a) = f(b)$.

Тогаш постои барем една точка $c \in (a, b)$ во која $f'(c) = 0$.

Доказ: Нека f не е константа-функција (ако е константа-функција, тогаш изводот е нула во секоја точка од интервалот (a, b)). Бидејќи f според условот е непрекината на сегментот $[a, b]$, според теоремата 6.8 ја добива својата најголема и својата најмала вредност во точки од тој сегмент. Поради условот

$$f(a) = f(b)$$

најголемата и најмалата вредност не може истовремено да ги добие во крајните точки a и b. Навистина, ако

$$m = f(a) \quad \text{и} \quad M = f(b),$$

или обратно, за сите $x \in [a, b]$ ќе важи неравенството

$$f(a) = m \leq f(x) \leq M = f(b),$$

што е можно единствено за константа-функција. Значи, постои точка $c \in (a, b)$ таква што

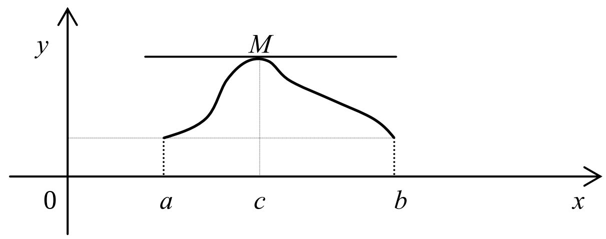
$$f(c) = m \quad \text{или} \quad f(c) = M.$$

И во двата случаја, според теоремата 9.1, ќе важи

$$f'(c) = 0,$$

со што теоремата е докажана.

Геометриската интерпретација на тврдењето се состои во констатацијата дека при дадените услови постои барем една точка $M(c, f(c))$ од графикот на функцијата таква што тангентата повлечена во неа е паралелна со оската x (цртеж 32).



Цртеж 32

9.3. ТЕОРЕМА НА ЛАГРАНЖ

Теорема **9.3 (Лагранж).** Нека функцијата f е дефинирана и непрекината на сегментот $[a, b]$ и нека е диференцијабилна на интервалот (a, b). Тогаш постои барем една точка $c \in (a, b)$ таква што важи равенството

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказ: Да дефинираме нова функција F со равенката

$$F(x) = f(x) - f(a) - [\frac{f(b) - f(a)}{b - a}]\cdot(x - a)$$

на сегментот $[a, b]$. Така дефинираната функција е непрекината на сегментот $[a, b]$, диференцијабилна на (a, b) (во согласност со теоремата соодветна на теоремата 5.5 за аритметичките операции со непрекинати функции и со теоремата 8.2) и за неа важи

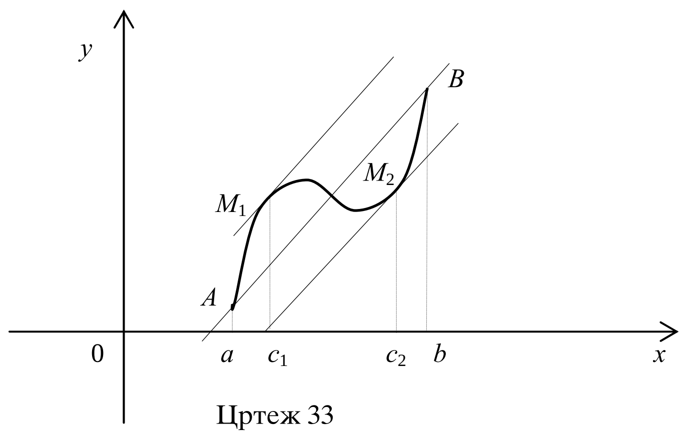
$$F(a) = F(b)$$

(што лесно се покажува со директна замена).

Значи, F ги задоволува сите услови на теоремата 9.2 и според неа ќе постои барем една точка $c \in (a, b)$ за која важи $F'(c) = 0$, од што следува и бараното равенство

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Геометриската интерпретација на тврдењето се состои во констатацијата дека под дадените услови постои барем една точка $M(c, f(c))$ од графикот на функцијата, таква што тангентата повлечена во таа точка е паралелна со правата што ги сврзува точките $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ (цртеж 33).



Цртеж 33

Оваа теорема е позната и како теорема за конечно нараснување или теорема за средна вредност. Ако се стави

$$a = x, \quad b = x + \Delta x, \quad c = x + \theta \cdot \Delta x,$$

каде што

$$0 < \theta < 1,$$

равенството ќе го има следниот вид:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x \cdot f'(x + \theta \cdot \Delta x).$$

***Последица* 9.1.** Нека функцијата f е дефинирана и непрекината на сегментот $[a, b]$ и нека е диференцијабилна на интервалот (a, b). Ако за сите x од интервалот (a, b) важи

$$f'(x) = 0,$$

тогаш функцијата е константа-функција.

Доказ: Нека x е произволна точка од интервалот (a, b). Тогаш според теоремата 9.3, применета на сегментот $[a, x]$, ќе постои барем една точка c од интервалот (a, x) за која ќе важи равенството

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Од последното равенство се добива

$$f(x) = f(a)$$

(бидејќи според условот $f'(c) = 0$ и $x \neq a$), а од произволниот избор на точката x следува дека за сите x од интервалот (a, b) ќе важи

$$f(x) = f(a),$$

што значи f е константа-функција.

Со оваа последица се докажува и тврдењето дека ако две функции f и g ги задоволуваат условите на теоремата 9.3 на сегментот $[a, b]$ и ако во сите точки од (a, b) нивните изводи се еднакви, тогаш за сите точки од (a, b) важи

$$f(x) = g(x) + K$$

(K е константа) (докажувањето се состои од дефинирање нова функција

$$F(x) = f(x) - g(x)).$$

Да забележиме дека ако и

$$f(a) = g(a),$$

тогаш $f = g$ на сегментот $[a, b]$.

***Пример* 9.1.** Да се покаже дека за $x \in [0, 1]$ важи равенството

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Решение: Со директна замена се покажува дека равенството важи за $x = 0$ и за $x = 1$. Формираме функција

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x,$$

дефинирана на интервалот (0, 1). За секое $x \in (0, 1)$ важи

$$f'(x) = 0$$

и според последицата 9.1 следува

$$f(x) = K.$$

Со директна замена на вредноста $x = \frac{1}{2}$ за константата K се добива вредноста $\frac{\pi}{2}$.

***Лема* 9.1.** Нека е дадена функција f со формулата

$$y = f(x),$$

дефинирана на интервалот (a, b), нека има конечен извод во секоја точка од интервалот

$$(c, c + \delta) \subset (a, b) \qquad ((c - \delta, c) \subset (a, b)), \qquad \delta > 0,$$

и нека постои десен извод $f_+'(c)$ (лев извод $f_-'(c)$) во точката c. Ако за изводната функција $f'(x)$, дефинирана на интервалот

$$(c, c + \delta) \qquad ((c - \delta, c)),$$

постои десна (лева) гранична вредност

$$\lim_{x \to c+0} f'(x) = f'(c + 0) \qquad (\lim_{x \to c-0} f'(x) = f'(c - 0)),$$

тогаш важи

$$f'(c + 0) = f_+'(c) \qquad (f'(c - 0) = f_-'(c)).$$

Доказ: Од условот на лемата произлегува егзистенција на граничните вредности

$$\lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f_+'(c) \qquad (\lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f_-'(c))$$

од што се добива

$$\lim_{x \to c+0} [f(x) - f(c)] = 0 \qquad (\lim_{x \to c-0} [f(x) - f(c)] = 0)$$

(се покажува на сличен начин како доказот на теоремата 8.1). Со тоа е покажано дека функцијата f е непрекината оддесно (одлево) во точката c. Нека

$$x \in (c, c + \delta) \qquad ((c - \delta, c)).$$

Според теоремата 9.3 за функцијата f на сегментот $[c, x]$ ($[x, c]$) ќе постои точка $\xi \in (c, x)$ ((x, c)), така што ќе важи равенството

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi).$$

При граничен процес $x \to c + 0$ ($x \to c - 0$) ќе важи

$$\xi \to c + 0 \qquad (\xi \to c - 0)$$

и од последното равенство се добива

$$\lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c + 0) \qquad \left(\lim_{x \to c-0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c - 0)\right),$$

односно бараното равенство.

Да забележиме дека во општ случај постои разлика меѓу лев и десен извод како лева и десна гранична вредност од количникот

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

и лева и десна гранична вредност на изводната функција $f'(x)$.

***Последица* 9.2.** Ако функцијата f има конечен извод во секоја точка од интервалот (a, b), тогаш нејзината изводна функција f' нема точки на прекин од прв ред, односно или е непрекината на $[a, b]$ или има само точки на прекин од втор ред.

***Пример* 9.2.** Функцијата дефинирана на R со

$$f(x) = x^2 \cdot \cos\frac{1}{x}$$

за $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ има извод во секоја точка од R.

Решение: Значи,

$$f'(x) = 2x \cdot \cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x},$$

за $x \neq 0$ (добиено со правилата за изводи) и

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \cdot \cos\frac{1}{h} = 0$$

(добиено во согласност со дефиницијата 8.1 и според теоремата 5.7). Од друга страна, не постои граничната вредност $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$, бидејќи не постои $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ (пример 5.2), што значи точката $x = 0$ е точка на прекин од втор ред за изводната функција.

9.4. ТЕОРЕМА НА КОШИ

***Теорема* 9.4 (Коши).** Нека функциите f и g се дефинирани и непрекинати на сегментот $[a, b]$ и нека се диференцијабилни на интервалот (a, b), при што за сите x од (a, b) важи

$$g'(x) \neq 0.$$

Тогаш постои барем една точка $c \in (a, b)$ таква што важи равенството

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказ: Формираме помошна функција F со равенката

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot [g(x) - g(a)],$$

дефинирана на сегментот $[a, b]$. Лесно се покажува дека оваа функција ги задоволува сите услови на теоремата 9.2 и според тоа ќе постои

$$c \in (a, b),$$

така што

$$F'(c) = 0,$$

од каде што се добива и бараното равенство.

Да забележиме дека условот

$$g(a) \neq g(b)$$

е содржан во условот

$$g'(x) \neq 0$$

(се користи контрадикторност со теоремата 9.2). Исто така да забележиме дека специјално за

$$g(x) = x$$

се добива теоремата 9.3, а уште поспецијално за

$$f(a) = f(b)$$

теоремата 9.2 (односно нивните тврдења).

9.5. ПРИВИДНО НЕОПРЕДЕЛЕНИ ИЗРАЗИ. ЛОПИТАЛОВО ПРАВИЛО

Нека f и g се дадени функции диференцијабилни во некоја околина на точката x_0 и нека разгледаме функција F дефинирана со равенката

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ако

$$f(x_0) = g(x_0) = 0,$$

тогаш вредноста на функцијата F во точката x_0 ќе биде неопределена, т.е. функцијата F не е дефинирана во точката x_0. Во тој случај може по дефиниција да се додефинира функцијата F во точката x_0 со граничната вредност од количникот $\frac{f(x)}{g(x)}$ (ако постои) кога $x \to x_0$. Еден од начините за определување на таа гранична вредност е даден со Лопиталовото правило.

***Теорема* 9.5 (Лопиталово правило).** Нека функциите f и g ги задоволуваат условите на теоремата 9.4 во сегментот $[a, b]$ и нека

$$f(x_0) = g(x_0) = 0,$$

каде што $x_0 \in (a, b)$. Ако постои граничната вредност од количникот

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{кога } t \to x_0,$$

тогаш постои и граничната вредност од количникот

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{кога } x \to x_0$$

при што тие се еднакви.

Доказ: Според теоремата на Коши применета за функциите f и g на сегментот $[x_0, x]$ ($[x, x_0]$), каде што $x \in (a, b)$, ќе постои

$$t \in (x_0, x) \quad ((x, x_0)),$$

така што ќе важи равенството

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)},$$

односно равенството

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ако $x \to x_0$, тогаш $t \to x_0$, бидејќи

$$t \in (x_0, x) \quad (t \in (x, x_0)).$$

Според условот постои граничната вредност од количникот

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{кога} \quad t \to x_0.$$

Со користење на последното равенство се добива постоење и на граничната вредност од количникот

$$\frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{кога} \quad x \to x_0$$

и негова еднаквост со граничната вредност од количникот

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} \quad \text{кога} \quad t \to x_0.$$

Ако пак и $f'(x_0) = g'(x_0) = 0$, во тој случај правилото може повторно да се примени (ако се задоволени соодветните услови). Се покажува дека ова правило може да се примени и во случај на граничен процес $x \to \infty$ (притоа $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$). Со различни трансформации ова правило исто така може да се примени и кај другите форми на неопределени изрази.

***Пример* 9.3.** Со примена на Лопиталовото правило да се најде

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x}.$$

Решение: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$

***Пример* 9.4.** Со примена на Лопиталовото правило да се најде

$$\lim_{x\to 0} [x^2 \ln x].$$

Решение: $\lim_{x\to 0} [x^2 \ln x] = \lim_{x\to 0} [\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}] = \lim_{x\to 0} [\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2}{x^3}}] = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2} = 0.$

***Пример* 9.5.** Лопиталовото правило не може да се примени за наоѓање на граничната вредност

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\sin x}{x}$$

бидејќи не постои

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1-\cos x}{1}.$$

Сепак таа постои со директно користење на позната гранична вредност (пример 5.8 за $x = \frac{1}{t}$), т.е.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x-\sin x}{x} = \lim_{x\to +\infty} (1-\frac{\sin x}{x}) = 1.$$

§11. ИСПИТУВАЊЕ НА ОСОБИНИТЕ НА ФУНКЦИИ СО ПОМОШ НА ИЗВОДИ

Испитувањето на функциите се состои во проучување на нивните својства. Под тоа се подразбира определување на дефиниционата област, интервалите во кои функцијата монотоно расте или опаѓа, екстремните вредности, интервалите во кои функцијата е конкавна или конвексна, превојните точки и асимтотите на графикот на функцијата, како и други својства кои се потребни за испитување. Наведените својства се тесно поврзани со изводите на функцијата, па затоа овде ќе ги проучиме тие својства токму од тој аспект, при што на крајот ќе оформиме постапка за графичко претставување на функцијата. Секако, добиените критериуми можат да се употребуваат и за други испитувања.

Овде ќе се задржиме само на класата функции чии особини можат да се проучат и со гранични процеси (гранични вредности, изводи и др.).

Најпрвин ќе покажеме дека позитивноста (ненегативноста) на изводот е доволен услов за монотоно растење (неопаѓање) на функцијата на некој интервал.

***Теорема* 11.1 (Критериум за монотоност).** Нека е дадена функција f со формулата

$$y = f(x),$$

дефинирана и диференцијабилна во интервалот (a, b). Функцијата f монотоно расте (опаѓа) на интервалот (a, b) ако и само ако за сите $x \in (a, b)$ важи

$$f'(x) \geq 0 \quad (f'(x) \leq 0).$$

Доказ: Нека функцијата f монотоно расте на интервалот (a, b), нека $x \in (a, b)$ и нека Δx е нараснување во x, при што

$$x + \Delta x \in (a, b).$$

Од претпоставката следува дека за сите $\Delta x > 0$ важи

$$f(x + \Delta x) \geq f(x),$$

а за сите $\Delta x < 0$ важи

$$f(x + \Delta x) \leq f(x),$$

така што количникот

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(како функција од Δx) ќе добива ненегативна вредност и во двата случаја. Граничната вредност од тој количник кога $\Delta x \to 0$ всушност е првиот извод, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Поради тоа што количникот е ненегативен (како функција од Δx), граничната вредност, односно изводот, според теоремата 5.2 ќе има ненегативна вредност, т.е.

$$f'(x) \geq 0.$$

Од произволноста на изборот на точката x следува дека за сите $x \in (a, b)$ ќе важи

$$f'(x) \geq 0.$$

Да претпоставиме сега обратно, т.е. нека за сите $x \in (a, b)$ важи

$$f'(x) \geq 0.$$

Нека x и $x + \Delta x$ се кои било две точки од интервалот (a, b). Според теоремата 9.3 на Лагранж, применета на функцијата f на сегментот $[x, x + \Delta x]$, односно $[x + \Delta x, x]$ (во зависност од знакот на Δx), ќе постои барем една точка c меѓу точките x и $x + \Delta x$ за која важи

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x \cdot f'(c).$$

Бидејќи $f'(c) \geq 0$, од последното равенство се добива

$$f(x + \Delta x) \geq f(x)$$

ако $\Delta x > 0$, односно ако $x + \Delta x > x$, и

$$f(x + \Delta x) \leq f(x)$$

ако $\Delta x < 0$, односно ако $x + \Delta x < x$. Според тоа, функцијата f, во согласност со произволноста на точките x и $x + \Delta x$, монотоно расте во интервалот (a, b). Аналогно се покажува и второто тврдење.

***Пример* 11.1.** Да се покаже дека за сите $x \neq 0$ важи неравенството

$$e^x > 1 + x.$$

Решение: Формираме функција

$$f(x) = e^x - 1 - x,$$

дефинирана на R. За изводната функција

$$f'(x) = e^x - 1$$

важи

$$f'(x) > 0$$

за секое $x > 0$ и $f'(x) < 0$ за секое $x < 0$. Според теоремата 11.1 функцијата f строго монотоно расте на интервалот $(0, +\infty)$ и строго монотоно опаѓа на интервалот $(-\infty, 0)$. Бидејќи $f(0) = 0$, за секое x од интервалот $(0, +\infty)$ ќе важи неравенството $f(x) > 0$ и за секое x од интервалот $(-\infty, 0)$ ќе важи неравенството $f(x) > 0$, со што е докажано неравенството.

***Последица* 11.1.** Нека се дадени две функции f и g со формулите

$$y = f(x), \qquad y = g(x),$$

дефинирани на сегментот $[a, b]$ и диференцијабилни на интервалот (a, b). Ако

$$f(a) = g(a)$$

и ако за сите $x \in (a, b)$ важи

$$f'(x) \leq g'(x),$$

тогаш за сите $x \in (a, b)$ важи неравенството

$$f(x) \leq g(x).$$

Доказ: Нека на сегментот $[a, b]$ дефинираме нова функција F со формулата

$$F(x) = f(x) - g(x),$$

која според условот е диференцијабилна на (a, b), има вредност $F(a) = 0$ и за сите $x \in (a, b)$ важи

$$F'(x) \leq 0.$$

Според теоремата 11.1 функцијата F монотоно опаѓа на (a, b), т.е. за сите $x \in (a, b)$ важи

$$F(x) \leq F(a) = 0,$$

односно

$$f(x) - g(x) \leq 0,$$

со што тврдењето е докажано.

Со теоремата 9.1 на Ферма беше даден само потребниот услов при кој диференцијабилна функција ќе има локален екстрем. Постојат функции кои имаат локални екстреми во точки во кои првиот извод не постои.

***Пример* 11.2.** Функцијата

$$f(x) = |x|$$

има локален минимум во точката $x = 0$ ($|x| \geq 0$ за секое $x \in R$), во која првиот извод не постои (пример 8.6).

Постојат исто така функции кај кои во некои точки изводот е нула, но сепак во тие точки функцијата нема локален екстрем.

***Пример* 11.3.** $f(x) = x^3$ има прв извод нула во точката $x = 0$, во која нема локален екстрем.

Затоа точките во кои првиот извод постои и е нула, а кои ќе ги наречеме стационарни точки, можат да бидат само кандидати за екстремни точки. Значи екстремните точки во кои изводот постои и е нула се и стационарни точки, додека постојат стационарни точки кои не мораат да бидат екстремни точки.

Сега ќе го искажеме првото правило за наоѓање екстремни точки за функции за кои тие точки се стационарни, т.е. изводот во нив постои и е нула, или во нив е $\pm\infty$, или не постои, но постојат едностраните изводи.

***Теорема* 11.2 (Прв критериум за екстреми).** Нека е дадена функција $y = f(x)$, нека x_0 е точка во која е можен локален екстрем и нека претпоставиме дека постои извод (конечен) во некоја нејзина околина $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, освен можеби во x_0, со претпоставка изводот да има ист знак во интервалот $(x_0 - \delta, x_0)$, односно во интервалот $(x_0, x_0 + \delta)$. Тогаш се можни три случаи:

а) ако за

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0), \quad f'(x) > 0$$

и за

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta), \quad f'(x) < 0,$$

тогаш функцијата има локален максимум во точката x_0 еднаков на $f(x_0)$;

б) ако за

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0), \quad f'(x) < 0$$

и за

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta), \quad f'(x) > 0,$$

тогаш функцијата има локален минимум во точката x_0 еднаков на $f(x_0)$;

в) ако за

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta), \quad f'(x) > 0 \text{ или } f'(x) < 0,$$

тогаш функцијата нема локален екстрем во точката x_0.

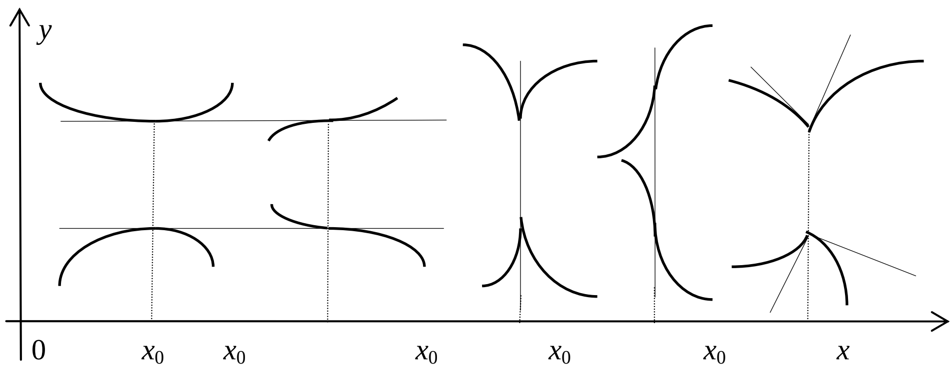
Доказ: Навистина, под а) според теоремата 11.1 функцијата строго монотоно расте во интервалот $(x_0 - \delta, x_0)$ и строго монотоно опаѓа во интервалот $(x_0, x_0 + \delta)$ и во согласност со дефиницијата 4.13 за локален максимум функцијата има максимална вредност во точката x_0 еднаква на $f(x_0)$.

Поради истите факти ќе важи и тврдењето под б), додека под в) имаме случај кога функцијата строго монотоно расте или строго монотоно опаѓа во околината $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на точката x_0, што значи дека во точката x_0 функцијата не може да има локална екстремна вредност.

Геометриски овие случаи можеме да ги претставиме како на цртежот 34.

Веднаш е очевидно дека кај случаите а) и б) $f'(x_0)$ постои, кај случаите в) и г) $f'(x_0)$, $f_-'(x_0)$, $f_+'(x_0)$ се $\pm\infty$, а кај случајот д) $f'(x_0)$ не постои, но постојат конечен лев и конечен десен извод (кои не се еднакви).

Сепак уште еднаш да забележиме дека во сите случаи прв извод постои во сите точки од некоја околина на точката x_0, исклучувајќи ја во некои од нив точката x_0, и дека функцијата f е дефинирана во точката x_0.



а) б) в) г) д)

Цртеж 34

Постои и второ правило за наоѓање на екстремни точки кое може да се примени за функции за кои постои втор извод во можната екстремна точка (што подразбира постоење на прв извод во точки од некоја нејзина околина).

***Теорема* 11.3 (Втор критериум за екстреми).** Нека е дадена функција $y = f(x)$, нека x_0 е нејзина стационарна точка (т.е. $f'(x_0) = 0$) и нека во некоја нејзина околина постои прв извод. Ако постои $f''(x_0)$, тогаш за

$$f''(x_0) > 0$$

во точката x_0 функцијата f има локална минимална вредност, а за

$$f''(x_0) < 0$$

во точката x_0 функцијата f има локална максимална вредност, додека во случајот

$$f''(x_0) = 0$$

ова правило не дава конкретен одговор и затоа се потребни дополнителни испитувања.

Доказ: Нека x_0 е стационарна точка (т.е. $f'(x_0) = 0$) и нека

$$f''(x_0) > 0.$$

Тогаш во согласност со дефиницијата 8.1 ќе имаме

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0},$$

односно

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Според теоремата 5.2 постои $\delta > 0$, така што за секое

$$x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$$

важи

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0,$$

односно за секое $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ важи $f'(x) < 0$ и за секое $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ важи $f'(x) > 0$.

Според теоремата 11.2б следува дека во точката x_0 функцијата f има локален минимум.

На ист начин се покажува и случајот $f''(x_0) < 0$.

Теорема **11.4.** Нека за функцијата f постојат изводи од повисок ред до n, $n \in N$, нека $f^{(n+1)}(x)$ е непрекината функција во некоја околина на точката x_0 и нека

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$$

и

$$f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Тогаш разликуваме два случаја:

а) ако n е непарен број, тогаш за

$$f^{(n+1)}(x_0) > 0$$

во точката x_0 функцијата f има локален минимум, а за

$$f^{(n+1)}(x_0) < 0$$

во точката x_0 функцијата f има локален максимум;

б) ако n е парен број, тогаш во точката x_0 f нема локален екстрем.

Критериумот даден со теоремата 11.4 се докажува со помош на Тајлоровата формула.

Со теоремите 11.2, 11.3, 11.4 се даваат критериуми за наоѓање на можни локални екстреми, но постојат и проблеми во кои се бара глобален екстрем, т.е. екстремна вредност на функцијата во дадено множество. Во тој случај најпрвин се наоѓаат локалните екстреми (ако постојат), а потоа со споредување на тие вредности, како и вредностите на функцијата во крајните точки на сегментот односно множеството (граничните точки) во кое се бара глобалниот екстрем, се добива бараниот екстрем.

***Дефиниција* 11.1.** Нека е дадена функција f, непрекината на интервалот (a, b). Ако за кои било $x_1, x_2 \in (a, b)$ важи неравенството

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \leq \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2),$$

каде што

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad 0 < \lambda_1 < 1, \quad 0 < \lambda_2 < 1,$$

тогаш велиме дека функцијата е конвексна (испакната) на интервалот (a, b). Во случај на обратното неравенство

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) \geq \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)$$

за функцијата се вели дека е конкавна (вдлабната) на интервалот (a, b). Ако се земе

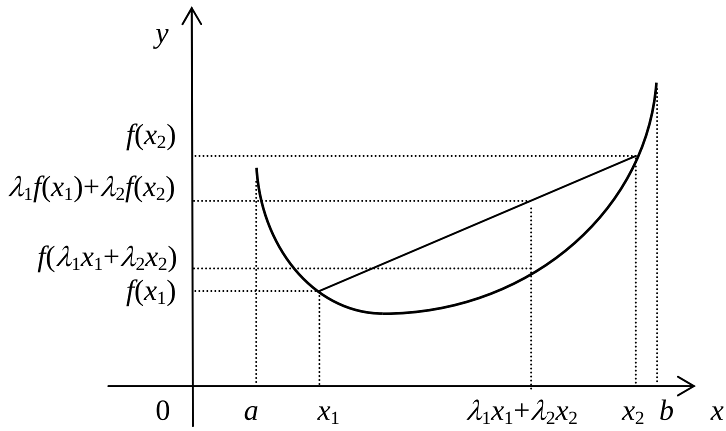
$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1 \ (= \lambda),$$

неравенството ќе го има следниот вид

$$f(\lambda \cdot x_1 + (1 - \lambda) \cdot x_2) \leq \lambda \cdot f(x_1) + (1 - \lambda) \cdot f(x_2), \quad 0 < \lambda < 1$$

(цртеж 35).

Вака дефинираната конвексност (конкавност) е особина на функцијата при која испакнатоста (вдлабнатоста) на функцијата геометриски се гледа оддолу, т.е. од негативната насока на оската y. Во литературата се среќава и обратно дефинирана конквексност (конкавност) во смисла на поглед одгоре, т.е. од позитивната насока на оската y.



Цртеж 35

***Дефиниција* 11.2.** Нека за функцијата f постои конечен извод во некоја околина на точката x_0. Функцијата f е конвексна во таа околина ако за сите x од таа околина важи неравенството

$$f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0).$$

Со обратното неравенство се дефинира конкавност на функцијата.

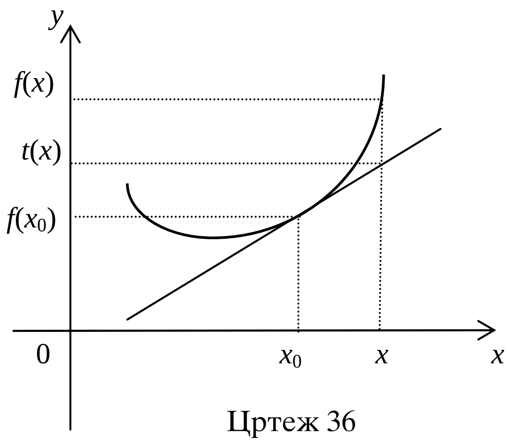
Тргнувајќи од неравенството

$$f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0),$$

геометриски гледано може да заклучиме дека графикот на функцијата се наоѓа над тангентата на графикот на функцијата во точката x_0, бидејќи

$$t(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$$

е ординатата на точка од тангентата ($y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$), а $f(x)$ е ординатата на точка од графикот на функцијата, во двата случаја со иста апциса x (цртеж36).



Цртеж 36

Во согласност со оваа забелешка, геометриската дефиниција на конвексност (конкавност) на интервалот (a, b) ќе се состои од барањето сите тангенти повлечени во точки од графикот на функцијата со апциси $x \in (a, b)$ да бидат под (над) графикот. Притоа мора да се претпостави диференцијабилност на функцијата на интервалот (a, b) што не е случај со дефиницијата 11.1 која е поопшта.

Теорема **11.5 (Критериум за конвексност).** Нека е дадена функција f и нека изводната функција $f'(x)$ е непрекината на интералот (a, b). Ако за сите $x \in (a, b)$ важи

$$f''(x) > 0 \qquad (f''(x) < 0),$$

тогаш функцијата е конвексна (конкавна) на (a, b).

Според оваа теорема која нема да ја докажуваме, е јасно дека решенијата на равенката $f''(x) = 0$ се потенцијални точки во кои може да се менува конвексноста (конкавноста) на функцијата и кои во тој случај се нарекуваат точки на превој. Сепак функцијата може да ја менува својата конвексност (конкавност) и во точки во кои $f''(x)$ има прекин или не постои, па дури и во точки во кои самата функција f не е дефинирана (пример: $f(x) = \dfrac{1}{x}$, во точката $x = 0$).

За испитување на графикот на функција многу е важно нејзиното однесување кога $x \to +\infty$, кога $x \to -\infty$ или во мала околина на точки во кои таа не е дефинирана, што е регулирано со егзистенцијата на нејзини асимтоти. Притоа да забележиме дека може да се случи графикот на функцијата да ја сече својата коса или хоризонтална асимтота. За испитување и геометриско скицирање на график на една функција се употребува шема со составување на соодветна табела.

***Пример* 11.4.** Да се испита и нацрта графикот на функцијата

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}.$$

Решение: Дефиниционата област на функцијата е $R\backslash\{0\}$. Функцијата не е парна, не е непарна, не е периодична и нејзиниот график нема пресеци со координатните оски. Од равенката

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x}) = 0$$

се добива стационарна точка $x_0 = 1$. Во интервалите $(-\infty, 0)$ и $(1, +\infty)$ функцијата е монотоно растечка, а во интервалот $(0, 1)$ монотоно опаѓачка. Според теоремата 11.2б функцијата има локален минимум во точката $x_0 = 1$. Функцијата нема превојни точки ($f''(x) = \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$), но е конкавна на интервалот $(-\infty, 0)$ и конвексна на интералот $(0, +\infty)$. Бидејќи

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty$$

и

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = 0,$$

правата $x = 0$ е еднострана вертикална асимтота. Бидејќи

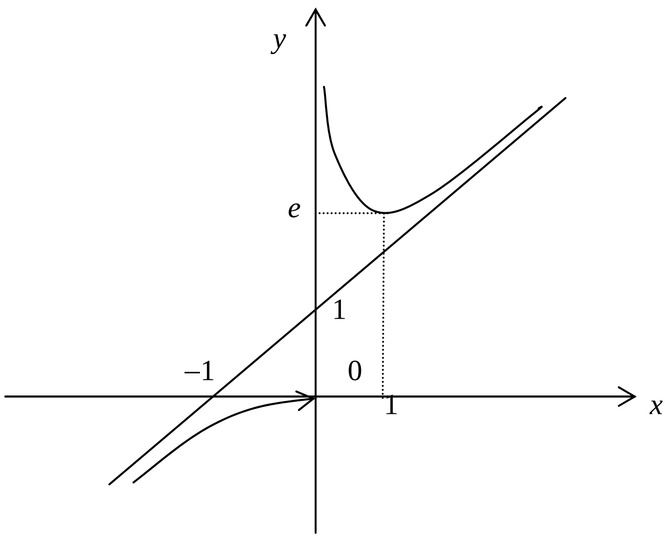
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

и

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = 1,$$

правата $y = x + 1$ е коса асимтота. Врз основа на овие испитувања може да се формира табела, а график е даден на цртежот 37.

x	$-\infty$		0			1			$+\infty$
y	↗	↗		↘	↘	e	↗	↗	
y'	$+$	$+$		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
y''	$-$	$-$		$+$	$+$		$+$	$+$	
						min			



Цртеж 37

Изводите можат да се користат во разрешување на голем број проблеми во кои се бараат екстремни вредности на функции, со кои се дефинирани разни процеси од практиката. Тоа се оптимални задачи кои се решаваат со методите на оптимирање. Такви се, на пример, задачите за оптимирање на брзина, забрзување, плоштина, волумен, проток на електрицитет, електромоторна сила и сл.

***Пример* 11.5.** Нека е даден еден генератор со електромоторна сила E и внатрешен отпор r, поврзан со надворешен потрошувач со променлив отпор R. Да се најде вредноста R при која корисната моќност P ќе биде најголема.

Решение: Според Џуловиот закон корисната моќност P е дадена со равенката

$$P = R\cdot I^2,$$

каде што

$$I = \frac{E}{R+r}.$$

Значи,

$$P = \frac{RE^2}{(R+r)^2},$$

што значи P е дробнорационална функција која зависи од отпорот R. Во согласност со барањето на задачата треба да се најде максималната вредност на оваа функција. Според теоремата 11.3 добиваме

$$P'_R(R) = \frac{E^2(r-R)}{(R+r)^3} = 0.$$

Значи, $R = r$ е стационарна точка во која е можен екстрем. Бидејќи

$$P''(R) = E^2\cdot\frac{-(r+R)-3(r-R)}{(R+r)^4},$$

со замена на $R = r$ се добива негативна вредност

$$P''(r) = -E^2\cdot\frac{1}{(R+r)^3} < 0.$$

Според теоремата 11.3 заклучуваме дека електромоторната сила е најголема за $R = r$. Истото може да се заклучи и само со теоремата 11.2, бидејќи за $R < r$ имаме

$$P'_R(R) > 0$$

и за $R > r$ имаме

$$P'_R(R) < 0.$$

***Пример* 11.6.** Нека е даден прав кружен конус со висина H и радиус на основата R. Да се најдат димензиите на цилиндер впишан во конусот со заеднички центар на основите, така што неговата плоштина да биде најголема.

Решение: Со r и h ќе ги означиме радиусот на основата и висината на цилиндерот. Од цртежот 38 се добива врската

$$h : R - r = H : R$$

(триаголникот $B'BA$ е сличен со триаголникот VOA), односно врската

$$h = \frac{R-r}{R} H \, .$$

Плоштината на цилиндерот е дадена со формулата

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi h,$$

од која со замена на врската меѓу r и h се добива квадратната функција

$$P(r) = 2\pi r[\, r + H \, \frac{R-r}{R}]$$

со дефинициона област $r \in [0, R]$. Нејзина стационарна точка е

$$r_0 = \frac{RH}{2(H-R)} \, .$$

Бидејќи

$$P''(r_0) = 4\pi \, \frac{R-H}{R} < 0,$$

според теоремата 11.3 функцијата $P(r)$ има најголема вредност $P(r_0)$. Притоа од природата на проблемот произлегува ограничувањето

$$H - R > 0 \qquad (r_0 > 0).$$

Значи, бараните димензии на цилиндерот се

$$r_0 = \frac{RH}{2(H-R)}$$

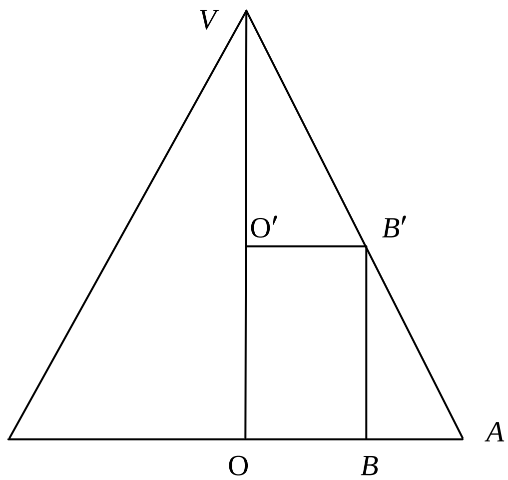
и

$$h_0 = \frac{H-2R}{2(H-R)} H \, ,$$

од каде произлегува уште построгото ограничување

$$H - 2R > 0 \qquad (h_0 > 0)$$

за димензиите на конусот.



$\overline{\text{O}V} = H,\quad \overline{\text{O}A} = R,\quad \overline{\text{OO}'} = \overline{BB'} = h,\quad \overline{\text{O}B} = r$

Цртеж 38

§10. ТАЈЛОРОВА ФОРМУЛА

Честопати во примената се јавува потреба да се пресмета една или повеќе вредности на некоја функција за конкретни вредности на аргументот. Ако аналитичкиот израз на самата функција е даден со сложена формула, тогаш се применува пресметување на бараната вредност со соодветна приближна точност. Полиномните функции се едни од наједноставните функции во однос на пресметување на соодветна вредност и затоа од големо теоретско и практично значење е Тајлоровата формула, со која е дадена постапката за претставување (апроксимација) на една произволна функција со полиномна функција (полином) со соодветна приближна точност и секако под определени услови. На тој начин е создадена можност бараните вредности на произволната функција да се пресметаат, со определена приближна точност, преку вредностите на соодветниот полином .

Нека f е полиномна функција од степен n од вид

$$f(x) = a_0 + a_1\cdot(x - x_0) + a_2\cdot(x - x_0)^2 + ... + a_n\cdot(x - x_0)^n.$$

Со замена

$$x = x_0$$

се добива

$$a_0 = f(x_0).$$

Бидејќи

$$f\,'(x) = a_1 + 2a_2\cdot(x - x_0) + 3a_3\cdot(x - x_0)^2 + ... + na_n\cdot(x - x_0)^{n-1},$$

ќе добиеме

$$a_1 = f\,'(\mathrm{x}_0).$$

Продолжувајќи ја истата постапка се добива,

$$a_k = \frac{1}{k!}\cdot f^{(k)}(x_0), \qquad k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Значи, коефициентите на полиномната функција можат да се изразат преку соодветни изводи на самата функција во конкретна точка, со што се добива обликот

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\cdot f\,'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}\cdot f\,''(x_0)(x - x_0)^2 + ... + \frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n.$$

***Дефиниција* 10.1.** Нека е дадена функција f, непрекината на сегментот $[a, b]$, нека има непрекинати изводи со n-ти ред заклучно во сите точки од интервалот (a, b). Полиномот

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\cdot f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}\cdot f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

од n-ти степен се вика Тајлоров полином за функцијата f по степените на $(x - x_0)$, каде $x_0 \in (a, b)$.

***Теорема* 10.1 (Тајлорова формула).** Нека е дадена функција f, непрекината на сегментот $[a, b]$, нека има непрекинати изводи со n-ти ред заклучно во сите точки од интервалот (a, b), нека постои конечен $(n + 1)$-ви извод во сите точки од интервалот (a, b) и нека $x_0 \in (a, b)$. Тогаш за сите x од интервалот (a, b) важи формулата:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\cdot[f'(x_0)]\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2!}\cdot[f''(x_0)]\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot[f^{(n)}(x_0)]\cdot(x-x_0)^n + R_n(x),$$

каде што $R_n(x)$ се нарекува остаток (или максимална грешка).

Доказ: Нека f е функција која ги задоволува условите од теоремата 10.1 за претставување со Тајлоровата формула. Тогаш за неа постои Тајлоров полином:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\cdot f'(x_0)\,(x-x_0) + \frac{1}{2!}\cdot f''(x_0)\,(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot f^{(n)}(x_0)\,(x-x_0)^n.$$

Да ставиме

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

односно

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\cdot[f'(x_0)]\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2!}\cdot[f''(x_0)]\cdot(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot[f^{(n)}(x_0)]\cdot(x-x_0)^n + (x-x_0)^{p+1}\cdot Q(x),$$

каде што Q е неопределена функција и $p \in N^0$. Да го фиксираме x така што

$$a < x_0 < x < b.$$

За определување на функцијата Q дефинираме помошна функција F од променливата t со формулата

$$F(t) = f(t) + \frac{1}{1!}\cdot[f'(t)]\cdot(x-t) + \frac{1}{2!}\cdot[f''(t)]\cdot(x-t)^2 + \ldots +$$

$$\frac{1}{n!}\cdot[f^{(n)}(t)](x-t)^n + (x-t)^{p+1}\cdot Q(x)$$

за секое t во сегментот $[x_0, x] \subset (a, b)$. Функцијата F е непрекината на $[x_0, x]$ (функцијата f заедно со n-тата изводна функција се непрекинати), има прв извод на (x_0, x) (функцијата f има n + 1-ви извод на (x_0, x)) и $F(x_0) = F(x) = f(x)$. Според тоа функцијата F ги задоволува условите од теоремата 9.2 на Рол и ќе постои точка $c \in (x_0, x)$ за која важи $F'(c) = 0$. Бидејќи

$$F'(t) = f'(t) - f'(t) + (x-t)f''(t) - (x-t)f''(t) + \ldots -$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\cdot[f^{(n)}(t)](x-t)^{n-1} + \frac{1}{n!}\cdot[f^{(n+1)}(t)](x-t)^n - (p+1)(x-t)^p\cdot Q(x),$$

се добива

$$F'(c) \equiv \frac{1}{n!}\cdot(x-c)^n\cdot f^{(n+1)}(c) - (p+1)(x-c)^p Q(x) = 0$$

од каде се добива

$$Q(x) = \frac{1}{(p+1)n!}\cdot(x-c)^{n-p}\cdot f^{(n+1)}(c).$$

Бидејќи $c \in (x_0, x)$, можеме да запишеме

$$c = x_0 + \theta\cdot(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1$$

и конечно добиваме

$$Q(x) = \frac{1}{(p+1)n!}\cdot(x - x_0 - \theta\cdot(x-x_0))^{n-p}\cdot f^{(n+1)}(x_0 + \theta\cdot(x-x_0)),$$

односно

$$Q(x) = \frac{1}{(p+1)n!}\cdot(x-x_0)^{n-p}(1-\theta)^{n-p}\cdot f^{(n+1)}(x_0 + \theta\cdot(x-x_0)).$$

Според тоа

$$R_n(\mathrm{x}) = \frac{1}{(p+1)n!}\cdot(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n-p}\cdot f^{(n+1)}(x_0 + \theta\cdot(x-x_0)),$$

со што тврдењето е докажано за вредности на x десно од точката x_0. На ист начин е и доказот за вредности на x лево од точката x_0 со дефинирање на помошната функција во сегментот $[x, x_0]$.

Остатокот во формулата може да биде даден во некоја од следните форми:

$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot[f^{(n+1)}(x_0 + \theta\cdot(x - x_0))]\cdot(x - x_0)^{n+1}$ за $p = n$ (Лагранж);

$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot[f^{(n+1)}(x_0 + \theta\cdot(x - x_0))]\cdot(1 - \theta)^n\cdot(x - x_0)^{n+1}$ за $p = 0$ (Коши);

$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$ (Пеано),

при што $0 < \theta < 1$, додека o претставува симбол на Ландау кој покажува дека остатокот е бесконечна мала функција од повисок ред во однос на функцијата $(x - x_0)^n$ кога $x \to x_0$.

Ако се замени $x - x_0$ со ознаката за нараснување Δx на променливата x во точката x_0, а потоа и со диференцијалот $\mathrm{d}x$, тогаш формулата ќе го има видот

$$\Delta f(x_0) = \mathrm{d}f(x_0) + \frac{1}{2!}\cdot\mathrm{d}^2f(x_0) + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot\mathrm{d}^nf(x_0) + R_n(x),$$

каде што остатокот во Лагранжов вид ќе биде даден со изразот

$$\frac{1}{(n+1)!}\cdot\mathrm{d}^{n+1}f(c).$$

Да забележиме уште еднаш дека функцијата f всушност се апроксимира со полином од степен n од вид

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!}\cdot[f'(x_0)]\cdot(x - x_0) + \frac{1}{2!}\cdot[f''(x_0)]\cdot(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$\frac{1}{n!}\cdot[f^{(n)}(x_0)]\cdot(x - x_0)^n.$$

Значи

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Притоа за фиксно n грешката $R_n(x)$ е помала за вредности на x поблиски до точката x_0, додека таа е поголема за вредности на x кои се подалеку од точката x_0.

Специјалниот облик на коефициентите на полиномот го појаснивме со специјалниот случај кога f е полиномна функција од степен n.

За $x_0 = 0$ Тајлоровата формула е позната под името Маклоренова формула.

Ќе наведеме неколку најчесто користени Тајлорови (Маклоренови) формули за соодветни функции.

***Пример* 10.1.** За функцијата
$$f(x) = e^x,$$
дефинирана на R, и за која постои извод од кој било ред за секое $x \in R$, добиваме
$$f^{(n)}(x) = e^x.$$
Според тоа, Тајлоровата формула по степените на x (Маклоренова) е дадена за секое $x \in R$ со
$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x),$$
каде што
$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x}\ x^{n+1}, \qquad 0 < \theta < 1.$$

***Пример* 10.2.** За функцијата
$$f(x) = \ln(1 + x),$$
дефинирана за $x > -1$, и за која постои извод од кој било ред за секое $x > -1$, добиваме
$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(-1)^n}{(1+x)^{n+1}}.$$
Според тоа, Тајлоровата формула по степените на x (Маклоренова) е дадена за секое $x > -1$ со
$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{4}\cdot x^4 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot(-1)^{n-1}\cdot x^n + R_n(x),$$
каде што
$$R_n(x) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}\cdot x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

За оваа формула може да се покаже дека $R_n(x) \to 0$ кога $n \to +\infty$ само за вредностите на x за кои важи $-1 < x \leq 1$.

***Пример* 10.3.** За функцијата

$$f(x) = \sin x,$$

дефинирана за секое $x \in R$, и за која постои извод од кој било ред за секое $x \in R$, добиваме

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$

Според тоа, Тајлоровата формула по степените на x (Маклоренова) е дадена за секое $x \in R$ со

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{5!}\cdot x^5 - \ldots + \frac{1}{(2k-1)!}\cdot(-1)^{k-1}\cdot x^{2k-1} + R_{2k-1}(x),$$

каде што

$$R_{2k-1}(x) = \frac{1}{(2k+1)!}\cdot x^{2k+1}\cdot \sin\,[\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}], \quad k \in N,\ 0 < \theta < 1.$$

***Пример* 10.4.** За функцијата

$$f(x) = \cos x,$$

дефинирана за секое $x \in R$, и за која постои извод од кој било ред за секое $x \in R$, добиваме

$$f^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}).$$

Според тоа, Тајлоровата формула по степените на x (Маклоренова) е дадена за секое $x \in R$ со

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 - \ldots + \frac{1}{(2k)!}\cdot(-1)^{k}\cdot x^{2k} + R_{2k}(x),$$

каде што

$$R_{2k}(x) = \frac{1}{(2k+2)!}\cdot x^{2k+2}\cdot \cos\,[\theta x + (2k+2)\frac{\pi}{2}], \quad k \in N,\ 0 < \theta < 1.$$

***Пример* 10.5.** За функцијата

$$f(x) = (1 + x)^{\alpha}, \quad \alpha \in R,$$

дефинирана за секое $x > -1$, и за која постои извод од кој било ред за секое $x > -1$, добиваме

$$f^{(n)}(x) = [\alpha\cdot(\alpha - 1)\cdot \ldots \cdot(\alpha - n + 1)](1 + x)^{\alpha - n}.$$

Според тоа, Тајлоровата формула по степените на x (Маклоренова) е дадена за секое $x > -1$ со

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\alpha\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot[\alpha\cdot(\alpha-1)]\cdot x^2 + \ldots +$$
$$\frac{1}{n!}\cdot[\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(\alpha-n+1)]\cdot x^n + R_n(x),$$

каде што

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot[\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ \ldots\ \cdot(\alpha-n)]\cdot(1+\theta x)^{\alpha-(n+1)}\cdot x^{n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

***Пример* 10.6.** Да се развие функцијата

$$f(x) = e^x$$

со Маклореновата формула, задржувајќи се на првите четири члена и потоа да се пресмета $e^{0,1}$ и да се оцени грешката R_3.

Решение: Според примерот 10.1 важи формулата

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + R_3(x), \quad R_3(x) = \frac{1}{4!}x^4 e^{\theta x}.$$

За $x = 0,1$ се добива

$$e^{0,1} = 1,10516 + R_3(0,1).$$

За оцена на грешката се добива

$$R_3(0,1) = \frac{1}{4!}(0.1)^4 e^{\theta\, 0,1} < \frac{1}{4!}(0.1)^4\cdot 3 = 0,0000125$$

што значи дека бројот 1,10516 е вредност на $e^{0,1}$ пресметана со 4 точни децимали.

***Пример* 10.7.** Да се развие функцијата

$$f(x) = e^x$$

со Маклореновата формула. Колку членови треба да се земат за при пресметувањето на $e^{0,1}$ грешката да биде помала од 10^{-2} (со две точни децимали)?

Решение: Според примерот 10.1 важи формулата

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x),$$

каде што

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta x}\, x^{n+1}, \quad 0<\theta<1.$$

Според условот на задачата за определување на n се користи неравенството

$$R_n(x) \equiv \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta\, 0,1} \cdot (0,1)^{n+1} < \frac{1}{(n+1)!} \cdot 3 \cdot (0,1)^{n+1} < 0,001,$$

што е точно за $n \geq 2$, што значи дека од развојот треба да се земат првите 3 члена.

***Пример* 10.8.** При пресметувањето на вредноста на функцијата

$$f(x) = e^x$$

со Маклореновата формула да се земат првите 4 члена од развојот. Да се определи интервалот во кој ќе се наоѓа x ако пресметаната вредност на функцијата за x од тој интервал со Тајлоровиот полином биде различна од вистинската вредност за грешка помала од 0,0001 (пресметаната вредност да има три точни децимали).

Решение: Според пример 10.1 важи формулата

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + R_3(x), \qquad R_3(x) = \frac{1}{4!}x^4 e^{\theta x}.$$

Во согласност со условот на задачата за определување на интервалот се користи неравенството

$$\left|\frac{1}{4!}x^4 e^{\theta x}\right| < \left|\frac{1}{4!}x^4 \cdot 3\right| < 0,0001$$

од што се добива $|x| < 0,00168$.

***Пример* 10.9.** Да се покаже дека за $x > 0$ важат неравенствата

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x.$$

Решение: Според Маклореновата формула за функцијата

$$\ln(1 + x)$$

добиваме

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + R_2.$$

Бидејќи

$$R_2 = \frac{x^3}{3(1+\theta x)^3} > 0, \quad \text{за } x > 0,$$

се добива неравенството

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x).$$

Од формулата

$$\ln(1 + x) = x + R_1,$$

поради

$$R_1 = \frac{-x^2}{2(1+\theta x)^2} < 0 \quad \text{за } x > 0,$$

се добива неравенството

$$\ln(1 + x) < x.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Атанасова, С. Георгиевска: *Предавања по математика* I, Универзитет “Св. Кирил и Методиј“ , Скопје 1985.

2. Н. Ивановски: *Математичка анализа* I – *функции од една независно променлива*, Универзитет “Св. Кирил и Методиј“ , Скопје 1981.

3. В.А. Ильин, В.А. Садовничий , Бл.Х. Сендов: *Математичкеский анализ*, “Наука“ , Москва, 1979.

4. П.П. Коровкин: *Математический анализ*, *часть* I , Издательство “Просвещение“ , Москва 1972 .

5. П. Лазов, Ѓ. Ивановски: *Елементи на математичката анализа со некои примени*, Универзитет “Св. Кирил и Методиј“ , Скопје, 1981.

6. S. Mardešić: *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*, prvi deo, Školska knjiga , Zagreb, 1974.

7. С.М. Никольский: *Курс математичкого анализа том* I , “Наука“, Москва 1983.

8. Н. Речкоски: *Виша математика*,Универзитет “Св. Климент Охридски“, Битола, Факултет за туризам и угостителство, Охрид 1997.

9. Г.М. Фихтенгольц: *Основы математичкого анализа*, том 1, “Наука“, Москва 1968.

10. Ѓ.Чупона, Б.Трпеновски, Н.Целакоски: *Предавања по виша математика*, кн. I – III , Универзитет “Св. Кирил и Методиј“, Скопје, 1976.

11. И.Шапкарев, П.Кржовски: *Линеарна алгебра со аналитичка геометрија во простор*, Универзитет “Св. Кирил и Методиј“, Скопје 1977.

ПРИЛОГ 1

... il n’y a pas de “mathèmatiques modernes“ s’opposant aux “mathèmatiques classiques“ mais simplement une mathèmatique d’aujourd’hui qui continue celle d’hier sons rupture profonde et s’attache avant tout à rèsoudre les grands problèmes que nous ont lèqués nos prèdècesseurs.

(…не постои ***модерна математика*** која и се спротиставува на ***класичната математика***, постои само денешна математика, која ја надоврзува на вчерашната без подлабоки прекиди, и првенствено настојува да ги реши големите проблеми кои ни ги оставиле нашите претходници.)

Jean Dieudonne

Абел	–Niels Henrik Abel (1802 – 1829), норвешки математичар.
Александров	–Павел Сергеевич Александров (1896 – ?), руски математичар.
Архимед	–Arhimedes (‘Αρχιμηδηζ) (287? – 212 п.н.е), антички математичар.
Асколи	–Giulio Ascoli (1843 – 1896), италијански математичар.
Ацела	–Cesare Azzelà (1847 – 1912), италијански математичар.
Баир	–Renè Baire (1874 – 1932), француски математичар.
Банах	–Stefan Banach (1892 – 1945), полски математичар.
Бароу	–Isaac Barrow (1630 – 1677), англиски математичар.
Бернули	–Jakob Bernoulli (1654 – 1705), швајцарски математичар.
Бернштајн	–Felix Bernstein (1878 – 1956), германски математичар.
Бернштејн	–Сергей Натанович Бернштейн (1880 – 1968), руски математичар.
Бертран	–Joseph Louis François Bertrand (1822 – 1900), француски математичар.

Болцано	–Bernard Bolzano (1781 – 1848), чешки математичар, логичар и филозоф.
Бригс	–Henry Briggs (1561 – 1630), англиски математичар.
Броувер	–Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966), холандски математичар.
Бул	–George Boole (1815 – 1864), ирски логичар и математичар.
Вајерштрас	–Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897), германски математичар.
Валис	–John Wallis (1616 – 1703), англиски математичар.
Вен	–John Venn (1834 – 1923), англиски логичар.
Волтера	–Vito Volterra (1860 – 1940), италијански математичар.
Гаус	–Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855), германски математичар, физичар и астроном.
Грам	–Jörgen Pederson Gram (1850 – 1916), дански математичар.
Даламбер	–Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783), француски математичар и филозоф.
Дедекинд	–Julius Wilhem Richard Dedekind (1831 – 1916), германски математичар.
Декарт	–René Descartes (Cartesius) (1596 – 1650), француски филозоф, математичар и физичар.
Дини	–Ulisse Dini (1845 – 1918), италијански математичар.
Дирихле	–Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), германски математичар.
Еудокс	–Eudoxus (V век пр.н.е.), антички математичар.
Еуклид	–Euklid (Ευχλειδηζ) (IV – III в.п.н.е.), антички математичар.
Зенон	–Zenon (V век пр.н.е), антички математичар.
Зермело	–Ernest Zermelo (1871 – 1953), германски математичар.
Кантор	–Georg (Ferdinand Ludwig Philipp) Cantor (1845 – 1918), германски математичар.

Коши	–Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), француски математичар.
Кумер	–Ernest Eduard Kummer (1810 – 1893), германски математичар.
Лагранж	–Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), француски математичар.
Лајбниц	–Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), германски математичар и филозоф.
Лебег	–Henri Lebesgue (1875 – 1941), француски математичар.
Линделов	–Ernst Leonhard Lindelöf (1870 – 1946), шведски математичар
Липшиц	–Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 – 1903), германски математичар.
Мазур	–Stanislaw Mazur (1905 – ?), полски математичар.
Маклорен	–Colin Maclaurin (1698 – 1746), шкотски математичар.
Мереј	–Charles Meray (1874 – 1932), француски математичар.
Мертенс	–Franz Karl Joseph Mertens (1840 – 1927), австриски математичар.
Минковски	–Hermann Minkowski (1864 – 1909), германски математичар.
Моавре	–Abraham de Moivre (1667 – 1754), француски математичар.
Морган	–Augustus de Morgan (1806 – 1871), англиски математичар и логичар.
Непер	–John Napier (1550 – 1617), шкотски математичар.
Њутн	–Isaac Newton (1642 – 1723), англиски математичар и физичар.
Ојлер	–Leonhard Euler (1707 – 1783), швајцарски математичар, работел во Петровград и Берлин.
Пеано	–Giuseppe Peano (1858 – 1932), италијански математичар и логичар.
Пикар	–Emile Picard (1856 – 1941), француски математичар.

Рабе	–Joseph Ludwig Raabe (1701 – 1859), швајцарски математичар.
Риман	–Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866), германски математичар
Стон	–Marshall Harvey Stone (1847 – 1912), американски математичар.
Суслин	–Михайл Яковлевич Суслин (1894 – 1919), руски математичар.
Тихонов	–Андрей Николаевич Тихонов (1906 – ?), руски математичар.
Тице	–Heinrich Tietze (1880 – 1964), австриски математичар.
Урисон	–Павел Самуилович Урысон (1898 – 1924), руски математичар.
Ферма	–Pierre Fermat (1601 – 1665), француски математичар.
Фредхолм	–Ivan Fredholm (1866 – 1927), шведски математичар.
Фробениус	–Georg Frobenius, (1849 – 1917), германски математичар.
Хајне	–Eduard Heine (1821 – 1881), германски математичар.
Хамилтон	–William Rowan Hamilton (1805 – 1865) ирски математичар и астроном.
Хаусдорф	–Felix Hausdorff (1868 – 1942), германски математичар.
Хелдер	–Otto Hölder (1859 – 1937), германски математичар.
Хермит	–Charles Hermite (1822 – 1901), француски математичар.
Хилберт	–David Hilbert (1862 – 1943), германски математичар.
Чезаро	–Ernesto CesÃro, (1859 – 1906), италијански математичар.
Шварц	–Karl Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921), германски математичар.
Шмит	–Erhardt Schmidt (1876 – 1959), германски математичар.
Штолц	–Otto Stolz (1842 – 1905), австриски математичар.

П Р И Л О Г 2

НЕКОИ СИМБОЛИ И ОЗНАКИ

Ознака	Симбол	Се чита
Дисјункција	$\vee$	или
Конјункција	$\wedge$	и
Импликација	$\Rightarrow$	следува (повлекува)
Еквиваленција	$\Leftrightarrow$	ако и само ако (тогаш и само тогаш)
Негација	$\neg$	не
	$\top$	точно
	$\perp$	неточно
	$\in$	припаѓа
	$\notin$	не припаѓа
Универзален квантификатор	$\forall$	за секој (за кој било)
Егзистенцијален квантификатор	$\exists$	постои некој
Унија на две множества	$\cup$	унија
Пресек на две множества	$\cap$	пресек
Вистинско подмножество	$\subset$	подмножество
Подмножество	$\subseteq$	подмножество
Разлика на две множества	$\setminus$	разлика

Освен начинот на читање на соодветни симболи и ознаки дадени во третата колона постојат и други формулации кои ја одразуваат суштината на симболите.

ПРИЛОГ 3

ГРЧКА АЗБУКА – ПЕЧАТНИ БУКВИ

Голема	Мала	Се чита
Α	α	алфа
Β	β	бета
Γ	γ	гама
Δ	δ	делта
Ε	ε	епсилон
Ζ	ζ	зета
Η	η	ета
Θ	θ	тета
Ι	ι	јота
Κ	κ	капа
Λ	λ	ламбда
Μ	μ	ми
Ν	ν	ни
Ξ	ξ	кси
Ο	ο	омикрон
Π	π	пи
Ρ	ρ	ро
Σ	σ	сигма
Τ	τ	тау
Υ	υ	ипсилон
Φ	φ	фи
Χ	χ	хи
Ψ	ψ	пси
Ω	ω	омега

Издавач:
Електротехнички факултет – Скопје

за издавачот:
Проф. д-р Властимир Гламочанин, декан

Лектура:
Георги Георгиевски

Коректура:
Алена Георгиевска

Графичко обликување:
Благоја Богатиноски

CIP – Каталогизација во публикација Народна и универзитетска библиотека „Св. Климент Охридски” – Скопје

517.1/.2(075.8)

ПИПЕРЕВСКИ, Боро

Математика. I, Боро Пиперевски. – Скопје: Електротехнички факултет5, 2001.
– 195 стр.: граф. прикази : 24 см.

Библиографија: стр. 188

ISBN 9989 – 630 – 29 – 1

а) Математичка анализа – Високошколски учебници

Умножено на офсет техника во ”Графотисок” – Скопје